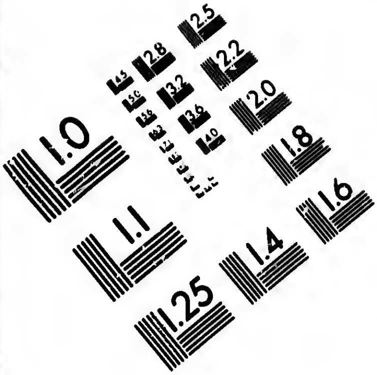


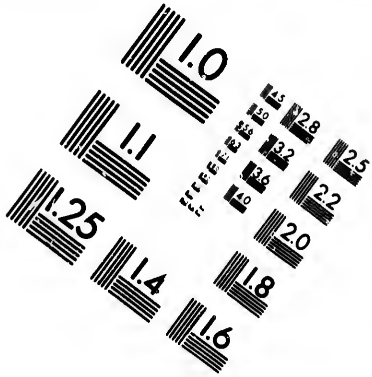
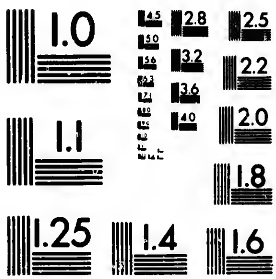
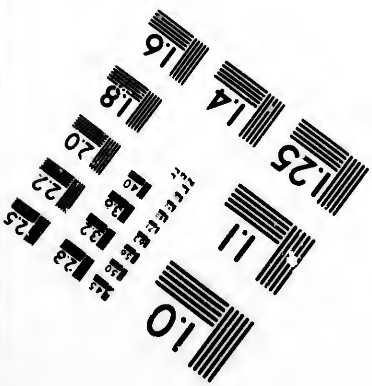
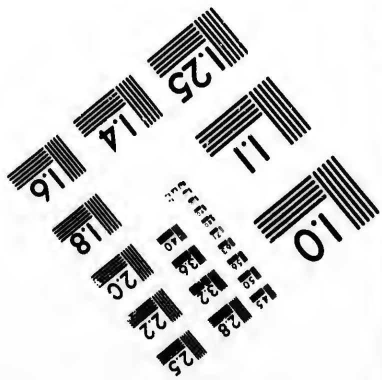


IMAGE EVALUATION TEST TARGET (MT-3)







Technical Notes / Notes techniques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Physical features of this copy which may alter any of the images in the reproduction are checked below.

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Certains défauts susceptibles de nuire à la qualité de la reproduction sont notés ci-dessous.

- [x] Coloured covers/ Couvertures de couleur
- [ ] Coloured maps/ Cartes géographiques en couleur
- [ ] Pages discoloured, stained or foxed/ Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Tight binding (may cause shadows or distortion along interior margin)/ Reliure serré (peut causer de l'ombre ou de la distortion le long de la marge intérieure)
- [x] Additional comments/ Commentaires supplémentaires — Premier plat de couverture restauré.
- [ ] Coloured pages/ Pages de couleur
- [ ] Coloured plates/ Planches en couleur
- [x] Show through/ Transparence
- [ ] Pages damaged/ Pages endommagées

Bibliographic Notes / Notes bibliographiques

- [ ] Only edition available/ Seule édition disponible
- [ ] Bound with other material/ Relié avec d'autres documents
- [ ] Cover title missing/ Le titre de couverture manque
- [ ] Plates missing/ Des planches manquent
- [ ] Additional comments/ Commentaires supplémentaires
- [ ] Pagination incorrect/ Erreurs de pagination
- [ ] Pages missing/ Des pages manquent
- [ ] Maps missing/ Des cartes géographiques manquent

1	2	3

1
2
3

1	2	3
4	5	6

TOISÉ DES SURFACES.

CLEF

DU

NOUVEAU SYSTEME DE TOISER

TOUS LES

CORPS-SEGMENTS, TRONCS ET ONGLETS DE CES CORPS

PAR UNE SEULE ET MÊME RÈGLE

A L'USAGE DES

ARCHITECTES, INGÉNIEURS, ARPENTEURS, PROFESSEURS DE DESSIN, GÉOMÉTRIE, MATHÉMATIQUES, DIRECTEURS D'UNIVERSITÉS, COLLÈGES, SÉMINAIRES, COUVENTS ET AUTRES INSTITUTIONS D'ÉDUCATION, ÉCOLES DES ARTS ET MÉTIERS ET DE DESSIN INDUSTRIEL, MECANICIENS, TOISEURS, MESUREURS, JAUGEURS, OFFICIERS DE DOUANE ET D'ACCISE, CONSTRUCTEURS DE NAVIRES, ENTREPRENEURS, OUVRIERS ET AUTRES AU CANADA ET A L'ETRANGER.

PAR CHS. BAILLAIRGÉ.

ARCHITECTE, INGÉNIEUR, ARPENTEUR,

MEMBRE TITULAIRE

DE LA SOCIETE DE VULGARISATION POUR L'ENSEIGNEMENT DU PEUPLE EN FRANCE, DE LA SOCIETE CENTRALE DES ARCHITECTES DE FRANCE, DE LA SOCIETE DES ARTS, SCIENCES ET BELLES LETTRES DE PARIS, ETC.

QUÉBEC:
C. DARVEAU, IMPRIMEUR-EDITEUR,
No. 8, Rue La Montagne,

1875.

141

CLEF

DU

TABLEAU STÉRÉOMÉTRIQUE BAILLAIRGÉ.

INTRODUCTION

AU

NOUVEAU SYSTEME DE TOISER

TOUS

LES CORPS—SEGMENTS, TRONCS ET ONGLETS DE CES CORPS

PAR UNE SEULE ET MÊME RÈGLE.

L'auteur du nouveau système a l'honneur de prévenir ses confrères Architectes, Ingénieurs, Arpenteurs, Professeurs de Géométrie, de dessin et de Mathématiques, les Directeurs d'Universités, Colléges, Séminaires, Couvents et autres institutions d'éducation, les professeurs et élèves des Ecoles des Arts et Métiers et de dessin industriel, les Mécaniciens, Toiseurs, Mesûreurs, Jaugeurs, Officiers de Douane et d'Accise, Constructeurs de navires, Entrepreneurs, Ouvriers et autres du Canada et à l'Etranger.

Qu'il a confectionné son "Tableau Stéréométrique" afin de réduire à la pratique sa formule universelle pour trouver le volume

---

Avertissement.—Pour protéger son œuvre et en prévenir toute contrefaçon, soit ici ou à l'Etranger, l'auteur a fait breveter sa découverte, son tableau, tant au Canada, qu'aux Etats-Unis et en Europe.

d'un corps de forme et dimensions quelconques. C'est au sujet de cette formule que le Séminaire de Québec, après l'avoir soumise à des *personnes compétentes*, s'exprime ainsi : " ....Parmi les théorèmes et les formules remarquables par leur nouveauté, ce qui frappe le plus, c'est l'expression générale du volume d'un solide quelconque. Un doute involontaire s'empare d'abord de l'esprit; mais un examen attentif dissipe bientôt ce doute et *l'on reste étonné à la vue d'une formule si claire, si aisée à retenir et dont l'application est si générale.*"

Un article du "Journal d'Education" parle de l'*impulsion soudaine* que cette découverte imprime à la science.

Son système d'exposition, dit un autre journal, est neuf et d'une simplicité qui le met à la portée de toutes les intelligences.

Le tableau dont les dimensions sont d'à peu près 3 pieds de hauteur sur 5 pieds de longueur est en bois franc à fond teint ou peint de couleur convenable. Fixés à la planche sont quelque 200 modèles en bois franc polis, et huilés ou vernis à demande. Chaque petit modèle s'ajuste à la planche au moyen d'une cheville en fil de fer fixée au tableau, et telle qu'on peut facilement en détacher le modèle et le remettre à volonté. Le tout est recouvert d'un panneau vitré qui en exclut la poussière, et que l'on peut ouvrir et fermer à volonté, avec serrure et clef au besoin.

Les modèles comprennent à peu près toutes les formes élémentaires qu'il soit possible de concevoir ou que fourniraient par division ou décomposition un corps composé quelconque. C'est ainsi qu'on y trouvera tous les prismes et prismoïdes, cylindres et cylindroïdes droits et inclinés, les troncs et onglets de ces corps : pyramides, cônes et conoïdes droits et inclinés avec leurs troncs et onglets; la sphère avec ses subdivisions en hémisphère, quart de sphère, demi-quart ou pyramide sphérique tri-rectangle, calottes ou segments, zones, pyramides, troncs et onglets; le sphéroïde ou ellipsoïde allongé ou aplati avec ses segments, moitié, quart, troncs, etc.; enfin, les fuseaux et leurs troncs, etc., y compris les futailles de toutes sortes, les polyèdres réguliers, anneaux concentrique et excentrique, et une foule d'autres formes pratiques des plus variées mais qu'il serait trop long d'énumérer ici.

La nouvelle règle ou formule dispense de toute considération, de tout calcul préliminaire quant à la nature, forme ou dimensions du solide entier dont le volume à évaluer fait partie. Ainsi, quand il s'agit de cuber par les règles ordinaires un segment, tronc ou zône de sphéroïde par exemple, on a tout d'abord à s'enquérir des axes du solide pour les faire entrer en compte ; mais par le nouveau système on procède de suite à évaluer la solidité requise en y appliquant directement la formule $(A+B+4S)\frac{1}{6}H$. De même, si l'on croit avoir affaire à un tronc de pyramide par exemple, il y a tout d'abord à s'assurer si c'en est un, afin d'y appliquer les règles ordinaires du toisé ; à cette fin, il y a à mesurer les longueurs respectives des arêtes des bases supérieure et inférieure pour établir ensuite les rapports entre elles et s'assurer par là même si elles sont ou non proportionnelles, sans quoi le solide à évaluer n'est pas un tronc de pyramide ; tandisqu'au contraire par la nouvelle formule, il suffit de s'assurer du seul parallélisme des arêtes (ce qui se voit d'un coup d'œil et sans mesurage aucun) pour procéder de suite à l'application de la règle—car, d'après le procédé de l'auteur, le tronc de pyramide, réputé tel, est regardé comme prismoïde et soumis par là même à la formule générale, tout comme la pyramide entière qui est aussi un prismoïde.

Mais à part toute considération préliminaire sur la nature du solide à estimer et des calculs longs et difficiles qu'il faut faire à cet effet quand on procède par les règles ordinaires—il est à remarquer que les calculs qui restent encore à faire pour trouver le volume du solide ou liquide dont il s'agit sont pénibles, difficiles, longs quelquefois à n'en plus finir, comme quand il s'agit par exemple du jaugeage d'une futaille, soit du toisé d'un tronc de fuseau. Ce sont très souvent des formules algébriques, du calcul différentiel et intégral et une seule erreur d'impression dans la formule dont l'intelligence ne peut pénétrer ou suivre les mystérieux replis—erreur dont on ne s'aperçoit pas et qu'on ne saurait en conséquence corriger—une seule erreur, de cette sorte est assez pour rendre inutile le calcul tout entier et nécessiter de le recommencer ; au lieu que par le système maintenant proposé, comme il n'y a qu'une seule règle, une seule formule à apprendre et à retenir et qu'elle est des plus simples, l'intelligence peut la suivre pas à pas, et l'œil même s'apercevoir de suite s'il y a erreur.

Aujourd'hui, il y a autant de règles diverses que de solides : une pour le prisme ou cylindre, une pour la pyramide ou le cône, une autre pour le tronc de cône ou de la pyramide, une troisième pour la sphère, puis trois autres pour le segment, la zone et l'onglet de ce corps, encore une pour le sphéroïde, avec des formules additionnelles et en nombre égal pour le segment, le tronc, l'onglet, suivant que le plan coupant est parallèle ou incliné au petit ou au grand axe ou à un diamètre quelconque du solide. Combien d'autres formules différant toujours l'une de l'autre et chacune d'elles de toutes celles déjà énumérées, lorsqu'il s'agit d'en venir au volume d'un conoïde parabolique droit ou incliné, d'un segment de fuseau circulaire, elliptique, etc., d'un onglet de cylindre, de cône, de conoïde ou de fuseau. Eh bien ! on peut aujourd'hui mettre de côté toutes ces règles, toutes ces formules variées qu'il est impossible de retenir dans la mémoire et pour lesquelles il faut toujours avoir un livre à sa disposition ; on peut mettre de côté toutes ces formules avec les livres qui les contiennent, et armé du nouveau système s'attaquer à un solide quelconque pour en évaluer le contenu à l'aide d'une toute petite règle que l'on retient comme son *pater*, savoir : " à la somme des surfaces des bases opposées, ajouter quatre fois la surface intermédiaire et multiplier le tout par la sixième partie de la hauteur du solide. "

Le calcul se réduit, dans tous les cas, d'après le système de l'auteur, à celui des surfaces des bases opposées et de celle de la section médiane ou intermédiaire, et c'est précisément à cette fin que doit servir le tableau dont il s'agit, où l'on verra de suite la forme du solide, la nature des surfaces qui lui servent de bases, et au moyen d'un trait ou ligne, la nature et les dimensions de la section, surface ou coupe à demi-distance entre les bases ou extrémités opposées du solide à estimer. C'est ainsi que l'on verra que dans la pyramide, le cône, le conoïde, le segment de sphère ou de sphéroïde, la surface supérieure se réduit à zéro ou est nulle, tandisque dans la sphère, le sphéroïde et certains prismoïdes, chacune des surfaces opposées devient nulle, ce qui réduit alors le calcul à multiplier 4 fois la surface de la section médiane par la sixième partie de la hauteur du solide.

La formule est mathématiquement exacte pour les prismes et prismoïdes, cylindre et cylindroïdes droits ou inclinés, pyramides régulières ou irrégulières et les troncs de ces solides entre bases parallèles, pour le cône droit ou oblique et son tronc entre bases parallèles, pour la sphère, calotte et zone sphérique, pour le sphéroïde et tout segment, zone ou tronc de ce corps séparé du solide entier par un plan incliné d'une manière quelconque aux axes ou diamètres, ou compris entre deux plans parallèles quelconques, pour les conoïdes parabolique et hyperbolique droits ou inclinés et les troncs de ces solides compris entre plans parallèles ; et ces divers solides constituent dans leur ensemble la presque totalité des solides élémentaires que l'on puisse être appelé à évaluer.

Il n'y a que pour les fuseaux seuls et certains onglets de ces corps et des autres solides que la formule n'est pas mathématiquement correcte, et encore peut-on même dans ces derniers cas arriver à des résultats plus certains, plus satisfaisants au moyen de la formule générale qu'on ne saurait le faire par aucun des autres moyens auxquels on a d'ordinaire recours dans la pratique. Il suffit pour cela de décomposer le demi-fuseau ou tronc de ce solide en deux ou au plus en trois parties par des coupes ou plans parallèles aux bases et d'appliquer la formule séparément à chacune de ces parties pour arriver à un résultat très voisin de l'exactitude parfaite, et de même pour les onglets de prismes et prismoïdes, de pyramides, cônes, conoïdes et fuseaux, de sphère et de sphéroïdes et les troncs de ces onglets entre bases parallèles, de partager le solide en 2, 3 ou 5 parties au plus pour appliquer ensuite séparément la formule à chacune des tranches composantes, comme il est d'ailleurs évidemment nécessaire de le faire pour le cubage des solides composés tels que la chaloupe, le bateau, le navire et autres formes analogues, composées qu'elles le sont dans tous les cas de quelques unes des formes élémentaires que l'on trouvera parmi les modèles du tableau.

Et dans la plupart des cas, cette subdivision même du solide en 2, 3 tranches composantes, sera inutile, puisque pour les onglets de prismes, de cylindres, de pyramides et de cônes, l'erreur maximum entre le volume réel et celui obtenu par la formule proposé ne dépasse pas d'ordinaire un .005 ou un demi pour cent, comme on le fera voir.

Que l'on considère aussi l'immense avantage d'un pareil tableau pour la seule nomenclature des corps. Cela rend maintenant possible aux élèves les moins avancés des colléges, couvents et autres écoles une étude qui leur était auparavant interdite. En effet, pour saisir sur le papier et comprendre la représentation graphique d'un corps, il faut connaître préalablement dessin, la perspective qui ne s'acquiert d'ordinaire que par les élèves avancés et dans les dernières années de collége ; tandis qu'aujourd'hui le plus jeune, le moins avancé pourra détacher le modèle du tableau, le tenir, le manipuler ; le Maître ou Professeur, la Religieuse ou Maîtresse lui en dira le nom et lui en fera voir un exemple dans les mille et un objets et besoins de tous les jours.

Ce que peuvent représenter les divers modèles du Tableau.

Le tronc de cône droit ou renversé sera suivant le cas, la représentation d'une tour, d'un phare, etc., d'un verre à boire, d'un saloir, d'une tinette à beurre, d'un seeau, d'une auge ou cuve ordinaire ou comme on en voit dans les brasseries et ailleurs ; le cône plat ou surbaissé fournira l'idée d'un couvercle ou d'un fond de chaudière, d'un toit, etc. ; la pyramide sera l'image d'un clocheton, d'une flèche de clocher, etc. : le conoïde droit, la calotte de sphère ou de sphéroïde sera un dôme plus ou moins élevé ou surbaissé pendant que le même solide en le renversant présentera à l'imagination un bassin, un réservoir, un vaisseau comme il s'en trouve dans la cabane à sucre, la distillerie ou autre manufacture.

Le conoïde incliné et renversé, la calotte ou le segment de sphéroïde également incliné et renversé sera la représentation, l'image de l'espace occupé par une liqueur, un liquide, un fluide quelconque au fond d'un vaisseau auquel on aura donné pour une raison ou une autre une inclinaison quelconque. Le prisme, le prismoïde, sera de même le modèle de ces mille et une toitures simples ou compliquées qui couronnent nos habitations domestiques, nos édifices publics, nos palais. Le toit de la lucarne ordinaire sera, si il est en croupe, un prisme triangulaire oblique ou incliné ; s'il ne l'est pas ce sera le tronc de prisme, et le corps de la lucarne sera indifféremment suivant l'aspect sous lequel on l'envisagera, un prisme droit triangulaire, ou un onglet de prisme quadrangulaire.

Parmi les prismoïdes l'on trouvera encore le plançon, le tronc d'arbre en grume, le déblais et remblais de la voie ferrée, le réservoir, le quai, le pilier, la tente à camper, l'ouverture ébrasée ou non d'un chassis, d'une porte, niche ou meurtrière dans la muraille. Le quart de sphère ou de sphéroïde, la demi-calotte sera la voûte du rond point d'une église, ou d'une salle terminée de la même manière. La sphère entière, le sphéroïde sera la bille de billard, la boule de clocher, la Terre que nous habitons, la Lune, le Soleil, les Planètes. En un mot, l'on trouvera sur le tableau, et l'on maniera à volonté, afin de l'envisager sous tous les aspects possibles, le modèle de chacune des formes élémentaires qu'il soit possible de concevoir.

