IMAGE EVALUATION TEST TARGET (MT-3)

6"

Technical and Bibliographic Notes/Notes techniques et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming, are checked below.

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modification dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

- [ ] Coloured covers/
Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged/
Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated/
Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing/
Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps/
Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black)/
Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations/
Planches et/ou illustrations en couleur
- [ ] Bound with other material/
Relié avec d'autres documents
- [x] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin/
La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure
- [ ] Blank leaves added during restoration may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming/
Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.
- [ ] Additional comments:/
Commentaires supplémentaires:

- [ ] Coloured pages/
Pages de couleur
- [ ] Pages damaged/
Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated/
Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed/
Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached/
Pages détachées
- [x] Showthrough/
Transparence
- [ ] Quality of print varies/
Qualité inégale de l'impression
- [ ] Includes supplementary material/
Comprend du matériel supplémentaire
- [ ] Only edition available/
Seule édition disponible
- [ ] Pages wholly or partially obscured by errata slips, tissues, etc., have been refilmed to ensure the best possible image/
Les pages totalement ou partiellement obscurcies par un feuillet d'errata, une pelure, etc., ont été filmées à nouveau de façon à obtenir la meilleure image possible.

This item is filmed at the reduction ratio checked below/
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10X	12X	14X	16X	18X	20X	22X	24X	26X	28X	30X	32X
			✓								

D'

F

Professeur

divers

ÉDI

A L'US

J. B. RO

ÉLÉMENTS

D'ALGÈBRE

THÉORIQUE ET PRATIQUE

Par EYSSÉRIC et PASCAL

Professeurs de Physique et de Mathématiques, Auteurs de divers ouvrages approuvés par le Conseil supérieur de l'Instruction publique en France.

ÉDITION ABRÉGÉE ET MODIFIÉE

A L'USAGE DES ÉCOLES DU CANADA

MONTRÉAL :
J. B. ROLLAND & FILS, LIBRAIRES-EDITEURS.
Nos. 12 ET 14 RUE ST. VINCENT.

1879

AVANT-PROPOS.

Les passages d'Eysséric que nous avons trouvé bon de supprimer ou de modifier, sont en réalité peu nombreux. Pour ces modifications nous avons emprunté à divers ouvrages d'Algèbre quelques définitions, quelques passages qui rendaient notre pensée ou celle de l'auteur d'une manière plus complète, plus concise ou plus lucide.

La " théorie des signes " (chap. 1er), facilitera beaucoup l'intelligence de tous les cas possibles ; elle n'est cependant pas la seule théorie acceptable.

La théorie de l'emploi de ces signes variant avec le point de vue auquel on se place, et ce point de vue étant en partie arbitraire, on conçoit facilement la possibilité de donner, à ce sujet, des explications différentes.

On trouvera çà et là les *francs* et les *centimes* remplacés par les piastres et les centins ; mais, grâce aux autres problèmes que nous avons pris mot-à-mot d'Eysséric, il sera facile de familiariser les élèves avec les dénominations du système métrique. Or, ne serait-il pas avantageux d'initier la jeunesse canadienne à un système qui sera bientôt d'un usage universel. Voici ce qu'une de nos Revues scientifiques dit à ce propos :

" Le système décimal est depuis longtemps
" déjà légalisé aux Etats-Unis ainsi qu'en Angle-
" terre, et la grande république fait actuellement
" des efforts pour le rendre compulsoire. Ainsi,

“ à l'hôpital de marine de Washington, son em-
“ ploi est de rigueur, et nul doute qu'avec l'es-
“ prit de progrès que nous leur connaissons, le
“ nouveau système ne remplace bientôt le systè-
“ me actuel chez nos voisins.

“ Le système décimal est en usage dans pres-
“ que tout le monde civilisé, excepté en Amérique
“ et en Angleterre, où il est permis de présumer
“ qu'il le sera bientôt; en Russie, où il est opta-
“ tif depuis longtemps et sera obligatoire sous
“ peu; et en Suède, où il sera optatif jusqu'en
“ 1889 et obligatoire ensuite. A quand le Canada?

“ Tout le monde convient bien de la supério-
“ rité du système décimal qui, comme le dit
“ Sumner, a l'avantage d'être universel, unifor-
“ me, précis, expressif, bref et complet, un sys-
“ tème de poids et mesures né de la philosophie
“ plutôt que du hasard. — Mais il en coûte de
“ rompre avec les vieux péchés. Un jour ou
“ l'autre nous serons bien forcés d'emboîter le
“ pas, le plus tôt sera le mieux.—” *Union Médicale du Canada*, Sept. 1878.

Notre auteur, dans la préface de l'édition française, s'exprime ainsi au sujet des logarithmes :

“ Nous avons réservé pour ce dernier volume
“ la théorie des progressions et des logarithmes,
“ dont il est impossible de donner une idée com-
“ plète en arithméthique ; nous avons surtout
“ traité les logarithmes avec les développements
“ que mérite leur importance dans les calculs.”

Nous avons cru répondre aux vues de l'auteur lui-même en ajoutant à cette importante théorie une table des logarithmes depuis 1 jusqu'à 10000 et quelques méthodes pratiques destinées à faciliter l'usage de cette table.