Les bases, faces latérales, sections centrales ou intermédiaires des modèles du tableau offrent aussi à l'appréciation de l'élève, dans l'étude préalable du toisé des surfaces, la représentation de chacune des figures planes et de toutes espèces de surfaces convexes ou concaves soit à simple ou à double courbure:

Le carré, rectangle, lozange, parallélogramme, trapèze, quadrilatère—le triangle équilatéral, isocèle, scalène, rectangle, acutangle, obtusangle—le polygone régulier et irrégulier—le cercle, demi-cercle, quart de cercle, secteur, segment, zone, lune, l'anneau concentrique, excentrique—l'ellipse, demi-ellipse, segment d'ellipse moindre, plus grand que la moitié—les autres sections coniques, parabole, hyperbole—le triangle sphérique équilatéral, tri-rectangle, tri-obtusangle, la calotte ou segment, zone, lune sphérique—segments et zones, etc., d'ellipsoïdes allongés et aplatis, etc.

Le tableau aura pour effet d'intéresser l'élève et de rendre attrayant une étude jusqu'à présent aride et à peu près impossible. On pourra au moyen du tableau et de la formule générale enseigner la stéréométrie, c'est-à-dire, la nomenclature, les propriétés et le toisé des corps dans les écoles, même élémentaires, où on aura d'abord enseigné assez de géométrie pour mettre les élèves en mesure de déterminer la surface d'une figure plane quelconque, puisque le système proposé réduit en réalité le toisé des corps ou volumes à ce seul travail; ce qui reste à faire n'étant qu'une addition des surfaces ainsi trouvées et la multiplication de leur somme par la sixième partie de la hauteur du solide.

LA FORMULE.

La formule prismoïdale, proprement dite, n'est pas nouvelle; puisque déjà et depuis longtemps on en fait quelquefois l'application au calcul des terrassements et déblais de voies ferrées, etc.; mais on ne semble pas avoir jamais eu l'idée de se servir de cette règle pour toiser, par exemple, un tronc de pyramide ou de cône, un conoïde ou un segment de sphéroïde incliné à son axe, un tronc d'ellipsoïde entre bases parallèles inclinées à l'axe sous un angle quelconque et en général la plupart des solides du tableau, et l'eût-on fait d'ailleurs que cette formule ne serait jamais devenue d'une application générale dans la pratique ou dans l'enseignement sans le tableau, pas plus que la vapeur sans l'engin, l'électricité sans le télégraphe.

L'auteur a à partager avec d'autres l'honneur de cette découverte pour un certain nombre de solides auxquels on en a démontré l'application, quoique d'une manière plus ou moins directe et variée; mais en cela il est en bonne compagnie et peut-être même doit-il s'en féliciter puisque ce sont autant d'adhésions à l'appui de sa thèse et pas plus il ne doit s'en contrarier que Leverrier et Adams au sujet de "Neptune," Newton et Leibnitz à l'endroit des "fluxions."

"Il est bien clair, dit le Révd. Mr. Billion, dans sa lettre à Mgr. Larocque, que l'auteur n'exige pas qu'on fasse usage de sa formule dans une foule de cas, où une expression plus simple peut la remplacer."

Il y a bien en effet, non pas une foule de cas, mais trois ou quatre cas, où l'on peut remplacer la formule générale par une expression plus simple; mais ces expressions simplifiées découlent directement et sans effort de la formule générale.

Peu de personnes ont saisi en ceci toute la pensée de l'auteur, à l'endroit de la nécessité, l'avantage d'une seule et même formule pour tous les solides possibles. Mais qu'on lise plutôt la lettre suivante de Mr. le professeur Lafrance, et l'on admettra de suite la sagesse de ses remarques.

Québec, 11 *Décembre* 1871.

A Mr. C. Baillairge,

Monsieur,

" ....

" Quant à l'exactitude de la formule, nul ne saurait en douter, puisque en la promulgant, comme vous l'avez fait dans votre traité de 1866, vous avez vous-même donné toutes les preuves nécessaires à l'appui.

" Quant au prisme ou cylindre, tout d'abord, (article 1254 de votre traité) si l'on objecte que pour ces solides au moins, votre formule loin d'offrir aucun avantage, ne fait que compliquer le calcul; je répondrai qu'il n'en est pas ainsi, puisque dans ce cas cette formule se réduit de suite à la règle ordinaire. Ainsi l'élève qui a déjà appris que toute section d'un prisme ou d'un cylindre par un plan parallèle à sa base est une figure semblable et égale à la base, se dira de suite : " Mais, la somme des bases, plus 4 fois la section intermédiaire, vaut 6 fois la base, et 6 fois la base multiplié par la 6me partie de la hauteur revient tout simplement à multiplier une fois la base par toute la hauteur" ; et en effet, c'est le cas. Or, en conservant la formule, même pour le prisme et le cylindre, cette formule reste générale pour tous les solides et exempte d'apprendre ou de retenir dans la mémoire une seule formule additionnelle ; car enfin, c'est là l'immense avantage du système que vous proposez " une seule et même formule " pour tous les solides possibles, et du moment que vous en introduisez une seconde, voire même une troisième pour la pyramide et le cône, une quatrième pour le paraboloïde dont le cubage par les règles ordinaires paraît plus simple que par la vôtre ; dès lors, vous introduisez la confusion dans l'esprit de l'élève, du mesureur ; dès lors il y a danger de confondre ces règles, de prendre l'une pour l'autre, de les oublier toutes ou ne pas les retenir dans la mémoire et de nécessiter par là même un livre de renvoi, ce dont votre système dispense entièrement.

" D'ailleurs, pour la pyramide ou le cône, comme vous le dites (1525 de votre Géométrie) la surface de la section intermédiaire est le quart de celle de la base ; or $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ et $1+1$ font 2, et l'on voit de suite que la sixième partie de 2 est la même chose que le tiers de 1, d'où il suit que la formule générale ramène immédiatement à la règle ordinaire et cela sans qu'il soit nécessaire de connaître d'avance cette règle.

" Encore, que le prisme, le cylindre, la pyramide, le cône, comme il arrive dans la pratique, soient tant soit peu convexes ou concaves, où en serions-nous avec les règles ordinaires, tandis que au contraire dans ce cas votre formule est la seule qui puisse cuber exactement le corps dont il s'agit, et pour la futaille, tronc central de fuseau (1574), le paraboloïde (1564), que sa paroi latérale soit (rem. page 697) le moins du monde trop ou trop peu convexe ou bombée, la règle ordinaire qui consiste à multiplier sa base par sa hauteur et à prendre la moitié, donnera un volume ou trop fort ou trop faible. Comment donc arriver dans ce cas à la vérité, si non par votre formule qui, comme dans le cas de la futaille fait entrer dans le calcul, le sinus verse (ou à peu près) du plus ou moins de renflement du corps à cuber, c'est-à-dire, l'élément même qui concourt à en faire varier le volume.

" Je viens d'indiquer les articles ou alinéas de votre traité où on trouve la preuve de l'exactitude de la formule pour les corps ci-dessus mentionnés ; eh bien, l'article 1561 en fait foi aussi dans le cas du sphéroïde ou ellipsoïde allongé ou aplati,—1562, pour le segment de ce solide, –1566, pour l'hyperboloïde, et 1581 à 1592 pour le prismoïde en général.

" Le fait est que trop peu de personnes encore se sont donné la peine d'examiner votre livre, tant est grande la tendance chez nous à rester toujours dans l'ornière de la vieille routine. En effet, on a été 20 ans à substituer au calcul des louis, chelins et deniers, le calcul décimal infiniment plus simple et plus expéditif des piastres et centins; on en sera bien encore 10 à apprécier votre œuvre, à introduire votre formule, votre tableau tout indispensable qu'il soit, dans l'éducation générale de ce pays.

" Je crois fermement cependant (et c'est trop souvent le cas, si peu on est prophète dans son pays) qu'on saura de suite vous apprécier à l'étranger et je ne doute pas qu'aussitôt votre tableau connu aux Etats-Unis et en Europe, où, me dit-on, vous avez déjà eu le bon esprit de faire breveter votre invention; je ne doute pas, dis-je, qu'aussitôt vous aurez lancé votre prospectus à l'Etranger, aussitôt vous aurez des commandes et en grand nombre pour l'introduction du tableau dans toutes les Universités, écoles et autres institutions destinées à l'enseignement non-seulement de la jeunesse, mais aussi de l'âge mûr chez tous les peuples."

" C. J. L.-LAFRANCE,
" Professeur."

Voici maintenant ce que dit de la formule, Mr. R. Steckel, mathématicien distingué d'Alsace, France :

" Ayant eu occasion de vérifier votre formule quant à son exactitude—relativement à différentes espèces de corps, j'ai trouvé qu'en effet, tel que vous le dites en d'autres termes, elle est applicable rigoureusement à tous les polyèdres sans exception, de même qu'à tous les solides engendrés par la révolution des courbes du second ordre autour de l'un ou de l'autre de leurs axes principaux ainsi qu'aux segments de ces solides, quelle que soit la direction du plan de section.—En cela on pourrait ajouter à votre prospectus, il me semble, qu'en général la règle est applicable d'une manière rigoureusement exacte :

" 1° A tous les solides engendrés par la révolution d'une ligne droite autour de deux plans parallèles l'un à l'autre définis en étendue par des contours limitrophes de forme quelconque, peu importe les variations du rapport entre les vitesses respectives des deux extrémités de la ligne mouvante.

" 2° A tout solide engendré par un plan à contour défini qui se meut avec une vitesse constante en ligne directe d'un point à un autre, pendant que sa surface varie d'une manière correspondante comme le carré de la corde génératrice d'une zone de section conique quelconque.

" Pour ce qui regarde les solides engendrés par des courbes régulières d'un ordre plus élevé que les sections coniques, il est d'ordinaire assez facile de les subdiviser, avec une exactitude plus que suffisante pour toutes les fins pratiques,—de manière que les solides partiels résultants puissent être classés dans l'une ou dans l'autre des deux catégories de solides que je viens de décrire.

" De plus, à part de certaines espèces d'onglets de solides élémentaires, je ne vois guère de corps de formes régulières qui puissent se rencontrer dans la pratique du mesureur ou du jaugeur ou qui soient en usage dans les arts et métiers pour lesquels une subdivision répétée au delà de deux ou trois fois soit nécessaire ; et quant aux onglets biscornus il vous sera facile d'y référer dans le traité qui accompagnera le tableau.

" J'ai trouvé très-commode, un de ces jours passés, d'appliquer la règle à un tronc de conoïde hyperbolique engendré par la révolution d'une hyperbole du 5ème ordre autour d'une de ses asymptotes, en procédant par subdivision, dans le but de vérifier le degré de précision apporté à la construction d'un ajutage convergent en cuivre ayant cette forme particulière que j'ai employé dans une expérience hydraulique. "

Mr. Steckel, après avoir prouvé l'exactitude mathématique de la formule pour tous les corps mentionnés par l'auteur dans son prospectus, a fait de longues et difficiles analyses à l'endroit de l'application de la formule aux onglets de cylindre, de cône, de conoïdes, et de sphéroïdes, etc., et a démontré qu'en effet, tel que l'auteur le dit, l'erreur maximum pour ces solides, qui d'ailleurs se rencontrent très rarement dans la pratique du mesureur, ne dépasse pas d'ordinaire .005 ou la moitié dé un par cent, quand on toise le corps d'un seul trait, et que cette erreur petite qu'elle soit, s'élimine facilement et devient nulle, pour ainsi dire, en subdivisant l'onglet, le demi-tronc de fuseau, en deux ou tout au plus en trois parties, à chacune desquelles on applique séparément la formule, pour faire ensuite la somme des parties composantes.

" La formule, dit le Révd. Mr. Billion, (mathématicien du Séminaire de St. Sulpice, Montréal,) s'applique à toute une série d'autres corps dont l'auteur n'a point parlé, et j'entends ici des corps auxquels la formule s'applique exactement : en effet, supposons un quelconque des corps mentionnés par l'auteur, soit par exemple un tronc de pyramide. On peut considérer ce corps comme formé par la juxtaposition d'une infinité de plans parallèles aux deux bases. Maintenant, supposons tous ces plans enfilés d'une base à l'autre par une ligne quelconque droite ou courbe, et susceptible de se courber, ou plier d'une manière quelconque. En inclinant, ou pliant, ou courbant, ou tordant cette espèce de directrice, on entrainera dans le même sens toutes les tranches du dit corps, et on aura un nouveau corps de mêmes bases et de même hauteur que le premier, parfaitement équivalent en volume, mais courbé suivant un arc de cercle, de parabole, ou d'une courbe sous loi quelconque, ou plié selon un angle quelconque, les tranches demeurant toujours dans le même plan. Si la direction est contournée en hélice, et que la base soit un cercle, on aura une colonne torse, etc., etc. Voilà donc une multitude de corps auxquels la même formule s'applique, par la raison qu'ils sont équivalents aux premiers.

" L'auteur démontre sa formule comme rigoureusement exacte pour un grand nombre des corps énoncés, et comme aussi approximative qu'on voudra pour ceux auxquels elle ne s'applique pas d'une manière absolument rigoureuse. J'ai vérifié soigneusement la démonstration de la formule pour les 1ers corps, ceux auquels elle s'applique rigoureusement. La proposition et la démonstration sont *exactes et vraies* dans tous ces cas.

" Quant aux autres corps, il est vrai que plus on multipliera les sections, suivant le besoin, plus l'approximation sera proche de la vérité."

" Dans les ouvrages publiés jusqu'à présent sur le *Troisé des Solides*, on trouve, dit Mr. Blain, une foule de règles différentes pour évaluer le volume des solides formés par la révolution d'une courbe du second ordre autour de son axe. Ces règles, desquelles résultent autant de formules, il faut les retenir, c'est-à-dire surcharger sa mémoire sans être bien sûr qu'elle vous sera fidèle au moment où vous aurez besoin de telle ou telle formule. La formule de M. Baillairgé est *générale* et dispense le praticien de ce pénible effort.

" De plus, cette formule est applicable lorsqu'une courbe engendre un solide en tournant autour d'un axe qui n'est pas le sien, et voilà un cas qui a rarement, qui n'a presque jamais été prévu par les auteurs qui ont écrit sur la matière et dont le défaut général, sans vouloir faire injure à leur profonde science, a été d'avoir toujours trop en vue la théorie au détriment de la pratique.

" J'ai constaté, avec M. Steckel, qu'on ne fait pas mention, dans la majeure partie des *Toisés*, d'un sphéroïde coupé par un plan dans une direction oblique à ses axes, cas prévu par M. Baillairgé, no. 1,560 de son *Traité*. On ne parle pas non plus d'un paraboloïde dans les mêmes conditions, (1,564), et encore moins d'un hyperboloïde, (1,566).

" Les jaugeurs, en particulier, peuvent tirer un parti énorme de la formule de M. Baillairgé, puisque la grande majorité, on pourrait presque dire la totalité des tonneaux, barils, bouilloires, chaudières, réservoirs, etc., et tous les vaisseaux employés habituellement à contenir des liquides, ne sont autre chose que des troncs de fuseaux circulaires, hyperboliques, paraboliques ou elliptiques, des sphéroïdes ou troncs de sphéroïdes, calottes sphériques, paraboloïdes, hyperboloïdes, troncs de cônes et de conoïdes à surfaces concaves ou convexes, etc.

" La formule de M. Baillairgé dispense aussi le praticien de déterminer à quelle espèce de solide appartient celui qu'on se propose de mesurer, opération qui est sujette à bien des erreurs dans la pratique.

" Enfin, la même formule donne le moyen de trouver la quantité de liquide contenue dans un vase seulement en partie plein, dans quelque position que se trouve ce vase et sans avoir besoin de changer sa position, (1,577, 1578, etc.)

" Je dépasserais de beaucoup les limites d'un article de journal, si je voulais énumérer tous les avantages de la *découverte* faite par M. Baillairgé, car c'est réellement une découverte importante qui honore et l'auteur et son pays.

" Je le dis franchement, j'ai d'abord douté de l'exactitude des calculs de M. Baillairgé, et, avant d'exprimer une opinion, j'ai refait moi-même les calculs, puis consulté des hommes habiles et versés dans la pratique. Je ne fais que consigner ici leur opinion qui sera confirmée plus tard par tous ceux qui emploieront le nouveau système de mesurage. "

Pour ce qui est maintenant, de l'exactitude des résultats que donne la formule dans le cas des troncs de fuseaux par exemple et des vaisseaux de capacité de cette sorte, comparée à celle que donnent les règles ordinaires, l'auteur ne saurait mieux faire que de publier au long les remarques censées de M. le professeur Gallagher à ce sujet. On y verra aussi la somme de travail dans les deux cas

Québec, 9 *Décembre*, 1871.

" Nul doute que cette formule est mathématiquement correcte, appliquée à tous les solides que vous énumérez dans votre prospectus. C'est d'ailleurs ce que vous avez parfaitement démontré dans votre précieux ouvrage sur la Géométrie et le mesurage, publié en 1866. C'est ce que M. Steckel a promptement fait voir de la manière la plus concise dans la lettre qu'il vous a adressée à ce sujet, pour ne rien dire des lettres des R. R. MM. Méthot et Maingui, de la part des professeurs de Mathématiques du Séminaire de Québec et de l'Université Laval, où les expressions " étonné " " enchanté " montrent suffisamment la haute opinion qu'ont de votre découverte ces juges compétents. Mais, dans mon opinion, vous n'insistez pas suffisamment sur la grande valeur, les avantages manifestes et multipliés de votre règle appliquée au fuseaux, dont les troncs centraux se rencontrent tous les jours et dans toutes les parties du monde civilisé sous les mille et une forme de futailles de toutes les grandeurs et de toutes les espèces que l'on puisse concevoir ; et la nécessité de mesurer ces objets avec promptitude à cause de leur nombre, et avec exactitude à cause de la nature généralement précieuse de leur contenu, rend une règle simple, facile, et commode, comme celle que vous proposez maintenant, de la première importance pour l'humanité.

" Maintenant, Monsieur, que votre règle embrasse ces précieuses qualités requises, permettez-moi de la comparer, dans son opération et ses résultats avec les règles données par quelques-uns de nos meilleurs mathématiciens et de nos meilleurs auteurs tels que Bonnycastle par exemple, voir l'édition de son traité de mesurage du Rév. E. C. Tyson, page 147.

Problême XXVII (pour exemple.)

" Trouver la solidité du tronc central d'un fuseau elliptique ; sa " longueur, ses diamètres au centre et au bout étant donnés ; le dia- " mètre qui se trouve à égale distance du diamètre du milieu et de " celui du bout étant aussi connu. "

Règle. " 1° de la somme de trois fois le carré du diamètre du " centre, et le carré du diamètre du bout, ôtez quatre fois le carré du " diamètre qui se trouve entre celui du milieu et celui du bout, et de " quatre fois le dernier diamètre ôtez la somme du plus petit dia- " mètre et trois fois celui du centre, et $\frac{1}{2}$ du quotient provenant de " la division de la première différence par la dernière donnera la *dis-* " *tance centrale.*

" 2° Trouvez les axes de l'ellipse par le Problème II, et la sur- " face du segment elliptique, dont la corde est la longueur du tronc, " par le Problème V.

" 3° Divisez trois fois la surface ainsi trouvée par la longueur du " tronc, et du quotient soustrayez la différence entre le diamètre du

" centre et celui du bout, et multipliez le reste par huit fois la dis-
" tance centrale.

" 4° Alors de la somme du carré du plus petit diamètre, et deux
" fois le carré de celui du centre, ôtez le dernier produit trouvé, et
" cette différence multipliée par la longueur, et ce produit encore par
" .261799, etc., donnera la solidité demandée.

" Ici l'esprit s'égare entièrement au simple récit des différentes opérations qu'il faut exécuter (pas moins de 27) et les simples résultats de chacune de ces opérations sans parler des détails des multiplications, des divisions, et d'autres calculs nécessaires pour y arriver, prennent deux pages entières du livre.

" Appliquée, disons à une futaille de 23 pouces de long, le diamètre de la bonde étant de 24 pouces, celui du fond de 21.6 pouces, et le diamètre intermédiaire de 23,40909 pouces, le résultat, comme il est entièrement fait aux pages 148 et 149 du dit livre, donne 11,854¾ pouces cubes bien près, ou 51 gallons et 5 demiards.

" Or, le même exemple, par votre formule donne 11,855.2 pouces cubes, ce qui ne diffère du dernier résultat que de .0000045 ou moins d'un demi-pouce sur environ 12000 pouces, ou la 240ème partie de un par cent d'excédant, la 14ème partie d'une roquille.

" Alors non seulement votre formule dans ce cas doit être considérée, sous tous les rapports aussi exacte que celle de Bonnycastle, mais elle l'est réellement plus dans la pratique ; car, même si l'erreur en excédant atteignait le maximum de .005 ou de ½ de un par cent, où est le mesureur pratique ou le jaugeur qui, pour la considération d'une pinte sur un baril de 50 gallons, ou d'un pot par tonneau, voudrait, pourrait passer des heures de son temps à calculer par l'ancienne méthode ce qu'il peut faire avec plus d'exactitude et en moins de deux minutes par la nouvelle ; car chaque marchand vous dira que dans le jaugeage pratique du baril il y a généralement une erreur en plus ou en moins de un à deux gallons par barrique.

" Et même on ne pourrait arriver à cette exactitude comparative de l'ancienne méthode qu'en prenant toutes les décimales, ce que personne ne voudrait faire par suite de l'immense travail des calculs ; tandis que par la nouvelle formule, en raison de sa grande simplicité et de sa concision, toutes les décimales peuvent facilement être prises, et il ne résulte aucun inconvénient si l'on néglige quelques-unes des dernières puisque le résultat, comme je l'ai démontré ci-dessus est, (et, pour les formes convexes est toujours, quoique très-légèrement) en excédant du véritable contenu.

"J'ai tort cependant en disant que l'erreur maximum, par votre règle, dans le jaugeage des barils, est de .005 ou de la moitié de un par cent, et vous ne le dites pas non plus dans votre prospectus ; au contraire vous montrez de la manière la plus satisfaisante, aux pages 708, 709 de votre dit traité, dans les nombreux exemples que vous donnez et que vous complétez, les comparant dans chaque cas avec les résultats donnés par les règles de Bonnycastle, que l'erreur maximum en excédant ne dépasse pas, dans votre premier exemple et votre second, $\frac{1}{4}$ de un par cent ou d'une pinte par tonneau ; dans l'exemple 8 c'est $\frac{1}{5}$ de 1 par cent ; l'exemple 10 donne pour l'erreur maximum $\frac{1}{6}$ de 1 par cent ; l'exemple 5 donne $\frac{1}{7}$ de 1 par cent ; les exemples 4 et 12 (2), $\frac{1}{10}$ de 1 par cent ; l'exemple 9, $\frac{1}{16}$ de 1 par cent ; les exemples 2 et 12 (1 et 3) $\frac{1}{20}$ de 1 par cent ; et l'exemple 7, $\frac{1}{40}$ de 1 par cent ; et ces exemples comprennent toutes les variétés et toutes les grandeurs de barils circulaires, elliptiques et paraboliques, c'est-à-dire des trois variétés que l'on rencontre généralement dans la pratique.

"Mais en appuyant sur la formule, je m'aperçois que je n'ai encore rien dit du si important "Tableau Stéréométrique" sans lequel, comme vous le remarquez avec tant d'apropos, la règle serait presque aussi inutile pour l'enseignement du mesurage dans les écoles, sinon dans la pratique, que la vapeur sans l'engin, ou l'électricité sans le télégraphe.

"Votre tableau, en dehors du simple mesurage des corps, possède beaucoup d'autres avantages, comme vous les énumérez dans votre prospectus, et sur lesquels il est inutile pour moi d'appuyer, vu que je concours entièrement dans tout ce que vous en dites ; quoique je croie que vous auriez pu insister encore plus sur l'avantage d'un pareil tableau dans l'étude d'un élève architecte, bien plus d'un architecte de profession, qui parmi ces modèles, trouverait celui de toute forme ou proportion concevable de toit, de dôme, etc., dont il puisse être appelé à faire le dessin ; de l'Ingénieur Civil qui y trouverait toutes les descriptions de prismoïdes qu'il puisse rencontrer dans les déblais ou remblais pour les chemins de fer, les canaux, les docks, etc., ou dans les jetées, piliers et culées de ponts ou autres constructions ; de l'Ingénieur Mécanicien qui y trouverait toutes les variétés de bouilloires, chaudières ou autres vaisseaux et les parties constituantes de toutes espèces de mécanisme"

J. GALLAGHER

CLEF

DU

TABLEAU STÉRÉOMÉTRIQUE BAILLAIRGÉ.

NOUVEAU SYSTEME DE TOISER

TOUS

LES CORPS—SEGMENTS, TRONCS ET ONGLETS DE CES CORPS

PAR UNE SEULE ET MÊME RÈGLE.

(1) Il est utile de recueillir et de présenter sous une forme succincte les diverses formules ou règles qui on trait au calcul des surfaces et volumes des divers corps et figures dont il a été jusqu'ici [1] question. Un ensemble de cette sorte permettra de référer plus aisément à ces règles, pour y trouver d'un coup-d'œil celle dont on aurait besoin, eu égard au problème à résoudre, et quelques exemples pratiques des divers cas mettra l'élève plus au fait du procédé à suivre pour arriver au résultat voulu.

(2) Déterminer une surface ou un volume, c'est comme on la vu (**333** et **1014 G.**[2]) trouver le nombre de fois que cette surface ou volume contient une autre surface ou volume que l'on prend pour unité

---

1. (" Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique, etc.," par le même auteur.)

2. Remarque.—Les nombres en caractère noir et entre parenthèses, comme (333 et 1014 G.), (24 G.), (1018 G.), etc., renvoyent au " nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique, etc., " par le même auteur, et les nombres aussi en caractère noir et suivis d'un T., au traité actuel où les numéros correspondants des paragraphes, alinéas ou articles ont trait à la définition, démonstration ou solution, suivant le cas, de la chose énoncée dans le traité dont il s'agit.

de mesure (**24 G.**) Ainsi, quand on dit qu'une toise carrée contient 36 pieds carrés, il faut entendre que l'unité de mesure est le pied carré et que cette unité est contenue 36 fois dans la toise carrée, la toise linéaire étant de 6 pieds, et $6 \times 6 = 36$. De même, si la toise cubique, contient 216 pieds cubes, c'est que le pied cube est dans ce cas l'unité prise pour mesure et que cette unité est contenue 216 fois dans la toise, laquelle étant de 6 pieds linéaires, son volume est (**1018 G.**) $6 \times 6 \times 6 = 216$; et si le mètre cubique contient 1000 décimètres cubes, c'est que l'unité de mesure est le déci-mètre et que $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

(**3**) L'unité de mesure qu'il convient d'employer est d'ordinaire le carré ou le cube (suivant le cas) dont le côté est (**333** et **1014 G.**) l'unité linéaire qui a servi à établir les dimensions linéaires de la figure à estimer ; mais il est clair que rien n'empêche d'estimer en mètres ou en verges carrés la surface d'une figure dont les dimensions seraient exprimées en pieds ou en pouces, etc. ; et de même il sera indifférent d'exprimer en pieds cubes, en mètres ou en toises, etc., le contenu d'un corps ou solide dont les dimensions linéaires seraient données en verges, en pieds ou en pouces, etc. ; faisant attention seulement aux réductions nécessaires pour traduire les éléments donnés en éléments d'un autre nom, c'est-à-dire, d'une valeur différente.

(**4**) La formule de l'auteur, pour trouver d'un trait, ou par décomposition, le volume d'un corps quelconque, est comme suit :

" *A la somme des surfaces des bases ou extrémités opposées et parallèles du corps à évaluer, ou de l'une, quelconque, de ses tranches composantes, ajouter quatre fois la surface d'une section parallèle à ces bases et située à mi-chemin entre elles, et multiplier ensuite la somme de ces surfaces par la sixième partie de la hauteur ou longueur du solide.* "

(**5**) Le nouveau système ne comporte donc que le seule toisé de certaines surfaces et sections du corps sous considération, puisque ce qu'il reste à faire pour arriver au volume proposé ne consiste qu'en une simple addition de ces surfaces et la multiplication de leur somme par la hauteur ou longueur du solide, pour prendre ensuite la sixième paroi du résultat.

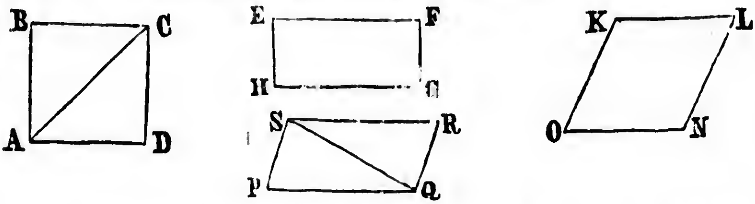
(**6**) Mais on a souvent à évaluer une surface indépendemment de toute considération ayant trait au volume du corps dont cette surface forme la paroi totale ou partielle.

Pour ces diverses raisons, il convient donc de s'arrêter tout d'abord au

TOISÉ DES SURFACES.

PROBLÈME I.

Déterminer la surface d'un carré, rectangle, losange, rhombe ou parallélogramme quelconque [1]



(7) **REGLE I.** *Multipliez la base* (**182 G.**) *par la hauteur* (**180 G.**) *et le produit sera la surface voulue* (**333** et **341 G.**)

Ex. 1. Quelle est la surface d'un carré dont le côté mesure 204.3 pieds ? **Rep.** 41738.49 pieds carrés.

2. Quel est le nombre de *carrés* (le *carré* est de $10 \times 10 = 100$ pieds carrés) dans un plancher, plafond, colombage, lambris, couverture, etc. rectangulaire, dont la longueur $= 60$ pieds et la largeur 35 pieds ? **Rep.** 21.

3. Quelle est la superficie d'un parallèlogramme dont la base égale 12.25 et la hauteur 8.5 ? **Rep.** 104.125.

4. Combien de verges carrées de peinturage, dans un rectangle dont la base est de 66.3 pieds et la hauteur 33.3 pieds ? **Rep.** 245.31.

5. Déterminer la superficie d'une planche rectangulaire dont la longueur est $12\frac{1}{2}$ pieds, et la largeur 9 pouces ? **Rep.** $9\frac{3}{8}$ p. c.

---

1. Voir les faces composantes et les sections ou coupes parallèles des prismes et autres modèles du *tableau*. Ces figures se rencontrent partout dans la pratique du mesureur, géomètre, arpenteur, toiseur, etc. ; ainsi, le parquet, plancher, ou plafond, ou l'un des pans d'un appartement ou d'une pièce quelconque sera d'ordinaire un carré ou un rectangle. Il en sera de même d'une porte ou d'une fenêtre dont une partie au moins sera rectangulaire, et l'on retrouvera encore cette figure dans la surface développée d'une joue de porte, de fenêtre ou de toute autre ouverture qui serait cintrée sans être ébrasée ; ainsi que dans le développement du pourtour d'une pièce ou d'un appartement quelconque dont le plan serait un cercle ou tout autre figure curviligne et dont il sera toujours facile d'obtenir avec assez d'exactitude les dimensions curvilignes à l'aide d'un ruban, si la surface à estimer est convexe, ou au moyen d'une tringle assez mince pour pouvoir s'ajuster à la surface concave à estimer. Pour ce qui est du parallèlogramme oblique-angle, on rencontrera souvent de ces surfaces à l'endroit de deux courses superposées d'escaliers de même inclinaison. Les subdivisions des territoires en cantons, lots et parcelles, affectent aussi pour la plupart des figures de cette sorte.

6. On demande le nombre de verges carrées de tapisserie nécessaire pour couvrir un parallélogramme, dont la base est de 37 pieds, et la hauteur de 5 pieds 3 pouces ? **Rep.** $21\frac{7}{12}$.

7. Combien de pieds carrés de vitrage dans une fenêtre rectangulaire ayant 75 pouces en hauteur sur $37\frac{1}{2}$ pouces en largeur ? **Rep.** $75 \times 37\frac{1}{2} \div 144 = 19$ pieds carrés $76\frac{1}{2}$ pouces carrés $= 19.\frac{76.5}{144} = 19.53125$ ou $6'.3'' \times 3'.1\frac{1}{2}'' = 19.6\frac{3}{8} = 19.\frac{6.375}{12} = 19\frac{51}{96} = 19.53$ ou $19\frac{1}{2}$ p. c. à peu près.

8. Combien de pouces carrés de dorure faudra-t-il pour couvrir une surface dont la longueur est de 3 pieds 3 pouces et la largeur développée ou périmètre de 13 pouces ? **Rep.** 507.

9. Quel est le nombre de pieds superficiels dans l'ensemble des moulures d'une corniche en pierre, en bois ou en plâtre, etc., dont la longueur est de 60 pieds 7 pouces et la largeur développée ou contour de 3 pieds $3\frac{1}{2}$ pouces ? **Rep.** $199\frac{5}{12}$ (à très près) p. s.

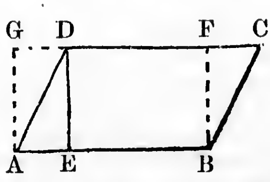
REM. Ces largeurs développées, contours ou périmètres, s'obtiennent au moyen d'un fil ou ruban que l'on ploye autour des diverses moulures, dans une direction perpendiculaire (**996, 998 G.**) à leur longueur.

10. On demande le nombre de verges carrées de vernis sur une porte dont la hauteur est de $7\frac{1}{2}$ pieds et la largeur développée (on mesure autour de toutes les moulures, etc.) de 3 pieds 11 pouces ? **Rep.** 3 v. c. $2\frac{4.5}{12}$ p. c. $=$ 3 v. c. 2.375 p. c. $= 3.\frac{2.375}{9}$ v. c. $= 3.2639$ v. c., soit $3\frac{1}{4}$ v. c. à peu près.

11. Combien de mètres carrés dans une parcelle de terre ayant 113.75 mètres en longueur sur 10.5 mètres en largeur ? **Rep.** 1194.375.

12. Déterminer en arpents et perches carrés, la superficie d'une terre mesurant 40 arpents 5 perches en profondeur ou longueur, sur 3 arpents $7\frac{1}{2}$ perches de front ou largeur (10 perches linéaires formant un arpt. lin. et par conséquent 10×10 ou 100 perches carrées, un arpent carré). **Rep.** 151 arp. $87\frac{1}{2}$ perches.

(**8**) **REGLE II.** *Faites le produit de deux côtés adjacents du parallèlogramme, et multipliez ensuite ce produit par le sinus naturel de l'angle inclus.*



En effet, on a vu (**1231, 1° G.**) que quand R=1 la perpendiculaire DE du triangle rectangle AED est égale au produit de l'hypothénuse AD par le sinus de l'angle A ; mais DE est la hauteur du parallélogramme AC, et puisque surf. AC=AB × DE et que DE=AD × sin. A, il est clair alors que surf. AC=AB × AD × sin. A.

Ex 1. —Quelle est la surface d'un rhombe ou losange dont le côté est de 25 chaînes et l'angle inclus de 57° 33′. **Rep.** 25 × 25= 625, et 625 × .84386 (sin. nat. de 57° 33)=527.4125 chs. c.

(9) Pour résoudre ce même problème par logarithmes [1] où R = 10., on a (**1229**, 1° **G.**) R. sin. A : AD : DE ; d'où, DE= $\frac{AD \times \sin. A}{R}$; or, surf. AG=AB × DE et en substituant à DE, sa valeur $\frac{AD \times \sin. A}{R}$, on obtient pour surface AG, l'expression AB × $\frac{AD \times \sin. A}{R}$ ou ce qui est la même chose, surf. AG= $\frac{AB \times AD \times \sin. A}{R}$; c'est-à-dire qu'il faut *ajouter ensemble les logarithmes des deux côtés adjacents et le sinus logarithmique de l'angle inclus ; cette somme, diminuée du log. du rayon, sera le log. de la surface voulue.*

Log. surf. AG=	+ log. AB	25	1.397940
	+ log. AD	25	1.397940
	+ log. sin. A	57° 33′	9.926270
	− log. R		10
Log. surf. AG =		....	2.722150

Log. moindre suivant 2.722140=527.41 chs. ; la différence entre ce log. et le log. trouvé est 10, auquel ajoutant (**1286 G.**) deux zéros et divisant par 82, on a (à très près) 22 que l'on ajoute à la droite des chiffres 527.41 déjà trouvés, pour avoir comme auparavant, 527.4122.

Ex. 2 On demande la surface d'une terre dont les côtés sont respectivement de 40½ ar. et de 3 ar. 7½ per. et l'angle inclus 57° 33′.

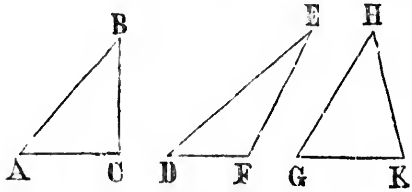
Rep..........	+ log. 40½ ar. ou 405 per............	2.607455
Log.surf.voulue=	+ log. 3 ar. 7½ per. ou 37.5 per.......	1.574031
	+ log. sin. angle inclus 57° 33′......	9.926270
	− log. R..........................	10.
Log. surf. voulue=	....	4.107756

Le log, moindre suivant .107549 correspond au nombre 1281 ; la différence entre ce log. et le log. trouvé est 207 ; ajoutant les 0 et divisant par la dif. (D) 338, on obtient 612426 que l'on écrit (**1286 G.**) à la droite du nombre déjà trouvé 1281 pour avoir 1281612426 ; mais la caractéristique du log. trouvé est 4, ce qui correspond (**1273 G.**) à 5 chiffres d'entiers ; donc le nombre voulu est 12816.12426 perches, ou 128 ar. 16.124 (ou 16⅛) perches, près.

1. Pour les tables de Logarithmes, voir le " Nouveau traité de Géométrie et de Trigonométrie, etc.," par le même auteur.

PROBLÈME II.

Trouver la surface d'un triangle. [1]



1ER CAS.

Quand la base et la hauteur sont données.

(**10**) **RÈGLE** *Multipliez la base par la hauteur et prenez la moitié du produit. Ou, multipliez l'une de ces dimensions par la moitié de l'autre*, (**344** ou **348 G.**).

Ex. 1. Quelle est la surface d'un triangle dont la base est 625 et la hauteur 260 ? **Rep.** 162500.

2. Combien de verges carrées d'enduits dans une surface triangulaire dont la base est 40 pieds et la hauteur 30 pieds ? **Rep.** $66\frac{2}{3}$.

3. Quel est le nombre de mètres carrés dans un terrain triangulaire, dont la base mesure 30 mètres 7 déci-mètres, et la hauteur 17 mètres 39 centimètres ? **Rep.** La surface voulue= 30.7 mètres × 17.39 mètres = 266.9365 m. c.

4. Combien faut-il de *carrés* de lambris pour couvrir un pignon dont la base est de 39 pieds 9 pouces et la hauteur de 23 pieds 4 pouces ? **Rep.** $463\frac{3}{4}$ p. c.=4 carrés $63\frac{3}{4}$ p. c.

5. Déterminer le nombre de carrés de toiture en chaume, tuile, ardoise, bardeau, zinc, plomb, cuivre ou autre metal, etc., dans une croupe dont la base est de 65.4 pieds et la hauteur de 37.3 pieds ? **Rep.** 12 carrés 19.71 p. c.

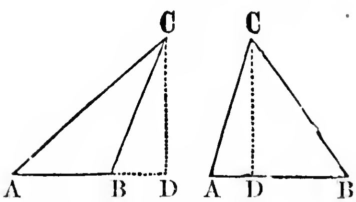
---

1. Voir les faces composantes ou limitatives des pyramides et autres modèles du *Tableau*, et les sections ou coupes parallèles telles qu'indiquées par le trait à mi-chemin entre les bases ou faces parallèles. Le triangle, comme le parallélogramme, se rencontre fort souvent dans la pratique du mesureur, etc. Les pignons d'un édifice, les croupes d'un toit, les côtés ou joues d'une lucarne, etc., affectent cette sorte de figure ; et il n'est pas rare non plus d'avoir à déterminer la surface d'un terrain triangulaire.

2ÈME CAS.

Quand on a deux côtés de l'angle inclus.

(**11**) **REGLE.** *Faites le produit continu* (**41 G.**) *des deux côtés donnés et du sinus nat.* [1] *de l'angle inclus ; la moitié de ce produit sera la surface voulue.*



On a (**1231.** 1° **G.**) comme dans le cas (**8. T.**) du parallélogramme, CD $=$ AC $\times$ sin. A ou BC $\times$ sin. B ; or, surface ACB $= \frac{AB \times CD}{2}$ et puisque CD $=$ AC $\times$ sin. A ou BC $\times$ sin. B, on obtient pour surf. du triangle l'expression $\frac{1}{2}$ (AB $\times$ AC $\times$ sin. A ou $\frac{1}{2}$ (AB $\times$ BC $\times$ sin. B).

Ex. 1. Quelle est la surface d'un triangle dont deux côtés valent 30 et 40 mètres et l'angle inclus 30° ? **Rep.** 300 m. c.

2. Déterminer la surface d'un triangle dont un côté est de 45 verges, un autre côté 37 verges et l'angle inclus 60° ? **Rep.** 720.9661.

3. Les autres données restant les mêmes, déterminer la surface par un angle inclus $=$ 45° ? **Rep.** 588.6664.

(**12**) **Par Logarithmes.** *Ajoutez ensemble les logarithmes des deux côtés et le sinus logarithmique de leur angle inclus ; de cette somme soustrayez* 10, *log. du rayon, et le reste sera le log. du double de la surface du triangle.*

Car, (**G. 1229,** 1°) R : sin. A : : AC : AD ou R : sin. B : : BC : CD ;

d'où, $CD = \frac{AC \times \text{sin. } A}{R} = \frac{BC \times \text{sin. } B}{R}$, et comme surf. ABC $=$ AB $\times$ CD,

on a surf. $ABC = \frac{AB \times AC \times \text{sin. } A}{R} = \frac{AB \times BC \times \text{sin. } B}{R}$.

Ex. 1. On demande la surface d'un triangle dont les côtés sont AB $=$ 125.81, AC $=$ 57.65, et l'angle inclus A $=$ 57°25′ ?

---

1. Pour les tables de sinus naturels, etc., voir le " Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie, rectiligne et sphérique, etc." par le même auteur.

Rep....... Log. 2 ABC=	+ log. AB	125.81....................	2.099715
	+ log. AC	57.65....................	1.760799
	+ log. sin. A	57°25′....................	9.925626
	—log. R	....	10.
Log. 2 ABC=		....	3.786140

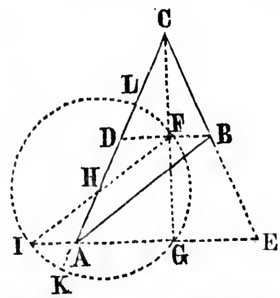
Et 2 ABC=6111.4, ou ABC=3055.7 = surface demaddée.

2. Combien de verges carrées dans un triangle dont les côtés sont 25 pieds et 21.25 pieds et l'angle inclus 45° ? **Rep.** 20.8694.

3ÈME CAS.

Quand les trois côtés sont connus.

(13) REGLE I. *Ajoutez ensemble les trois côtés et prenez la moitié de leur somme. De cette demi-somme soustrayez séparément chacun des côtés. Faites le produit continu de la demi-somme et des trois restes. Ce produit sera le carré de la surface du triangle, et la racine carrée* [1] *de ce produit la surface voulue.*



Soit ACB le triangle. Prenez CD égal au côté CB et menez DB; menez AE parallèle à DB, pour rencontrer en E le côté CB prolongé: CE sera alors égal à CA. Menez CFG perpendiculaire à DB et par conséquent aussi à AE qui est parallèle à DB; CFG bissectera DB, AE en F et G. Menez, parallèle à AB, FHI qui rencontrera CA en H et EA prolongé en I. Enfin, du centre H, avec un rayon FH, décrivez la circonférence d'un cercle; cette circonférence rencontrera en K le prolongement de CA, passera par le point I, à cause de AI=FB=DF (d'où, HI=HF), et passera aussi (**444 G.**) par le point G, parce que FGI est un angle droit.

Maintenant, puisque HA = HD = $\frac{1}{2}$AD et CD=CB=$\frac{1}{2}$CD + $\frac{1}{2}$CB, il est clair que CH est égal à la demi-somme des côtés AC, BC du triangle; c'est-à-dire CH=$\frac{1}{2}$CA + $\frac{1}{2}$CB; et puisque HK=$\frac{1}{2}$IF=$\frac{1}{2}$AB, il suit que CK=$\frac{1}{2}$AC + $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$S, si l'on représente par S la somme des côtés.

De plus, HK=HI=$\frac{1}{2}$IF=$\frac{1}{2}$AB, ou KL=AB; d'où, CL=CK — KL=$\frac{1}{2}$S — AB, AK=CK — AC=$\frac{1}{2}$S — AC, et AL=DK=CK — CD

1. Voir les tables à la fin de ce traité.

$= \frac{1}{2}S - BC$. Or, $AG \times CG$ = surf. ACE, et $AG \times FG$ = surf. ABE, d'où $AG \times CF$ = surf. ACB; et par triangles semblables, $AG : CG :: DF : CF$, ou comme $AI : CF$; donc $AG \times CF$ (surf. de ACB) $= CG \times DF = CG \times AI$; donc $\overline{AG \times CF} \times \overline{CG \times AI}$ ou, ce qui est la même chose, $AG \times CF \times CG \times AI$ est égal au carré de la surf. ACB.

Mais $CG \times CF =$ (**576 G.**) $CK \times CL = \frac{1}{2}S \times (\frac{1}{2}S - AB)$,

et $AG \times AI =$ (**572 G.**) $AK \times AL = (\frac{1}{2}S - AC) \times (\frac{1}{2}S - BC)$;

d'où, $AG \times CF \times CG \times AI = \frac{1}{2}S \times (\frac{1}{2}S - AB) \times (\frac{1}{2}S - AC) \times (\frac{1}{2}S - BC)$ = surf. ACB × surf. ACB = (surf. ACB)^2.

Ex. 1. Soit à trouver la surface d'un triangle dont les côtés sont 20, 30, et 40.

20	45	45	45
30	20	30	40
40	—	—	—
—	25=1er reste.	15=2ème reste.	5=3ème reste
2)90			
45=demi somme.			

Maintenant 45 × 25 × 15 + 5 = 84375.

La racine carrée de ce produit est 290.4737, la surface voulue.

2. Les trois côtés d'un triangle étant 24, 36, et 48; quelle en est la surface ? **Rep.** 418.282.

3. On demande la surface d'un triangle équilatéral dont le côté est 25 ? **Rep.** 270.632.

(14) Par Logarithmes. *Après avoir déterminé les trois restes, faites l'addition des logarithmes de la demi-somme et des trois restes; la demi-somme de ces quatre logarithmes répondra à la surface voulue.*

Ex. 1. Combien y a-t-il de verges carrées d'enduits dans une surface triangulaire dont les côtés sont de 30, 40, et 50 pieds ? **Rep.** 66⅔.

2. Les trois côtés d'une parcelle de terre mesurent 505.3, 330.7, et 402.5 mètres. Quelle en est la surface ?

505.3	619.25 — 505.3=113.95=1er reste.
330.7	619.25 — 330.7=288.55=2ème reste.
402.5	619.25 — 402.5=216.75=3ème reste.
2)1238.5	
619.25=demi-somme.	

+ log. demi-somme	619.25............	2.7918660
+ log. 1er reste	113.95............	2.0567143
+ log. 2ème reste	288.55............	2.4602211
+ log. 3ème reste	216.75............	2.3359591
		2)9.6447605
		4.82238025

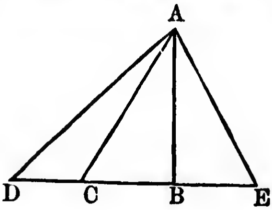
Ce log. correspond à 66432.447 qui est la surface demandée.

(15) Le même exemple par nombres naturels fera voir l'avantage qui résulte, dans le cas actuel, de l'emploi des logarithmes pour diminuer le travail; mais, de leur côté, les nombres naturels ont cet avantage sur les logarithmes, qu'en faisant entrer en compter toutes les décimales, avec l'addition même de zéros pour continuer au besoin la division ou l'extraction de la partie fractionnaire de la racine voulue, on peut porter la précision à tel dégré d'approximation que l'on voudra, tandis qu'on ne saurait avec exactitude donner à la réponse qu'on obtient par logarithmes, un plus grand nombre de chiffres que n'en contient la partie fractionnaire du log. lui-même, comme le fait voir d'ailleurs l'inexactitude du dernier chiffre (7) de la réponse ainsi obtenue.

619.25	70563.53 75	20361108.7456 25
113.95	2 88.55	216 75
3096 25	352817 68 75	101805543 7281 25
55732 5	3528176 87 5	1425277612 1937 5
185775	56450830 00	12216665247 3750
61925	564508300 0	20361108745 625
61925	1411270750	407222174912 50
70563.53 75	20361108.74 56 25	6)4413270320.61 4218 75
		36

Preuve.		
66432.4493 +	12,6) 813	√=66432,449304 +
66432.4493 +	756	
199297 3479	132,4) 5727	
5978920 437	5296	
26572979 72	1328,3) 43103	
265729797 2	39849	
1328648986	13286,2) 325420	
1992973479	265724	
2657297972	132864,4) 5969661	
3985946958	5314576	
3985946958	1328648,4) 65508542	
4413270319.9970 7040 +	53145936	
	13286488,9)1236260618	
	1195784001	
	132864898,3) 4047661775	
	3985946949	
	1328648986,0,4)617148260000	

(16) REGLE II. *Prenez pour base du triangle donné quelconque* ADE, *son plus grand côté* DE ; *faites* (**578 G.**) DE : AD + AE :: AD—AE : DC, *différence des segments* BD, BE *de la base par la perpendiculaire* AB ; *alors,* (**367 G.**) BD$=\frac{1}{2}$DE + $\frac{1}{2}$DC *ou* BE$=\frac{1}{2}$DE—$\frac{1}{2}$DC ; *maintenant vous aurez* (**308 G.**) *la perpendiculaire ou hauteur* AB *du triangle*$=\sqrt{AD^2-BD^2}$ *ou, faites* (**1229 G.**, 1° alt. ou **1235 G.**) AD : sin. B (=R) :: BD : sin. BAD, *pour avoir ensuite* (**1231 G.**, 2°) AB = AD × cos. BAD, *quand* R=1, *c'est-à-dire, si vous opérez par nombres naturels, ou* AB$=\dfrac{AD \times \cos.\ BAD}{R}$ *si vous opérez par logarithmes, où log.* R=10. *Enfin vous aurez surf.* ADE$=\frac{1}{2}$(DE × AB).



Ex. Les données étant encore les mêmes que dans le dernier exemple ; on aura, d'après la règle :

AD=402.5　　AD=402.5　　DE=505.3 =base
+AE=330.7　　−AE=330.7　　÷ 2 =252.65=demi-base

=som. 733.2　　=dif.　71.8

DC=104.183178=dif. des segm.　　$\frac{1}{2}$DE=252.65
÷ 2= 52.091589=demi-dif.　　+ $\frac{1}{2}$DC= 52.091589

=seg.BD=304,741589

Sin. nat. trouvé=.7571220 correspond à 49° 12′ 40.0737″=BAD

DE : AD + AE :: AD—AE : BD − BE (ou DC)

505.3 : 733.2 :: 71.8 : 104.183178 + =DC

```
       733.2
        71.8
       -----
       58656
        7332
      51324
      ------
505.3) 52643.76 (104.183178 + [1]
       5053
       ----
```

(1) C'est parce que ce quotient doit entrer dans le calcul à faire pour trouver le sinus de l'angle BAD qu'il est nécessaire de porter les décimales assez loin pour s'assurer d'une exactitude suffisante dans les derniers chiffres de ce sinus.

21137
20212
9256
5053
42030
40424
16060
15159
9010
5053
39570
35371
41990

AD :R:: BD :sin. BAD
402.5:1 ::304.741589: .7571220—
28175
22991
20125
28665
28175
4908
4025
8839
8050
7890

Sin. nat. trouvé=.7571220
Sin. moindre suiv.=.7569951=49°12′

Différence= 1269
Dif. pour 60″= 1900
1900 : 60″ :: 1269 : 40.0737″
6
190)7614
760
1400

Dif. de cos. pour 60″=2202
60″ : 2202 : 40.0737″ : 14707
2202
801474
801474
801474
÷6)882422
=147070

AB=AD × cos. nat. BAD
BAD=49° 12′ 40.0737″

Cos. nat. 49° 12′ = .6534206
Dif. pour 40.07″ = — 14707

Cos. nat. de 49° 12′ 40.0737″ .65327353
× AD 402.5

326636765
130654706
261309412

AD × cos. nat. BAD=AB=262.942595825
× DE 505.3

788827787475
1314712979126
1314712979125

AB × DE = 2 surf. ADE= 132864893670З
½ AB.DE= 66432.44683 = surf. ADE.

(**17**) La surface trouvée d'après cette règle est de 66432.4468 mètres carrés. L'exactitude de ce résultat ne s'étend encore, comme on le voit, que jusqu'au 7ème chiffre, et il ne saurait en être autrement, puisque les sinus naturels dont on a fait usage et qui concourent, comme éléments, à la solution du problème, ne vont qu'à 7 chiffres, dont le dernier même est presque toujours trop fort ou trop faible suivant qu'il a été, ou non, augmenté d'une unité lorsque le chiffre suivant excède ou est moindre que 5.

(**18**) Remarquons ici que cet exemple, dont on vient de faire le calcul, de trois manières différentes, permet de comparer la somme de travail que requiert chaque mode de solution, et met en mesure de choisir au besoin, ou le moyen le plus expéditif (le premier) ou celui qui admet la plus grande précision (le second), ou celui qui ne comporte pas l'extraction d'une racine (le troisième).

(**19**) Il est à peine nécessaire de rappeler que ce problème, comme celui qui le précède, et comme ceux qui vont le suivre, peut aussi se résoudre au moyen d'une construction graphique qui permette d'établir à l'aide d'une échelle suffisamment subdivisée, la longueur ou valeur de la perpendiculaire AB en termes de la base ou des côtés et c'est là assez souvent le plus court moyen, quoi que non le plus précis, d'arriver au résultat voulu.

PROBLÈME III.

Trouver la surface d'un trapèze. (1)

(**20**) **REGLE.** *Faites* (**346 G.**) *la somme des deux côtés parallèles: multipliez cette somme par la hauteur ou largeur du trapèze, et la moitié de ce produit sera la surface voulue.*

(1) Voir les faces composantes (bases et faces latérales) et les sections ou coupes parallèles des prismoïdes et autres modèles du *tableau*. Le trapèze (**172 G**) s'offre assez souvent, dans la pratique, au calcul du mesureur, Ainsi, la tablette intérieure d'une fenêtre dont les joues ou côtés sont d'ordinaire ébrasés, présente la forme d'un trapèze; il en est de même du plafond d'une fenêtre, porte ou autre ouverture ébrasée; et il est clair aussi que la surface développée ABCD, (partie d'un anneau concentrique, voir les bases parallèles du cylindre évidé du *tableau* ainsi que les faces latérales des sections de sphère évidée), de la joue d'une ouverture cintrée en même temps qu'ébrasée peut encore être regardée comme une sorte de trapèze à bases parallèles curvilignes, mais dont on détermine également la superficie par la règle ici donnée,

Ex. 1. Dans un trapèze, les côtés parallèles sont $10\frac{1}{2}$ et $12\frac{1}{4}$ pieds, et la distance perpendiculaire entre ces côtés 3 pieds 2 pouces. Quelle est la surface ? **Rep.** $\frac{1}{2}(10\frac{1}{2}+12\frac{1}{4}) \times 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}(10.5+12.25) \times 3.166 = 11.375 \times 3.166 = 36.01325$ p. c.

2. On demande la surface d'une parcelle de terre dont les côtés parallèles mesurent respectivement 75 et 122 chaînons, et la perpendiculaire 154 chaînons ? **Rep.** 15169 chaînons c.

3. Combien y a-t-il de pieds carrés de surface dans une planche dont la longueur est de $12\frac{1}{2}$ pieds, la largeur à une extrémité 15 pouces et celle de l'autre extrémité 11 pouces ? **Rep.** $13\frac{6\frac{1}{2}}{12} = 13.541666+$

4. Combien de verges carrées dans un trapèze dont les côtés parallèles ssnt 240 et 320 pieds, et la hauteur 66 pieds ? **Rep.** $2053\frac{1}{3}$.

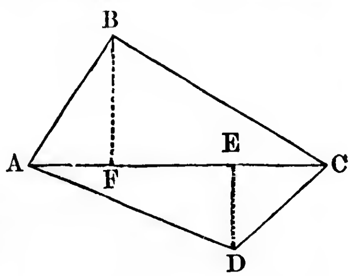
5. Les côtés parallèles d'un terrain sont 12.51 et 8.22 chaînes, et la perpendiculaire 5.15 chaînes; quelle est la surface en chaînes carrées ? **Rep.** 53.37975.

PROBLÈME IV.

Trouver la surface d'un quadrilatère [1]

(**21**) **REGLE.** *Multipliez* (**351 G**) *l'une quelconque des diagonales* (**173 G**) *du quadrilatère, par la demi-somme des perpendiculaires abaissés des angles opposés sur cette base commune.*

Ex. 1. Quelle est la surface d'un quadrilatère BD dont la diagonale AC est de 42 pieds, et les perpendiculaires BF = 18 et DF = 16 pieds ? **Rep.** 714 p. c.



2. Combien de toises carrées de pavé y a-t-il dans un quadrilatère dont la diagonale est de 65 pieds et les deux perpendiculaires 28 et $33\frac{1}{2}$ pieds ? **Rep.** 55.52083.

---

puisque cette figure n'est autre chose qu'un tronc ou partie d'anneau circulaire, et que le mode (**1145 G.**) d'arriver à la surface de cette figure est analogue à celui qui enseigne à déterminer la surface du trapèze proprement-dit. Le trapèze se retrouve encore souvent dans le parquet ou plafond d'un appartement dont deux côtés seulement sont parallèles, à l'endroit d'une toiture de lucarne, d'une rampe d'escalier, d'une toiture ou plafond de mansarde et les joues d'une fenêtre rectangulaire affectent aussi cette forme quand le plafond ou la tablette en est inclinée ou ébrasée. Enfin, on est appelé très souvent à déterminer l'aire d'un terrain en forme de trapèze.

1. Voir les bases, faces latérales, sections ou corps parallèles de certains modèles du *tableau*.

3. Combien y a-t-il de mètres carrés de surface dans un terrain quadrangulaire dont une des diagonoles est de 64 mètres, et les distances perpendiculaires de cette diagonale aux deux angles opposés, 28 et 32 mètres ? **Rep**. 1920 m. c.

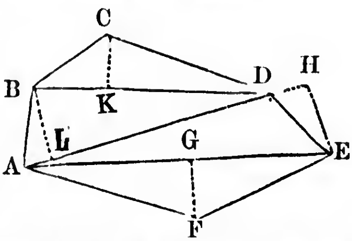
4. Déterminer le nombre de *carrés* de plancheiage qu'il faut pour couvrir un espace quadrilatère, dont la diagonale est de 108 pieds 6 pouces, et les perpendiculaires 56 pieds 3 pouces, et 60 pieds 9 pouces ? **Rep**. 63 *carrés*, 47$\frac{3}{12}$ p. c.

5. On demande à établir le nombre d'arpents dans une terre de quatre côtés dont une des diagonales mesure 70.5 perches, et les perpendiculaires 26.5 et 30.2 perches ? **Rep** 19 ar, 98.675 per.

PROBLÈME V.

Trouver la surface d'un polygone irrégulier. [1]

(22) REGLE *Mesurez les diagonales qui diviseront le polygone donné en quadrilatères et triangles. Déterminez séparément les surfaces de ces figures composantes ; leur somme sera la surface voulue.*



Ex. 1. Déterminez la surface du polygone BE, dans lequel BD= 18½, CK = 12$\frac{4}{5}$, AD=27½, BL=9.5, EH=14, AE=40, et FG=8.

Rep. ½ (BD × CK)=½ (18.5 × 12.8)=118.40=surf. BCD, ½ (BL + EH)=½(9.5 + 14)=11.75 et surface quadrilatère ABDE=AD × ½(BL + EH)=27.5 × 11.75=323.125, surface AEF=AE × ½FG=40 × 4=160. Surf. ABCDEF=118.40+323.125+160=601.525.

2. On demande combien il y a d'acres (l'acre est de 100,000 chaînons carrés) dans un terrain polygone BE dont les diagonales BD, AD et AE mesurent respectivement 13 chaînes (la chaîne linéaire est de 100 chaînons),—33 chaînons, 13 chaînes 99 chaînons, et 14 chaînes 13 chaînons, et dont les perpendiculaires CK = 173 chaînons, BL = 2 chaînes, EH = 2½ chaînes et FG 3¾ chaînes.

Rep. BD × CK=1333 × 173=230609 ÷ 2=115304½=surf. BCD.
AD × BL=1399 × 200=279800 ÷ 2=139900 =surf. ABD.
AD × EH=1399 × 220=307780 ÷ 2=153890 =surf. ADE.
AE × FG=1413 × 375=529875 ÷ 2=264937½=surf. AEF.

2)13.48064 6.74032 =surf. ABCDEF.
6.74032 c-à-d. 6 acres et 74032 ch. c.

---

1. Voir les bases, faces latérales, sections ou coupes parallèles de certains modèles du *tableau*.

ou 6 acres 2 vergées *(roods)* et 24032 chaînons (la vergée étant le quart de l'acre, c'est-à-dire, 100000 ÷ 4 = 25000 chaînons)

ou 6 acres, 2 vergées, 38 perches, et 282 chaînons (la perche linéaire étant le quart d'une chaîne, c'est-à-dire, 25 chaînons, et la perche carrée par conséquent = 25 × 25 = 625 chaînons carrés.[1]

PROBLÈME VI.

Déterminer la surface d'une figure longue et irrégulière bornée d'un côté par une ligne droite.[2]

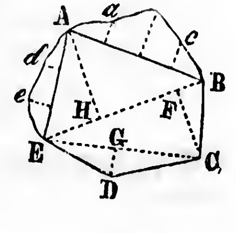
(23) **REGLE.** **1°** *Mesurez, à chaque extrémité de la ligne droite, la largeur perpendiculaire de la figure; mesurez aussi cette largeur à plusieurs points intermédiaires également éloignés l'un de l'autre.*

2° *A la demi-somme des largeurs extrêmes ajoutez la somme des largeurs intermédiaires; multipliez alors la somme ainsi obtenue par l'une des parties égales de la ligne de base; le produit sera la surface voulue à très près.*

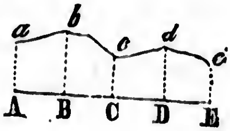
---

1. La chaîne de Gunter est de 66 pieds anglais, divisée en 100 chaînons, dont chacun est en conséquence = 66 ÷ 100 = 7.92 pouces anglais. L'acre équivaut à 1 chaîne × 10 chaînes = 10 chaînes carrées = 4 perches × 40 perches = 160 perches carrées = 100 chaînons × 1000 chaînons = 100000 chaînons carrés. L'avantage de cette division de la chaîne de Gunter en 100 parties consiste en ceci que toutes les dimensions qu'elle sert à établir, sont immédiatement applicables et sans réduction au calcul décimal. L'opération faite, on sépare 5 décimales, les chiffres restants à gauche étant alors des acres, puisqu'il y a 100000 chaînons dans l'acre et que séparer 5 chiffres équivaut à diviser par 100000. Il est clair aussi que pour les vergées on n'a qu'à multiplier d'abord le reste par 4 pour séparer encore 5 chiffres, ce qui équivaut à diviser de suite par 25000 (nombre de chaînons dans une vergée) et est de beaucoup plus expéditif. Pour les perches, en multiplie ensuite le second reste par 40, pour séparer encore 5 chiffres, puisque la perche est la 40ème partie de la vergée; ou si l'on voulait négliger les vergées, on multiplierait de suite le premier reste par 160 (4 × 40) dont on retrancherait de même 5 chiffres. Le dernier reste .45120 est évidemment une fraction de perche, c'est-à-dire, $\frac{45120}{100000}$ de perche; or la perche carrée étant de 625 chaînons, $\frac{1}{100000}$ de 625 = .00625 et ce nombre multiplié par le numérateur .45120 donne les 282 chaînons de la réponse; c'est-à-dire que pour les mailles on multiplie tout simplement le dernier reste par 625 et l'on sépare encore 5 décimales.

2. Les terrains qui avoisinent et sont bornés d'un côté par les sinuosités d'un chemin ou d'une rivière, etc., présentent souvent au calcul des figures de cette sorte; ou, après avoir déterminé par la méthode du dernier problème la superficie du polygone rectiligne ABCDE qui fait partie du pol. irrégulier A*b*BCDE*ed*A, on se servira de la méthode du problème actuel pour obtenir les parties secondaires et irrégulières A*abc*B, A*de*E.



Soit AE*ea* une figure irrégulière ayant pour base la droite AE. Aux points A, B, C, D et E, également éloignés l'un de l'autre, élevez les perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* et désignez ces perpendiculaires par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.



Alors (**325 G**) la surface du trapèze AB *ba* $= \frac{a+b}{2} \times$ AB,

la surface du trapèze BC *cb* $= \frac{b+c}{2} \times$ BC,

la surface du trapèze CD *dc* $= \frac{c+d}{2} \times$ CD,

et la surface du trapèze DE *ed* $= \frac{e+d}{2} \times$ DE ;

donc, leur somme, ou la surface de la figure entière est égale à

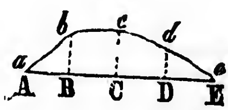
$$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+e}{2}\right) \times \text{AB},$$

puisque AB, BC, etc., sont egales entre elles. Or, cette somme est égale à

$$\left(\frac{a}{2} + b + c + d \times \frac{e}{2}\right) + \text{AB}.$$

expression qui s'accorde avec l'énoncé de la règle.

(**24**) Si A*a* devient très petit, on n'en aura pas moins surf. AB*ba* $= \frac{a+b}{2} \times$ AB et si *a* et A se confondent en un même point, ou que le trapèze AB*ba* devienne le triangle AB*b* on aura $\frac{a+b}{2} = \frac{b}{2}$; dans ce cas il est clair que l'expression pour la surface de la figure AE*edb*A devient $\left(\frac{b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+e}{2}\right) \times$ AB,



ou, ce qui est la même chose, $(b+c+d+\frac{1}{2}e) \times$ AB. Et si E*e* devient aussi, $=o$, l'expression pour la surface AE*db*A prendra la forme $(b+c+d) \times$ AB.

Ex. 1. Les largeurs d'une figure irrégulière en 5 endroits également éloignés l'un de l'autre, étant 8.2, 7.4, 9.2, 10.2, et 8.6 et la longueur de la base = 40 ; quelle est la surface ?

Une des largeurs extrêmes	= 8.2
L'autre largeur extrême	= 8.6
Somme des largeurs ext.	=16.8
Demi-somme	= 8.4
1e Largeur intermédiaire	= 7.4
2e Largeur intermédiaire	= 9.2
3e Largeur intermédiaire	=10.2
Somme des largeurs.	=35.2

La base entière	= 40
Une des parties égales	=40÷4=10
Somme des largeurs	=35.2
Multipliée par	10
= surface voulue	=352

2. La longueur d'une figure irrégulière étant de 84 mètres et les largeurs, en six endroits équidistants, 17.4, 20.6, 14.2, 16.5, 20.1, et 24.4 mètres ; on demande la surface ? **Rep.** 1550.64 m. c.

3. La longueur d'une lisière de terre est de 125 perches et sa largeur prise en 15 endroits différents et équidistants, est de 5.2, 4.6, 7.2, 8.3, 9.4, 8.1, 7.3, 7.9, 6.6, 7.2, 7.3, 8.4, 7.4, 6.5, et 5.8 perches. Quelle en est le contenu ?

Rep. La somme des demi-largeurs extrêmes et des largeurs intermédiaires=101.7, la longeur 125÷14=8.92857 et 8.92857 × 101.7 =908.0356 perches carrées. [1]

(25) REM. Certains auteurs enseignent à déterminer la surface de la figure de ce problème en faisant le produit de la base entière AE par la moyenne des largeurs que l'on obtient en ajoutant ensemble toutes ces largeurs pour diviser ensuite leur somme par le nombre de ces largeurs. Cette règle est fautive, et cela, d'autant plus qu'il y a un moindre nombre de hauteurs ou de divisions dans la figure à estimer. L'erreur de cette méthode, dans le cas ou il n'y aurait que trois parties composantes et par conséquent quatre hau-

1. *Si la perche linéaire dont il s'agit ici est de* 18 *pieds français*, c'est-à-dire, le dixième d'un arpent, la surface qu'on vient de trouver équivaudra à 9 arpents carrés, 8.0356 perches carrées, car, comme on l'a déjà fait remarquer, l'arpent carré est de 10 × 10 perches = 100 perches carrées, et comme la perche carrée est de 18 × 18 = 324 pieds carrés (ou l'arpent carré de 324 × 100 = 32400 pieds carrés) on réduira au besoin la décimale .0356 de perche carrée en pieds carrés en multipliant par 324, ce qui donne dans cet exemple 11.53 pieds carrés. *Si*, au contraire *la perche linéaire était de* 16½ *pieds anglais*, c'est-à-dire celle de la chaîne de Gunter, on aurait en divisant par 160, 5 acres, 108.0356 perches, et si l'on voulait ensuite traduire en pieds carrés, la décimale de perche, il est clair que la perche carrée étant de 16½ × 16½ = 272.25 pieds carrés (ou l'acre = 272.25 × 160 ou 66 × 660 pieds = 43560 pieds carrés) il n'y aurait qu'à multiplier .0356 par 272.25 pour avoir 9.69 pieds carrés anglais.

teurs ou largeurs, pourrait aller jusqu'à 25 pour cent en défaut de la surface exacte. Elle donne pour largeur moyenne, dans cet exemple, $107.2 \div 15 = 7.1466$ et $7.1466 \times 125 = 893.325$ perches carrées au lieu de 908.035 ; soit un défaut de près de 15 perches carrées de terrain.

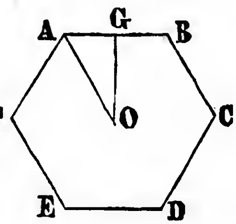
PROBLÈME VII.

Trouver la surface d'un polygone régulier. [1]

(26) REGLE I. *Multipliez* **(663 G.)** *le périmètre du polygone par son demi-rayon droit, et le produit sera la surface voulue.*

REM. Si le polygone n'est connu que par son côté, déterminez en d'abord le rayon droit de la manière suivante : Divisez 360° par le nombre des côtés du polygone proposé, et le quotient sera **(620 G.)** l'angle au centre ; c'est-à-dire, l'angle sous-tendu par l'un des côtés égaux. Maintenant les rayons droit et oblique du polygone forment avec le demi-côté un triangle rectangle dans lequel on connaît la base, c'est-à-dire le demi-côté, et l'angle aigu opposé, c'est-à-dire, le demi-angle au centre, pour trouver la perpendiculaire ou le rayon droit du polygone.

Ex. 1. Soit à trouver l'aire d'un hexagone régulier dont le côté est de 20 pieds ?



Rep. $360° \div 6 = 60$ et $60 \div 2 = 30°$ angle AOG, moitié de AOB. On a aussi $OAG = 90° - AOG = 60°$ et $AG = 10$; alors **(1235 G.)** sin. AOG : AG :: sin. OAG : OG ; d'où,

Sin. AOG	30°	........................co np. ar. log.	0.301030
est à sin. OAG	60°	....	9.937531
comme AG	10	....	1.000000
est à OG	17.32052	....	1.238561

Maintenant comme il y a 6 côtés, chacun égal à 20, on aura le périmètre $= 20 \times 6 = 120$ et la surf. $= 120 \times \frac{1}{2}(17.32052)$ ou ce qui est la même chose $= 17.32052 \times \frac{1}{2}(120) = 17.32052 \times 60 = 1039.23120$ p. c.

Ex. 2. Quel est le contenu superficiel d'un octogone dont le côté est 20 ? **Rep.** 1931.368.

---

1. Voir les bases parallèles des prismes droits et prismoïdes du *Tableau* et leurs sections ou coupes parallèles.

Car l'angle au centre = $360° \div 8 = 45°$ dont la moitié $22° 30'$ est l'angle AOG adjacent au rayon droit, et son complément OAG en conséquence$=90°-22° 30'=67°.30$; or on a (**1231**, 3° **G.**) OG=AG × tang. nat. OAG=10 × 2.41421=24.41421 et surf. =24 . 41421 × 80 (demi-pér.)=1931 . 368.

3. On demande l'aire d'un nonagone dont le côté mesure 8 pieds et la perpendiculaire menée du centre=10.99 pieds ? **Rep.** 395 .64 p. c.

4. Trouver l'aire d'un heptagone dont le côté = 19 . 38 et le rayon droit=28 ? **Rep.** 1899.24.

5. Le côté d'un pentagone=25 mètres et la distance du côté au centre=17 . 2 mètres ; quel est le contenu ? **Rep** 1075 m. c.

(**27**) A l'aide de cette règle, on obtient aisément l'aire d'un polygone quelconque, [1] c'est-à-dire d'un polygone d'un nombre quelconque de côtés. Ayant donc calculé et disposé sous la forme du tableau suivant, les aires relatives des divers polygones ayant pour côté l'unité ou 1 ; savoir :

Nom.	*Rayon du cercle circons.*	*Côtés.*	*Rayon du cercle ins.*	*Aire.*	*L'angle* OAB.
Triangle.....	0.5773503	3	0.2886751	0.4330127	30°
Carré........	0.7071068	4	0.5000000	1.0000000	45
Pentagone....	0.8506508	5	0.6881910	1.7204774	54
Hexagone ...	1.0000000	6	0.8660254	2.5980762	60
Heptagone ..	1.1523824	7	1.0382607	3.6339124	$64\frac{2}{7}$
Octogone [2]...	1.3065628	8	1.2071068	4.8284271	$67\frac{1}{2}$
Ennéagone...	1.4619022	9	1.3737387	6.1818242	70
Décagone....	1.6180340	10	1.5388418	7.6942088	72
Undécagone..	1.7747324	11	1.7028436	9.3656399	$73\frac{7}{11}$
Dodécagone..	1.9318517	12	1.8660254	11.1961524	75

Et parce que (**556 G.**) les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, l'aire d'un polygone donné quelconque aura au carré de son côté le même rapport que l'aire du polygone de même nom et dont le côté est 1, au carré de l'unité ; d'où, on a :

(**28**) **REGLE II.** *Carrez le côté du polygone donné ; multipliez alors ce carré par l'aire du polygone de même nom dont le côté est* 1 *: le produit sera la surface voulue.*

---

1. Voir les bases et sections parallèles des prismes et prismoïdes, etc., du *Tableau.*

2. Dans le cas de l'octogone régulier ou même symétrique on obtient de suite la surface en retranchant du carré du double rayon droit ou apothème sur l'un des côtés, le carré de l'autre côté, comme on le verra plus tard dans le toisé des solides.

Ex. 1. Quelle est la surface d'un hexagone régulier, dont le côté est 20 ?

Rep. 20^2 =400, l'aire de l'hexagone du tableau=2.5980762, et 2.5980762 × 400=1039.2304800, comme auparavant.

2. Déterminer le contenu superficiel d'un pentagone dont le côté est de 25 verges ? **Rep.** 1075.298375 v. c.

3. Le côté d'un décagone mesure 20 mètres ; quelle est l'aire ? **Rep.** 3077.68352 m. c.

4. Trouver la superficie d'un dodécagone dont le côté est 6 ? **Rep.** 403.0614864.

5. Le côté d'un terrain en forme de triangle équilatéral mesure 3 arpents 7 perches et 6 pieds ; quel en est le contenu ?

Rep. $37\frac{1}{3}$ per. × $37\frac{1}{3}$ per. = $1393\frac{7}{9}$ ou 1393.77777, × 0.4330127 = 603.5234787 ou 6 arpents carrés, $3\frac{1}{2}$ perches carrées à peu près.

PROBLÈME VIII.

Trouver la circonférence d'un cercle[1] dont on a le diamètre, ou le diamètre d'un cercle dont on a la circonférence.

(29) REGLE. *Multipliez* (**686 G.**) *le diamètre par* 3.1416, *et le produit sera la circonférence ; ou divisez* (**687 G.**) *la circonférence par* 3.1416, *et le quotient sera le diamètre.*

Ex. 1. Quelle est la circonférence d'un cercle dont le diamètre est 25 ? **Rep.** 78.54.

2. Si le diamètre de la terre est de 7921 milles, quelle en est la circonférence ? **Rep.** 24884.6136.

3. Déterminer le diamètre, dont la circonférence est 11652.1944 ? **Rep.** 3709.

4. On demande la circonférence, quand le diamètre est de 17 mètres ? **Rep.** 53.4072.

5. On donne la circonférence d'un cercle = 354 pieds pour en déterminer le diamètre ? **Rep.** 112.681.

---

1 Voir les bases et sections ou coupes parallèles des cylindres, cônes et troncs de cônes droits, troncs et segment de sphères, etc., parmi les modèles du *Tableau*.

REM. Le rapport 7 : 22 donnerait pour ce diamètre 112.636. ce dernier résultat est trop faible de $\frac{45}{1000}$ d'une unité ou de $\frac{4}{10000}$ du tout, et met en mesure de juger de l'eactitude relative des deux rapports.

PROBLÈME IX.

Trouver la surface d'un cercle.

(30) REGLE I. *Multipliez* (**431 G.**) *la circonférence par la moitié du rayon.*

REGLE II. *Multipliez* (**1024 G.**) *le carré du rayon par* 3.1416.

REGLE III. *Multipliez* (dém. de **684 G.**) *le carré du diamètre par* .7854.

Ex. 1. Quelle est la surface d'un cercle dont le diamètre est 10 ?

Rep. 78.54.

Si la diamètre était 100, la surface serait.............. 7854

Si le diamètre était 1000, la surface serait.............. 785400

2. On a le diamètre 7 et la circonférence 21.9912 pour trouver la superficie du cercle ? **Rep.** 38.4846.

3. Combien y a-t-il de verges carrées dans un cercle dont le diamètre est de $3\frac{1}{2}$ pieds ? **Rep.** 1.069016.

4. Le diamètre étant 7, quelle est l'aire du cercle ? **Rep.** 38.4846.

5. Trouver l'aire d'un cercle dont le rayon est de $30\frac{1}{2}$ perches ?

Rep. 2922.4734 perches carrées.

(31) REGLE. IV. *Multipliez le carré de la circonférence par* .07958 : *le produit sera la surface du cercle.* Car, soit c la circonférence donnée, d le diamètre et $\pi = 3.14159$; alors (**686 G.**) $c = \pi d$, et (**687 G.**) $d = \frac{c}{\pi}$; de là l'aire du cercle $= \frac{\pi d^2}{4}$ puisque (**1024 G.**) la surf. d'un cercle dont le rayon est $r = \pi r^2$ et que $d^2 = 4 r^2$; mais puisque $d = \frac{c}{\pi}$, on a $d^2 = \left(\frac{c}{\pi}\right)^2 = \frac{c^2}{\pi^2}$; et comme $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{4} \pi d^2$, on a $\frac{d^2}{4} =$

$$\frac{1}{4}\pi . \frac{c^2}{\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi} = \frac{c^2}{4 \times 3.14159} = \frac{c^2}{12.56636} = c^2 = \frac{1}{12.56636} = c^2 + .07958$$

Ex. 1. Trouver l'aire d'un cercle dont la circonférence est de 10.75 **Rep.** 9.196463750.

2. Déterminer, en acres, la superficie d'un terrain dont la circonférence mesure un mille (soit 80 chaînes de Gunter = 66 × 80 = 5280 pieds anglais) ? **Rep** 50.9312.

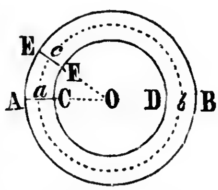
PROBLÈME X.

Trouver la surface d'un anneau circulaire ou l'espace compris entre deux cercles concentriques. (1)

(32) REGLE. 1. *Trouvez* **(1144 G)** *par le dernier problème les surfaces des deux cercles : leur différence sera la surface de l'anneau.*

REGLE II. *Multipliez* **(371 G.)** *la somme des diamètres par leur différence : ce produit multiplié par .7854 sera la surface voulue.*

REGLE III. *Multipliez la demi-somme des circonférences des deux cercles par la demi-différence de leur diamètres, c'est-à-dire par la largeur de l'anneau, et le produit sera la surface demandée.*



Car chaque unité du diamètre correspond à 3.1416 unités de la circonférence ; donc, si *a* C = *a* A = une unité ou partie quelconque du diamètre A B ou C D, l'excédant de la circonférence *a b* sur la circ. C D sera égal à l'excédant de A B sur *a b* ; d'où *a b* est moyenne arithmétique **(1265 G.)** entre circ. A et circ. C. Maintenant, **(428 G.)** A E : *a e* : C F :: circ. A B : circ. *a b* : circ. C D ; donc *a e* est moyenne arithmétique entre AE, CF ; et puisque l'arc AE, indéfiniment petit, peut être considéré **(430 G.)** comme étant sensiblement une ligne droite, la partie A E F C de l'anneau circulaire peut être regardée comme un trapèze ; or, surf. trapèze A E F C = **(347 G.)** *a e* × AC ; donc aussi, surface anneau A C = circ. *a b* × A C.

Ex. 1. Combien y a-t-il de pouces carrés dans la surface d'un anneau circulaire dont le diamètre extérieur est 30 pouces et la largeur $2\frac{1}{2}$ pouces ? **Rep.** 215.985.

2. Les diamètres de deux cercles concentriques sont 15 et 10 : quelle est l'aire de l'anneau que forment ces cercles ? **Rep.** 98.175.

---

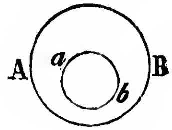
(1) Tel serait une allée autour d'un jardin circulaire, la coupe horizontale d'une colonne évidée, le plan-par-terre du mur d'une tour, une coupe perpendiculaire à l'axe d'un tuyau ou conduit, etc., etc. Voir les bases parallèles du cylindre évidé du *Tableau.*

3. On demande la surface de l'anneau dont les cercles contenants ont pour diamètres 9 et 5 ? **Rep.** 43.9824.

4. Les deux diamètres d'un anneau circulaire sont 21.25, et 9.75; quel en est le contenu superficiel ? **Rep.** 279.9951.

5. Déterminer la surperficie de l'espace compris entre deux cercles concentriques dont les diamètres sont 15 et 16 ? **Rep.** 24.3474

(33) Si les cercles A B, *a b*, n'avaient pas le même centre, comme c'est le cas pour une roue excentrique, il est clair qu'on aurait tout de même la surface de l'espace annulaire compris entre les cercles en faisant (Règle I) la différence de surface de chacun d'eux. [1]



PROBLÈME XI.

Trouver la longueur d'un arc de cercle. [2]

(34) REGLE. I. *Multipliez le nombre de degrés dans l'arc proposé par* .0087266 *et ce produit par le diamètre du cercle.*

REM. 1. Puisque la circonférence est 3.1416 quand le diamètre est 1, il suit que $3.1416 \div 360 = 0.0087266$ = longueur [3] de l'arc d'un degré, sous un diamètre égal à l'unité. Ce quotient multiplié par le nombre de degrés dans un arc, sera la longueur de cet arc dans le cercle dont le diamètre=1 ; et ce produit multiplié par un diamètre quelconque donnera la longueur de l'arc dans un cercle de ce diamètre.

---

1. Coupe ou section centrale de l'anneau excentrique du *Tableau ;* projection sur un plan des bases opposées d'un tronc de cône oblique.

2. Voir parmi les modèles du *Tableau* les arcs limitatifs des segments et secteurs de cercle, bases des onglets de cylindre, cônes et troncs de cônes droits, faces latérales, des pyramides sphériques et des sections de sphère évidée, etc.

3. On a déjà eu occasion de faire remarquer et il est d'ailleurs clair que l'exactitude d'un résultat est limité par celle des éléments qui y concourent ; il est donc à peine nécessaire de rappeler que suivant le degré de précision qu'on se propose, il peut devenir nécessaire de faire entrer en compte un nombre plus ou moins grand des décimales de l'unité de tel élément ; ainsi il est clair que la solution du problème dont il s'agit ici peut exiger que l'on remplace le rapport $\pi = 3.1416$ dont on se sert d'ordinaire par le rapport plus exact $\pi = 3.14159$, ou par le rapport encore plus approximatif $\pi = 3.141592$, $\pi = 3.1415926$, $\pi = 3.14159265$, etc., avec une décimale additionnelle du terme ou facteur π pour chaque décimale additionnelle de l'unité du résultat.

REM. 2. Puisque la minute est le 60ème du degré, et la seconde le 60ème de la minute ou le (60 × 60) 3600ème du degré ; si l'arc proposé contient des minutes, on réduira ces minutes en les divisant par 60, à la décimale d'un degré et si l'on a aussi des secondes, on réduira d'abord les minutes en secondes pour diviser ensuite le tout par 3600 ; ce qui traduira comme auparavant en décimales d'un degré la partie fractionnaire de l'arc.

Ex. 1. Le diamètre étant de 18 pieds, quelle est la longueur de l'arc de 30° ? **Rep.** 4.712364.

2. Trouver la longueur d'un arc de 12°.10′ ou $12\frac{1}{6}$°, sous un diamètre 20 ? **Rep.** 2.123472.

3. Dans un cercle dont le diamètre est de 68, quelle est la longueur de l'arc de 10°.15′ ou 10.25° ? **Rep.** 6.082396.

4. On demande la longueur d'un arc de 57° 17′ 44″ ; le rayon du cercle étant 25 pieds ? **Rep.** 25 pieds.

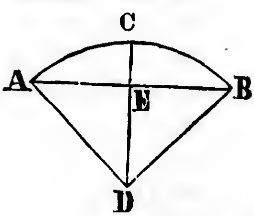
Car 57° 17′ $44\frac{1}{2}$″ est la 3.1415926ème partie de 180°, c'est-à-dire la longueur du rayon en termes de la circonférence.

5. Déterminer, dans un cercle dont le rayon est 20, la longueur d'un arc de 45° 30′ 3″ ? **Rep.** 15.885.

REM. 3. Si le nombre de degrés dans l'arc voulu n'était pas connu, on y arriverait facilement par la méthode du par. **(785 G.)** où la corde et la flèche de l'arc sont données pour trouver le reste.

(35) REGLE II. *Déterminez* **(785 G.)** *la longueur de la circonférence entière dont l'arc donné fait partie et établissez alors la proportion suivante, savoir :* 360° : *la longueur de la circonférence* :: *le nombre de degrés dans l'arc : la longueur de l'arc.*

Ex. 1. Sous un rayon 14, quelle est la longueur de l'arc de 60° ? **Rep.** 14.6607720.



2. La corde A B d'un arc A C B est de 30 pieds et la hauteur ou sinus-verse E C est de 8 pieds ; trouver la longueur de l'arc ? **Rep.** $35\frac{1}{8}$ pieds, près.

3. Quelle est la longueur de l'arc dont la corde est $48\frac{1}{2}$ et la flèche $18\frac{1}{4}$? **Rep.** 64.767 près.

4. Si la corde d'un arc mesure 20.386 perches, et son sinus-verse 4 perches ; quelle est la longueur de l'arc ? **Rep.** 22.402 perc. près.

5. On demande la longueur d'un arc de cercle dont la corde est 40 et la hauteur 15 ? **Rep.** 53.33 près.

(36) **REGLE III.** On démontre aussi que : *L'on obtient, à peu de chose près, la longueur d'un arc, en soustrayant de huit fois la corde de la moitié de l'arc, la corde de l'arc entier, pour prendre ensuite le tiers de la différence.*

Ex. 1. La corde d'un arc est de 36.75 et la corde de la moitié de l'arc 23.2 ; quelle est la longueur de l'arc ? **Rep.** 49.616 près.

2. Quelle est la longueur d'un arc dont la corde est 50.8 et la corde du demi-arc 30.6 ? **Rep.** 64.66 près.

REM. Quand on ne connaît que la corde et la flèche de l'arc entier, on obtient au besoin la corde de la moitié de l'arc égale (**305 G.**) à la racine carrée de la somme des carrés de la flèche et de la demi-corde.

PROBLÈME XII.

Trouver l'aire d'un secteur de cercle. [1]

(37) **REGLE I** *Multipliez* (**430** 2° **G.**) *l'arc du secteur* (c'est-à-dire la longueur de l'arc) *par le demi-rayon.*

REGLE II. *Faites l'aire du cercle entier, et établissez ensuite la proportion :* 360 *degrés : degrés dans l'arc du secteur : : l'aire du cercle entier : l'aire du secteur.*

Ex. 1. On demande l'aire d'un secteur, dont l'arc est de 18 degrés et le diamètre du cercle 3 pieds ? **Rep.** 0.35343.

2. Quelle est la surface d'un secteur dont l'arc est 20 et le rayon 10 ? **Rep.** 100.

3. L'arc d'un secteur est 147° 29′ et son rayon 25 ; quel est le contenu superficiel ? 804.3986.

4. Déterminer la surface d'un secteur, quand la corde de l'arc= 28 et la corde de la moitié de l'arc=16 ? **Rep.** 275.39 près.

5. Le rayon du cercle étant 10, quelle est la superficie du secteur dont la corde de l'arc est 20 ? **Rep.** 157.08

6. La corde de l'arc est 16 et sa hauteur 6 ; quelle est l'aire du secteur ? **Rep.** 88.873 près.

7. Trouver le contenu d'un secteur dont la hauteur de l'arc =4 et le rayon=8 ? **Rep.** 66.858 près.

---

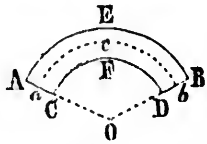
1. Voir, parmi les modèles du *tableau*, les faces latérales des pyramides sphériques tri-acutangles, tri-rectangles et tri-obtusangles.

PROBLÈME XIII.

Trouver l'aire d'un secteur d'anneau circulaire ou l'espace compris entre deux arcs de cercles concentriques.[1]

(**38**) **REGLE I.** *Multipliez* (dém. de **32, R. III. T.**) *la demi-somme des arcs intérieur et extérieur du secteur par sa largeur ; c'est-à-dire par la largeur de l'anneau dont le secteur fait partie, ou, ce qui est la même chose, par la différence des rayons des arcs concentriques qui le contiennent.*

REGLE II. *Trouvez par le dernier problème les surfaces des deux secteurs concentriques : leur différence sera la surface voulue.*



Ex. 1. L'arc AEB ou CFD d'un secteur AB d'anneau circulaire est de 30°, la largeur AC de l'anneau de $2\frac{1}{2}$ et le rayon AO de l'arc extérieur de 15 pouces ? **Rep.** La surface$=17.99875$, soit 18 p. c.

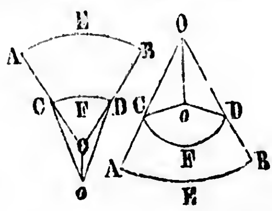
2. Les deux rayons d'un secteur d'anneau circulaire sont 10.625 et 4.875 et l'angle au centre O ou AOB c'est-à-dire l'arc AEB est de 270° ; on demande l'air du secteur ?

Rep. 209.996, soit 210.

3. Les arcs qui comprennent un secteur d'anneau circulaire sont 11 pieds 9 pouces et 10 pieds 3 pouces, et la largeur de l'anneau 13 pouces ; quelle en est la surface ? **Rep** $11\frac{11}{12}$ p. c,

4. Déterminer la superficie de l'espace compris entre deux demi-cercles ayant un centre commun, et dont les diamètres mesurent 20 et 30 ? **Rep.** $39.270 \times 5 = 196.35$.

(**39**) **REM.** Si les secteurs composants ABO, CD*o* n'avaient pas le même centre ; on ferait d'abord la surface de l'espace CFDO en ajoutant au secteur CFD*o*, ou en lui retranchant, suivant le cas, la somme des triangles CO*o*, DO*o*, pour prendre ensuite la différence entre AEBO et CFDO ; ce qui est clair.



---

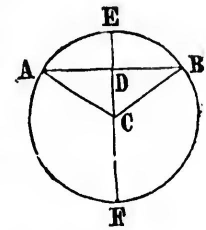
1. Voir sur le *tableau* l'anneau concentrique, base du cylindre évidé. Voir aussi les faces latérales des sections de sphère évidée.

PROBLÈME XIV.

Trouver la surface d'un segment de cercle.[1]

(**40**) **REGLE I.** 1° *Trouvez* (**433 G.**) *par l'avant dernier problème, l'aire du secteur de même arc.* 2° *Trouvez ensuite l'aire du triangle formé par la corde du segment et les rayons du secteur.* 3° *La somme de ces surfaces sera* (**434 G.**) *celle du segment, si le segment est plus grand qu'un demi-cercle, et si le segment est moindre qu'un demi-cercle, sa surface sera égale à la différence de ces surfaces.*

Ex. 1. Trouver l'aire du segment AEB dont la corde AB est 12 et le rayon AC=10.



AD	10		comp. ar. log. 9.000000
: AD=½AB	6		0.778151
:: Sin. D	90°		10.000000
: Sin. ACD	36°	52′=36.87°	9.778151
		× 2	

=73.74° = les degrés dans l'arc AEB.

Alors 73.74 × (**34 REM. 1. T.**) 0 0087266 × 20 = 12.87= longueur (près) de l'arc AEB et AEB × ½AC=12.87 × 5=64.35= surf. secteur AEBC.

Maintenant $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$ et $6\times 8=48$ surface du triangle ACB. De là, sect. AEBC−ABC=64.35−48= 16.35=seg. AEB.

2. On demande l'aire du segment dont la hauteur est 18 et le diamètre du cercle 50 ? **Rep.** 636.3138.

3. La corde d'un segment=16, le diamètre=20; quelle est la surface ? **Rep.** 44.764.

4. L'arc d'un segment contient 90° sous un rayon=9; quelle est la surface ? **Rep.** 23.1174.

5. Déterminer l'aire d'un segment dont la corde de l'arc est 24 et la corde de la moitié de l'arc=13 ? Voyez (**536** ou **539 G.**) **Rep.** 82.53332.

(**41**) **REGLE II.** 1° *Divisez la hauteur ou le sinus-verse par le diamètre et trouvez le quotient dans la table des sinus-verses à la fin de ce volume.* 2° *Multipliez alors le nombre à la droite du sinus-verse par le carré du diamètre, et le résultat sera la surface demandée.*

---

[1] Voir parmi les modèles du *tableau* les bases et coupes parallèles de certains onglets de cylindre, cône, sphère, fuseau, etc.

(42) La table dont il est question contient les surfaces ou aires des segments d'un cercle dont le diamètre est 1 et que l'on suppose divisé en 1000 parties égales. On y trouvera donc la surface d'un segment ayant pour hauteur la millième partie du diamètre, celle d'un segment dont la hauteur égale les 2 millièmes du diamètre, celle du segment ayant pour hauteur ou sinus-verse les $\frac{3}{1000}$ du diam. et ainsi de suite jusqu'au segment dont la hauteur est de $\frac{500}{1000}$ du diam. c'est-à-dire jusqu'au demi-cercle en entier.

(43) Il est clair que cette règle est analogue à la règle II du problème VII et qu'elle n'exige pas une démonstration spéciale ; car il suffit de rappeler, pour en faire comprendre l'exactitude, que dans deux cercles différents les segments semblables sont (**211 G.**) ceux qui correspondent à des angles égaux au centre et dont les cordes (double-sinus (**1216 G.**) des moitiés de ces angles) et les sinus-verses ont en conséquence entre eux le rapport des diamètres de ces cercles et que (**557 G.**) ces figures semblables sont entre elles comme les carrés de ces diamètres.

(44) Il est a peine nécessaire d'ajouter que s'il s'agisait d'un segment plus grand que le demi-cercle on n'aurait qu'à opérer sur l'autre segment, pour le retrancher ensuite du cercle entier, et si le quotient du sinus-verse donné par le diamètre ne se trouve pas dans la table, il sera facile de déterminer par une simple proportion la différence de surface correspondant à la partie fractionnaire de tel sinus.

Ex. 1. Le sinus-verse d'un segment de cercle étant 10 et le diamètre 50 : trouvez l'aire du segment ?

Rep. $10 \div 50 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = .2$ = sinus-verse de la table ; l'aire qui correspond à ce sinus-verse est .111823 laquelle multipliée par 2500 le carré du diam. donne pour surf. du segment proposé 279.5575.

2. On demande la surface du segment dont la hauteur est 6 et le diam. du cercle 21 ?

Rep. $6 \div 21 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} = .285\frac{5}{7}$ = sinus verse de la table,

auquel correspond surf.	.184521
La surface qui correspond au sinus-verse plus grand suivant est	.185425
La différence entre ces surfaces est	.000904
Cette différence × $\frac{5}{7}$, c'est-à-dire × 5 et ÷ 7 donne pour surf. cor. à $\frac{5}{7}$	.000646
A laquelle j'ajoute la surf. qui cor. à 285	.184521
Pour avoir la surface entière du segment $285\frac{5}{7}$ de la table.	.185167
Maintenant, multipliant par le carré du diam. $21 \times 21 =$	441
On obtient pour surface du segment proposé	81.658647

3. Trouver l'aire d'un segment dont la hauteur est 2 et le diam. 52 ? **Rep.** 26 . 88.

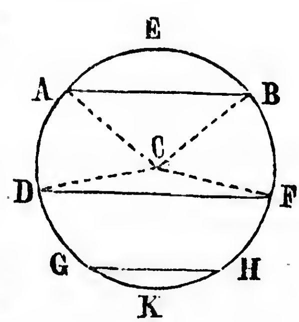
4. Le sinus-verse est 5 et le diam. 25 ; quelle est l'aire du segment ? **Rep.** 69 . 889375.

5. La hauteur d'un segment est 9 pouces et le diam. $3\frac{1}{2}$ pieds ; trouvez la surface ? **Rep.** 205 . 4118 pouces carrés.

PROBLÈME XV.

Trouver la surface d'une zone de cercle, ou l'espace compris entre deux cordes parallèles quelconques et leurs arcs interceptés. [1]

(**45**) **REGLE I.** *Trouvez d'abord par la méthode du par.* (**574 G.**) *etc., le diamètre ou rayon du cercle et les autres éléments du calcul à faire. Déterminez ensuite* (**435 G.**) *séparément par les problèmes déjà donnés les surfaces des secteurs et des triangles composants, pour en prendre la somme, si la zone est centrale ; ou si la zone est soit centrale ou latérale, déterminez par le dernier problème les surfaces des deux segments ayant pour cordes les cordes de la zone ; la différence entre ces segments, ou entre le cercle entier et la somme de ces segments, sera la surface voulue.*



Ex. 1. Les deux cordes parallèles d'une zone sont 12 et 20 et leur distance perpendiculaire est 13 ; quelle est la surface ? **Rep.** 252.87

2. Trouver l'aire d'une [illegible]r-cle dont les cordes parallèl[illegible]urent 12 et 16 et la distance entre elles 2 ? **Rep.** 28.379.

3. Déterminez le contenu superficiel d'une zone dont les côtés sont 96 et 60 et la largeur 26 ? **Rep.** 2136.82

---

1. Voir, parmi les modèles du *tableau* les bases et coupes parallèles de certains onglets de cylindre, cône, sphère, etc.

4. Si deux cordes parallèles d'une zone circulaire sont 20 et 15 et leur distance perpendiculaire 17.5 ; quelle est la surface ?

Rep. 395.4369.

5. On demande l'aire d'une zone dont chacune des cordes parallèles est 40 et la largeur 36 ?

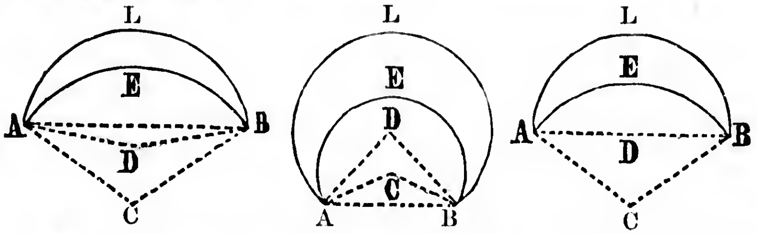
6. L'une des cordes parallèles d'une zone de cercle est de 30 et passe par le centre du cercle, l'autre est de 16 ; on demande la surface.

REM. On pourrait aussi considérer le segment donné comme composé du trapèze ABFD et des deux segments égaux AD, BF pour en déterminer de cette manière la surface.

PROBLÈME XVI.

Touver la surface d'une lunule, ou l'espace compris entre les arcs de deux cercles excentriques qui s'intersectent. [1]

(46) **REGLE.** *Trouvez* (**136 G.**) *par l'avant dernier problème les aires des deux segments qui vont à former la lunule : leur différence sera la surface requise.*



Ex. 1. La corde AB d'une lunule AEBLA est 20 et les hauteurs des segments composants AEB, ALB sont 5 et 8 ; quelle est la surface de la lunule ? **Rep.** 49.392704

2. La corde=20, et les hauteurs des segments 10 et 2 ; quelle est l'aire de la lunule ? **Rep.** 130 204.

3. Déterminer la surface d'une lunule dont la longueur de la corde est 48, et les hauteurs des segments 18 et 7 ? **Rep.** 408.608.

4. La base AB d'une lunule est 10 et les rayons AC, AD des deux arcs contenants AEB, ALB sont 7 et 6 ; trouvez la surface.

5. La corde d'une lunule étant 10 et les hauteurs des segments 15 et 13 ; quelle est la surface ?

---

1. Voir parmi les modèles du *tableau* les bases opposées et la coupe parallèle de l'onglet de cylindre évidé.

PROBLÈME XVII.

Trouver [1] la circonférence d'une ellipse.

(**47**). Cette figure que fait voir toute coupe FI, AD (**997 G.**) ou FE, RN (**1099 G.**) d'un cylindre, ou *bc* (**1055 G.**), *ac* (**1056 G.**) d'un cône par un plan qui étant incliné à l'axe de ces solides en rencontre les deux côtés, se présente fréquemment à la considération du mesureur. [2] On la retrouve dans le cirque, l'amphithéâtre, le parterre, etc., et sur une plus petite échelle dans l'œil-de-bouc, etc., mais c'est surtout la demi-ellipse que l'on rencontre, dans la coupe des voûtes de toutes sortes, dans la tête cintrée d'une porte ou fenêtre, ou d'une ouverture arquée entre deux appartements, etc.

(**48**) On serait peut-être tenté de croire, au premier abord, que la circonférence de l'ellipse dût être une moyenne arithmétique entre les circonférences de deux cercles ayant pour diamètres respectifs les grand et petit diamètres de l'ellipse, ou ce qui est la même chose, que cette circonférence dût être égale à celle d'un cercle dont le rayon serait égal à la demi-somme des grand et petit rayons de l'ellipse, c'est-à-dire dont le rayon serait moyen arithmétique entre les demi-diamètres de l'ellipse ; et il en est à peu près ainsi pour les ellipses dont les diamètres ne diffèrent, l'un de l'autre que de 25 à 20 pour cent ; mais pour se persuader qu'il n'en est pas toujours ainsi, on n'a qu'à recourir à un cas extrême (comme on l'a déjà fait au par. (**828 G.**). En effet, supposons que pendant que le petit axe de l'ellipse est 1, le grand axe soit 1,000,000 ; il est évident que la circonférence d'une telle ellipse sera sensiblement égale au double de son grand diamètre, c-à-d. 2,000,000 pendant que la demi-somme 500000 +.5 ou 500000 (car on peut négliger le 5), des axes $\times$ 3.1416= 1,570809 ; et si le petit diamètre était infiniment petit relativement au grand supposé égal à 2, la circonférence exacte serait 4, (double du grand axe) pendant que la circonférence moyenne arithméthique ne

---

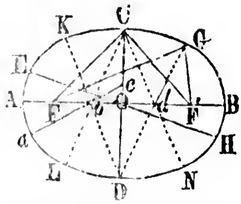
[1] Quoiqu'on ne puisse à l'aide des principes dont il a été question jusqu'ici, donner une démonstration de cette règle et des quatre suivantes ; on a cru cependant devoir les insérer ici pour compléter les règles nécessaires au toisé des surfaces planes, ou de celles (**1140 G.** *D'ail.*) qui étant à simple courbure, peuvent se développer en surfaces planes.

[2] Voir parmi les modèles du *tableau*, les bases et coupes des cylindres, cônes et conoïdes, etc. obliques et des troncs de ces corps. Ces ellipses sont de divers degrés d'excentricité ou ont leurs diamètres dans des rapports variés.

serait que de 3.14159, etc,, l'erreur étant dans ce cas de 4—3 1416=8584 ou près d'un quart. Mais, si l'on ne peut correctement obtenir la circonférence d'une ellipse, de cette manière, il est démontrable qu'on y arrive exactement par la méthode suivante :

(49(**REGLE I.** *Multipliez la racine carrée de la demi-somme des carrés des deux diamètres de l'ellipse par* 3.1416, *et le produit sera la circonférence voulue.*

Ex. 1. Le grand diamètre AB d'une ellipse est 15 et le petit diamètre 12; quelle en est la circonférence ?



REP. $\left(\frac{AB^2+CD^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (**39 G.**)$=\sqrt{184.5}=13.583$ et $3.416\times13.583=42.6723528$.

2. Les grand et petit axes étant respectivement 25 et 20; déterminer la périphérie de l'ellipse ? **Rep.** 69.3979.

3. Les demi-diamètres d'une ellipse sont $12\frac{1}{2}$ et $7\frac{1}{2}$; quelle est le périmètre ? **Rep.** 64.7667.

(**50**) Il est clair que *la demi-ellipse* CBD est égale en périmètre et en surface à la demi-ellipse ACB, et que chacune d'elles a pour mesure la demi-circonférence et la demi-surface de l'ellipse entière. Cette règle et la suivante qui enseignent à trouver la circonférence et la surface de l'ellipse entière fournissent donc aussi le moyen *d'arriver au périmètre* ACB ou CBD *ou à la surface de la demi-ellipse* de même nom.

Il est de plus évident que tout autre diamètre EH divise l'ellipse en deux parties de même surface et de même périmètre.

(**51**) *Il est une propriété importante de l'ellipse qui nous permet de la tracer avec facilité ou de découvrir si une figure curviligne qui ressemble à une ellipse en est une ou non ;* c'est que la somme FC+F′C, EG+F′G, des rayons menés de deux points F, F′ situés sur le grand diamètre et qu'on nomme foyers ou centres de l'ellipse, à un troisième point quelconque C ou G, etc., sur sa circonférence, est constante et égale au grand diamètre AB ; or il est clair que cette propriété là même nous permet d'établir les foyers. En effet, les deux diamètres d'une ellipse quelconque étant donnés, du point C ou D extrémité du petit axe, comme centre et avec un rayon CF=CF′=OA ou OB=$\frac{1}{2}$ AB on intersectera AB en F et F′ les foyers voulus ; puis, des points F et F′ comme centres, avec des rayons FG, F′G dont la somme =AB, c'est-à-dire, avec un rayon quelconque FG moindre que FB et un autre rayon F′G égal à la différence entre le premier rayon FG et le diamètre AB, l'on tracera des arcs dont les intersections en G donneront un point, et en répétant l'opération une suite de points par lesquels on fera passer une courbe qui sera l'ellipse voulue.

(52) Ou, l'on fixera en F et F′ des aiguilles auxquelles on attachera les extrémités d'un fil d'une longueur telle que l'on ait FC + F′C ou FG + F′G = AB ; il suffira alors de tenir le fil tendu au moyen d'un crayon ou d'une pointe que l'on promènera tout autour des deux foyers pour compléter le tracé de l'eilipse.

(53) *Pour faire la même opération sur une grande échelle ;* après avoir pris FG ou F′G à volonté, moindre que AF′ ou BF, mais plus grand que AF ou BF′, connaissant l'autre rayon = AB − FG ou AB − F′G, suivant le cas, et FF′ étant aussi connu $= 2\ \mathrm{OF} = 2\sqrt{\mathrm{GF}^2 - \mathrm{CO}^2}$ $= 2\ \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OC}^2}$ on aura qu'à calculer l'un FF′G ou F′FG des deux angles à la base du triangle GFF′ et mener l'un des deux rayons de la longueur voulue et sous l'angle requis pour donner un point G de la circonférence proposée ; cette opération répétée donnera une série de points par lesquels on fera passer une ligne qui sera la circonférence demandée. Observons aussi que l'on s'exempterait le mesurage du rayon GF ou GF′, en calculant chacun des angles en F et en F′ pour opérer ensuite une intersection G des directrices FG, F′G.

(54) Ajoutons qu'une construction géométrique ou graphique sur une petite échelle aurait l'avantage de donner d'une manière plus expéditive et souvent assez exacte tous les angles GFF′, GF′F, etc., nécessaires à le détermination des intersections ou points G du périmètre voulu.

(55) *On trace encore l'ellipse comme suit :* Soit ac = AO ou BO le demi-grand axe, ab = CO ou DO demi petit axe. En faisant mouvoir la droite ac de manière à tenir le point c sur le diam. DC et le point b sur le diam. AB, le point a décrira l'ellipse voulue. Dans la pratique la droite ac est une tige ou tringle quelconque, avec des aiou points saillants en a, b et c, et l'on dispose à l'endroit des diamètres AB, CD des tringles, raïnures ou coulisses pour servir de guides aux points b et c.

(56) REGLE II. *Quand les diamètres ne sont pas très inégaux, on obtient assez correctement la circonférence de l'ellipse en faisant le produit de la demi somme de ces diamètres par* 3.1416.

Ainsi les trois derniers exemples calculés de cette manière donnent respectivement pour réponses 42.41 au lieu de 42.67, 69. 11 au lieu de 69.40, et 62.83 au lieu de 64.76 ; c'est-à-dire, que quand la différence entre les diamètres n'excède pas $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{4}$ ou quand le rapports entre les diamètres sont ceux de 5:6 ou de 4:5, l'erreur dans le résultat ne va pas au-delà de $\frac{1}{150}$ ou $\frac{1}{100}$, et lorsque la différence entre les diamètres est de $\frac{2}{5}$ ou que ces diamètres sont entre eux comme 15:25 l'erreur devient $\frac{1}{30}$ à peu près du résultat entier. Quand les diamètres sont entre eux comme 1:2, les circonférences obtenues par les deux règles sont entre elles comme 47.12 : 49.66, l'erreur étant dans ce cas $\frac{1}{20}$ près. Les diamètres étant comme 1 : 3 les circonférences sont à peu près :: 63:70, l'erreur étant dans ce cas de $\frac{1}{10}$ près. Quand les diamètres sont :: 1:5, les circonférences sont :: 94:113 et l'erreur de $\frac{1}{5}$ près. Enfin si les diamètres étaient entre eux :: 1:10 les périmètres seraient :: 173:223, et l'erreur de $\frac{5}{22}$ ou de $\frac{1}{4}$ près. Ce qui mettra en mesure de faire choix de l'une ou l'autre règle suivant le degré d'exactitude voulue dans le résultat.

REM. D'ailleurs il est clair qu'on pourrait aussi, après avoir trouvé la circonférence voulue, d'après cette seconde règle, la corriger par l'addition du taux d'erreur ou de défaut proportionné au rapport entre les diamètres, et tel qu'établi plus haut.

PROBLÈME XVIII.

Déterminer la surface d'une ellipse.[1]

(57) REGLE. *Multipliez le produit des deux diamètres par .7854 ; le résultat sera la surface voulue.*

Ex. 1. Quelle est l'aire d'une ellipse dont les diamètres sont 24 et 18 ? **Rep.** 24 × 18 = 432 = AB × CD, et 432 × .7854 = 339.2928 = surf. ACBD.

2. Si les axes d'une ellipse sont 35 et 25, quelle en est l'aire ? **Rep.** 687.225.

3. On demande l'aire d'un ovale dont la longueur est 70 et la largeur 50 ? **Rep.** 2748.9,

4. L'axe majeur d'une ellipse mesure 840 chaînons, l'axe mineur 612 chaînons : on demande le nombre d'acres dans cette enceinte ? **Rep.** 4 acres 6 perches.

(58) REM. Puisque la règle donne pour surface de l'ellipse l'expression AB.CD × .7854 ou ce qui est (**87 G.**) la même chose

1 Les faces composantes de plusieurs des modèles du "tableau" présentent des ellipses de divers degrés d'excentricité ou dont les diamètres sont entre eux dans des rapports variés.

$\left(\sqrt{AB.CD}\right)^2 \times .7854$, il suit évidemment que *l'ellipse est égale en surface à un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre les deux diamètres de l'ellipse.* Soit d ce diam. moyen, on a $AB : d :: d : CD$ et puisque (**104 G.**) $AB^2 : d^2 :: d^2 : CD^2$ il est clair aussi que la *surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre celles des cercles inscrit et circonscrit, c'est-à dire, entre celles de deux cercles ayant pour diamètres respectifs les deux diamètres de l'ellipse.*

(**59**) **REM.** Aidés des deux règles qui enseignent à déterminer la circonférence et la surface d'une ellipse ; on pourra les substituer avec avantage à la méthode moins précise et plus longue du par. (**437 G.**) dans l'estimation des périmètres et surfaces des bases curvilignes, c'est-à-dire, (**47 T.**) elliptiques, du cylindre oblique et du tronc de cylindre (**997** et **1099 G.**) ainsi que celles du cône oblique et du tronc de cône (**1055, 1065, 1067, 1140,** etc. **G.**)

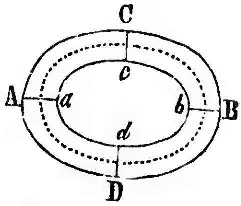
PROBLÈME XIX.

Trouver la surface d'un anneau elliptique.

(**60**) **REGLE I.** *Déterminez séparément les surfaces des deux ellipses concentriques, et prenez en la différence qui sera la surface voulue.*

REGLE II. *Multipliez la demi-somme des circonférences parallèles des deux ellipses limitatives par la largeur de l'anneau.*

Ex. 1. Quelle est l'aire d'un anneau elliptique dont les diamètres intérieurs sont 10 et 20 et les diamètres extérieurs 12 et 22 ?



Rep. 10 + 20 + .7854 = 157.08, 12 × 22 × .7854 = 207.3456 ; la différence 50.2656 de ces deux résultats est la surface voulue de l'anneau.

2. La circonférence extérieure d'une ellipse est 100, la circonférence intérieure 90, la largeur de l'espace intermédiaire étant de 3.5 ; on demande la surface de l'anneau ? **Rep.** 332.5.

3. Déterminer la superficie d'un demi-anneau elliptique, dont les périmètres parallèles mesurent 93 et 77 pouces et la largeur 10 pces ? **Rep.** 850 pouces carrés ou 5 . 9028 pieds. c.

4. Evaluer l'aire d'une partie quelconque Aa cC d'un anneau elliptique, dont l'arc extérieur AC est 15, l'arc parallèle ac 12, et la largeur 3 ? **Rep.** 40 5.

REM. Il est à peine nécessaire d'observer que si la largeur de l'espace annulaire n'était pas partout égale, ou même si l'ellipse intérieure avait une position quelconque par rapport à son enveloppe extérieure, ou un rapport quelconque entre ses diamètres, on n'en obtiendrait pas moins la surface voulue par la première des deux règles de ce problème.

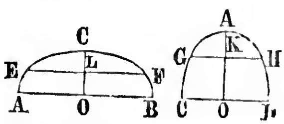
PROBLÈME XX.

Trouver la surface d'un segment d'ellipse dont la base est parallèle à l'un ou à l'autre axe de l'ellipse. [1]

(61) **REGLE.** *Divisez la hauteur du segment par celui des deux diamètres dont cette hauteur fait partie, et trouvez dans la table annexée à ce traité le segment de cercle dont le sinus-verse est égal au quotient. Faites alors le prodruit continu du segment ainsi trouvé et des deux axes de l'ellipse ; ce produit sera la surface voulue.*

Ex. 1. Evaluer l'aire du segment elliptique AGH dont la hauteur AK = 10, et les deux axes AB, CD, 34 et 25 ?

Rep. 162.02



2. Quelle est la surface d'un segment d'ellipse, dont la base GH est à 36 du centre O, les axes étant 120 et 40. **Rep.** 536.75.

3. Déterminez la surface d'un segment d'ellipse, dont la hauteur CL est 8 pouces ; les deux axes étant 4 et 3 pieds. **Rep.**

(62) **REM.** Si les segments d'ellipses ACD, *acd*, *acc*, de la fig. du par. (**1140 G.**) répondent à la définition de l'énoncé de ce prob. on pourra au besoin faire l'application de la règle ici donnée pour en exprimer les surfaces. On estimerait de même au besoin la superficie du segment d'ellipse qui forme la surface supérieure de l'onglet fig. 2 du par. (**1143 G.**) Et si le segment à estimer était la *zone* ou partie AEFB, CGHD, on aurait la surface voulue égale à la différence entre les demi-ellipses ACB, CAD et leurs segments respectifs ECF, GAH.

---

[1] Plusieurs des onglets de cylindre, de cône et de sphéroïde du *tableau* présentent dans leurs coupes ou sections des segments d'ellipse, les uns plus grands, les autres plus petits que la demi-ellipse ; d'autres, des demi-ellipses ; d'autres enfin, des zones d'ellipse.

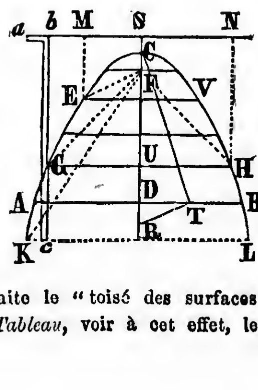
PROBLÈME XXI.

Trouver la surface d'une parabole. [1]

(63) Cette figure est celle que présente la coupe d'un cône par un plan parallèle à son côté incliné. (ADC, fig. du par. (**1140 G.**) en donne une idée). Elle a ceci de particulier que tout point E, H, etc., de la courbe est également éloigné d'un point F qu'on appelle foyer et d'une droite M N perpendiculaire à l'axe CD) qu'on appelle directrice et dont la distance SC du sommet C de la parabole est égale à la distance FC du foyer au sommet ; c'est à dire que l'on a toujours EF = EM, HF = HN, etc ; or on démontre que l'endroit F du foyer se trouve en bissectant BD en T, joignant CT, et menant TR perpendiculaire à CT pour avoir DR=CF=CS. Le foyer F trouvé et la position de la directrice MN déterminée, on trace la courbe en menant un série de droites indéfinies GH (appelées ordonnées) parallèles à AB ou perpendiculaires à l'axe CD ; puis, du foyer F comme centre et avec un rayon US égal à la distance entre les parallèles GH, MN on intercepte GH en G et H, ce qui détermine deux points dans le périmètre de la parabole. Cette opération suffisamment répétée donnera une série de points, par lesquels on fera passer une courbe qui sera la figure voulue.

(64) On trace encore la parabole à l'aide d'une équerre *abc*, dont la branche *bc* est égale à la distance de la directrice MN à la base KL de la parabole proposée. A l'extrémité *c* de l'équerre et au foyer F, l'on attache un fil *c*GF égal en longueur à *cb*. On glisse alors la branche *ab* de l'équerre le long de la directrice MN en tenant en même temps le fil tendu le long de la branche *bc*, au moyen d'une pointe ou crayon dont le mouvement décrit la parabole voulue.

(65) REGLE. *Multipliez la base par la hauteur et prenez les deux tiers du produit pour la surface voulue.*



Ex. 1. Trouver la surface de la parabole ACB dont la base AB est 20 et la hauteur CD 18 ? **Rep.** 240.

2. La base d'une parabole est 13.5, et la hauteur 11.25 ; quelle en est l'aire ? **Rep.** 101.25.

3. CD=16, AD=8 ; quelle est la surface? **Rep.** $106\frac{2}{3}$.

---

1 Cette figure, comme toutes les autres figures dont traite le "toisé des surfaces" se trouve parmi les faces constituantes des modèles du *Tableau*, voir à cet effet, les onglets de cône et de conoïde.

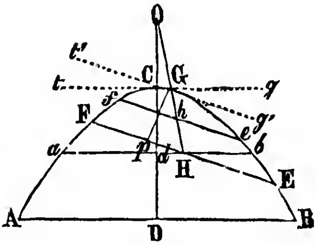
(66) REM. Il suit de la définition de la parabole que toute partie GCH, ECV de la parabole ACB terminée par une base GH, EV, parallèle à AB, est encore une parabole, et non un simple segment, comme dans le cas de l'ellipse ; car le cône peut-être sensé coupé par un plan parallèle à sa base et cela tant en deçà qu'au delà de cette base en KL sans cesser d'être un cône et par conséquent, sans que la définition de la section KCL ou ECV, etc, en soit aucunement altérée.

D'où il résulte que pour arriver a la surface d'une zone, d'un segment AEVB de parabole par une ligne quelconque EV parallèle à sa base, on n'aura qu'à prendre la différence des paraboles entière et partielle ACB, ECV.

(67) Il y a encore, **l'hyperbole** [1] (section d'un cône par un

---

[1] L'*hyperbole* ACB se voit à l'endroit des coupes ou sections de certains onglets de cône et de conoïde que l'on trouvera parmi les modèles du *Tableau*.

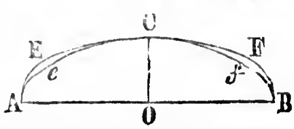


Cette courbe est, mais dans un sens inverse, analogue à l'ellipse. Ainsi, pendant que dans l'ellipse **(51 T.)**, c'est la somme des rayons menés des deux foyers qui est constante ou invariable, dans l'hyperbole, au contraire, c'est la différence de ces mêmes rayons qui demeure constante ; ce qui fait que les deux moitiés, parties ou branches de la courbe (hyperboles conjugées comme on les appelle) présentent l'une à l'autre, non leurs côtés concaves comme dans l'ellipse, mais leurs extrémités, sommets ou côtés convexes. Pour tracer cette courbe sans conditions de dimensions, c'est-à-dire, sans conditions quant aux dimensions du cône ou quant à la position du plan de section, ayant pris à volonté deux points, F, F, éloignés l'un de l'autre d'une distance arbitraire, puis de l'un de ces points ou foyers avec un rayon quelconque ayant décrit de chaque côté de l'axe, (c'est-à-dire, de la ligne qui relie les foyers) un arc, l'on décrira de l'autre foyer comme centre et avec un rayon excédant le premier d'une différence donnée deux autres arcs qui à l'endroit de leur intersection avec les deux premiers arcs détermineront 2 points de la courbe voulue. L'on repétera cette opération avec deux nouveaux rayons, prenant garde toutefois que le second rayon excède toujours le premier de la différence donnée, (laquelle comme on la vu doit demeurer constante) ce qui fournira deux autres points dans la courbe à décrire ; et l'on continuera à déterminer ainsi d'autres points de la courbe jusqu'à ce que leur suite et direction rendent évident le parcours de l'hyperbole. Si, maintenant, l'on transpose les rayons, il est clair que l'on aura une nouvelle série de points, celle de l'hyperbole conjugée. On appelle centre de l'hyperbole comme et l'ellipse le point O qui est à mi-chemin entre les deux foyers.

L'on peut encore, comme pour la parabole et l'ellipse tracer l'hyperbole par un moyen mécanique. Prenant une règle que l'on assugettira par un bout, à l'un des foyers de la courbe à décrire, et de manière que la règle soit mobile autour du dit foyer, l'on reliera l'autre extrémité de la règle au second foyer par une corde ou ligne qui devra être moins longue que la règle, de la différence voulue entre les rayons ; alors un crayon ou une pointe qui tiendra la corde tendue et en même temps en contact avec la règle décrira, pendant que la règle tournera autour du premier foyer, l'hyperbole voulue et la transposition de la règle et de la corde permettra de décrire à volonté l'autre branche de la courbe.

plan qui en rencontre la base sous un angle plus grand que celui que fait le côté du cône avec cette base) la **cycloïde**, (que fait décrire à un point situé sur la circonférence d'un cercle maintenu dans un même plan, une révolution entière du dit cercle le long d'une droite qu'on appelle base de la courbe, laquelle ressemble fort à une demi-ellipse, fig. du paragraphe (**68**) **et** plusieurs **autres figures curvilignes**, dont on peut avoir à évaluer les surfaces et périmètres, et pour lesquelles il existe des règles spéciales qui permettent d'en établir avec toute la précision voulue les aires et circonférences relatives ou absolues ; mais on remarquera ici comme on l'a déjà fait (**1136 G.**) qu'il y aura généralement à s'enquérir tout d'abord de l'espèce même de la figure proposée ; et le travail seul qu'exigerait cette opération préliminaire serait souvent suffisant pour décider de recourir de suite à la méthode du problème suivant.

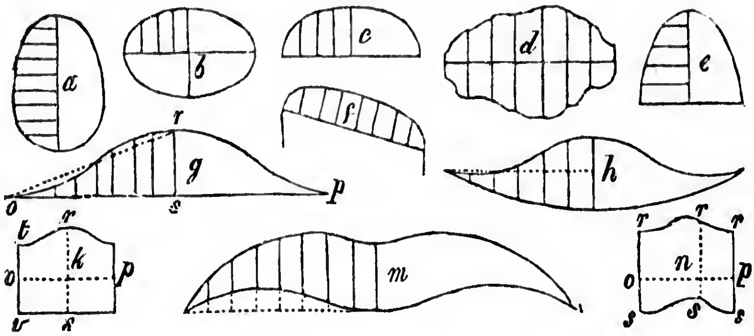
(**68**) Un œil même exercé aura souvent peine à se rendre compte de la nature de la figure à estimer, et l'on commettra parfois d'assez graves erreurs en s'y méprenant. Il y a par exemple la courbe AECFB, dite *anse-de-panier* et d'autres de cette sorte qu'on retrouve souvent dans la coupe d'une voûte et dans la tête cintrée d'une ouverture, et qu'on serait peut être quelquefois tenté de prendre pour une ellipse, afin d'en évaluer le contenu superficiel d'après la règle applicable à cette figure ; or, l'on voit que dans le cas actuel la différence AEC*e* + BFC*f* (ou 2 AEC*e*) entre les deux figures, peut être trop considérable pour permettre de la négliger.



PROBLÈME XXII.

Déterminer la surface d'une figure curviligne quelconque.

(**69**) **REGLE.** *Divisez la figure entière, si elle est irrégulière, (c'est-à-dire. si les parties correspondantes ne sont pas symétriques) la moitié ou le quart, si elle est régulière, en trapèzes de même largeur ou hauteur, et procédez ensuite à la manière du problème VI., doublant ou quadruplant au besoin la surface ainsi trouvée pour avoir l'aire entière de la figure.*



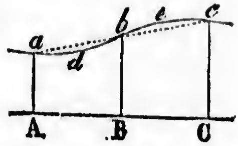
(*)

(70) La méthode d'évaluation par trapèzes, sera d'autant plus exacte qu'il y aura dans la figure à estimer des concavités et convexités *adb*, *bec*, compensatoires l'une de l'autre, comme l'on en remar-

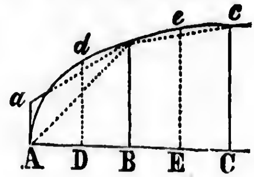
---

(*) Parmi ces figures, *a* est l'ove ou ovale; (telle est la coupe verticale de l'œuf, etc.,) *b* est l'ellipse, (telle est la coupe du melon, etc.,) ou toute autre figure analogue, l'œil-de-bouc, la coupe du sphéroïde, l'amphithéâtre, etc. ; *c* est la demi-ellipse, anse-de-panier, cycloïde, tête cintrée surbaissée d'une ouverture, coupe d'une voûte, etc.; *d*, une figure curviligne irrégulière quelconque; *e*, une parabole ou autre figure analogue, hyperbole, tête cintrée surhaussée d'une ouverture, coupe d'une voûte, coupe verticale d'un conoïde, d'un dôme, etc.; *f* est l'arche rampante ou la coupe d'une voûte inclinée; *g* est la surface latérale ou convexe développée d'un onglet de cylindre droit; *h*, la surface latérale développée d'un onglet de cône droit; *m* le développement de la surface d'un onglet de cylindre ou de cône oblique. Les lunettes ou intersections de voûtes, dont on a fait déjà mention à l'article **(1143 G.)** présentent aussi des surfaces dont le développement offre à la considération du mesureur les trois dernières figures que l'on vient de définir. La surfface latérale développée d'un tronc de cylindre droit présente la forme *k*, et il suit du par. **(997 G.)** et de la dém. du par. **(1099 G)** qu'il suffit de multiplier la demi-somme de sa moindre et de sa plus grande hauteur *tr*, *rs*, par la longueur *op* perpendiculaire à *rs* ou *vt*, cette largeur étant évidemment égale à la circonférence developpée d'une section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe ou côté. Le développement de la surface latérale d'un cylindre oblique **(997)** présente la figure *n*, dont la hauteur *rs* qui est celle du côté incliné du cylindre, est partout uniforme, l'aire de l'enveloppe étant par conséquent égale au produit de *rs* par la largeur *op*, périmètre d'une section perpendiculaire à l'axe ou au côté du solide.

Il est utile de dire aussi que si l'onglet de cylindre droit dont la fig. *g* est l'enveloppe, au lieu d'être partiel comme KLNE ou KLRF page 409, est entier ou complet comme ADd, page 388 G, on aura la superficie de *g* en faisant le produit de *op* par la moitié de *rs*, car dans ce cas *g* ne sera autre qu'une enveloppe *k* de tronc de cylindre dont la moindre hauteur *vt* serait égale à zéro. En ajustant à la paroi latérale d'un onglet ou tronc de cylindre et de cône du *tableau*, une feuille de papier, pour ensuite le tracer ou découper à volonté, l'élève se fera une excellente idée de la nature des surfaces developpées dont il est ici question.



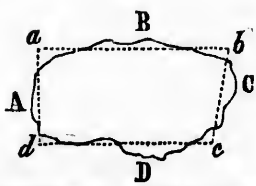
que dans les figures *g*, *h*, *m*, *k*, puisque alors le segment *bec* qu'on néglige en considérant comme trapéze la partie BC*ceb* de l'aire à évaluer, sera compensée par le segment *adb* qui est de trop dans le trapèze AB*ba*.



(71) Mais quand la figure sera toute convexe on ajoutera à la précision en faisant entrer en compte la somme des segments *abd*, *bec*, etc., dont on fixera à l'œil ou autrement la largeur moyenne que l'on multipliera par le périmètre correspondant *adbec* pour en avoir la surface.

(72) Observons aussi que au lieu de regarder comme nulle la hauteur initiale de la figure, à l'endroit A de la naissance de la courbe, ce qui donnerait pour aire de la partie AB*bda*A de la fig. le triangle AB*b*, on obtiendra plus d'exactitude en regardant comme ligne droite la partie presque verticale A*a* de la courbe, ce qui donnera alors pour surface plus approximative de cette partie composante de la fig. le trapèze A*ab*B au lieu du triangle A*b*B.

Il est clair aussi qu'une subdivision continue D*d*, E*e*, et suffisante pour permettre de considérer comme étant sensiblement des lignes droites les parties *ad*, *bd*, *be*, etc., de la circonférence convexe ou concave de la fig. aura aussi l'effet d'ajouter singulièrement à l'exactitude du résultat.



(73) Il est encore un moyen assez correct et expéditif d'arriver à la surface d'une figure irrégulière ABCD, celui de la réduire en une figure régulière ou rectiligne équivalante quelconque par des lignes compensatoires *ab*, *bc*, c'est-à-dire, telles que la somme des parties exclues par ces droites soit égale en surface à la somme des parties comprises dans leur enceinte, opération graphique ou mécanique pour l'exactitude de laquelle on s'en rapportera souvent à une appréciation occulaire.

(74) Enfin, pour ce qui est de l'évaluation des longueurs développées des périmètres des figures dont il s'agit ici, remarquons encore comme on l'a fait, page 596 G, que la manière souvent la plus expéditive et non la moins exacte d'y arriver, consistera dans l'emploi d'un fil ou ruban ou de tiges ou tringles en bois ou en métal assez minces pour permettre de les ajuster au périmètre à estimer, afin d'en déduire de suite les dimensions voulues.