On peut voir, d'ailleurs, pour plus de détails, la table analytique qui termine ce volume.

PRÉFACE DES ÉDITEURS.

Depuis longtemps nous éprouvions le désir de publier, dans l'intérêt de la jeunesse canadienne, un traité d'Algèbre, qui fût à la fois élémentaire et suffisamment complet. Parmi les nombreuses Algèbres publiées à Paris depuis une dizaine d'années, l'Algèbre d'Eysséric et Pascal se recommandait à nous par un mérite exceptionnel.

C'est donc une édition canadienne de cet excellent ouvrage, arrivé en France à sa 15ème édition, que nous offrons aujourd'hui au public du pays.

Nous croyons que les élèves de nos écoles et de nos colléges pourront y puiser, avec la connaissance des principes de l'Algèbre, l'estime que mérite une science si utile et si belle.

Les tables, placées à la fin de notre livre, avec les explications qui les précèdent, faciliteront l'enseignement et l'usage des " LOGARITHMES " *et permettront de résoudre une multitude de Problèmes dont la solution, par les méthodes ordinaires, est aussi longue que fastidieuse.*

Sous le rapport de l'impression et des détails typographiques, notre livre, croyons-nous, laisse peu à désirer, surtout quand l'on songe aux mille difficultés que présente toujours la publication des ouvrages de Mathématiques.

Page 28,

Page 41,

a^{2-5}..

Page 54,

Page 56,
uperons,"

Page 109,
emble 160

Page 112,
$\sqrt{a^2} = \pm a$

Page 122,

lisez $\frac{3 \times -}{5}$

Page 131,
géométrique

Page 171,
colonne.

Page 214,

Page 217,
de 19 zéros.

Page 217,
.0000000000

Page 217,

Il y a bien
qu'il est inu
une nouvelle

ERRATA.

Page 28, *huitième ligne*, au lieu de $= 5a$, lisez $= -5a$.

Page 41, *troisième ligne*, au lieu de $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-3}$, *lisez* $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5}$..

Page 54, *No.* 92, au lieu de $\frac{55}{37} = 1{,}86186$, lisez $\frac{55}{37} = 1{,}486486$.

Page 56, *au bas de la page*, au lieu de " nous nous *en* occuperons," *lisez* nous nous occuperons.....

Page 109, *quatrième ligne*, au lieu de paysannes ont ensemble 160 œufs, *lisez* paysannes ont ensemble 100 œufs.

Page 112, *No.* 164, *7ème ligne*, au lieu de $\sqrt{a^2} = + a$, *lisez* $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Page 122, *quatorzième ligne*, au lieu de $\frac{3 \times -5}{5} = \frac{15}{-5}$; *lisez* $\frac{3 \times -5}{5} = \frac{-15}{5}$....

Page 131, *septième ligne, le second titre* interprétation géométrique des racines *aurait dû être omis*.

Page 171, *dix-huitième ligne*, au lieu de colonie, *lisez* colonne.

Page 214, No. 103, au lieu de $x = 2$, lisez $x = \pm 2{,}309$.

Page 217, *No.* 137 au lieu de suivi de 17 zéros, *lisez* suivi de 19 zéros.

Page 217, *No.* 144, au lieu de 0.0000000000 354 0765 *lisez* 0.00000000000 392 765.

Page 217, No. 145, au lieu de 9509.— lisez 0.98756.

Il y a bien encore quelques petites erreurs typographiques, qu'il est inutile de corriger ici. Elles disparaîtront dans une nouvelle édition

D'

THI

N

1. **But d**
ui a pour
résoluti
ombres.
Pour cel
n'on appel
2. **Définit**
nd par sig
ont on est
és dans u
es, et les
3. **Divisio**
stinguer c

1° Les sig
2° Les sig
3° Les sig
4° Les sig
5° Les sig

ÉLÉMENTS

D'ALGÈBRE

THÉORIQUE ET PRATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. **But de l'Algèbre.** L'Algèbre est une science ui a pour but de simplifier et de généraliser résolution des questions proposées sur les ombres.

Pour cela, on fait usage de certains signes n'on appelle *signes algébriques.*

2. **Définition des signes algébriques.** On end par signes algébriques des signes d'écriture ont on est convenu pour représenter les quanés dans une question du ressort des mathématies, et les opérations à faire avec ces quantités.

3. **Division des signes algébriques.** On peut stinguer cinq espèces de signes algébriques :

1° Les signes qui représentent les *quantités.*
2° Les signes d'*opérations.*
3° Les signes de *relations.*
4° Les signes de *groupement.*
5° Les signes de *raisonnement.*

SIGNES DES QUANTITÉS.

4. **Lettres et chiffres.** Les quantités se représentent en algèbre par des chiffres et par les lettres de l'alphabet ; par exemple : $2a$, $3b$, $5y$, x, 4, 11, $3t$, $2z$........

— En général on emploie les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d......... pour représenter les nombres connus ou *les données*, et les dernières, x, y, z, t, u, v,......... pour les nombres cherchés ou *les inconnues*.

Le signe 0 (zéro) indique l'absence de toute quantité, ou bien, dans certains cas, représente une quantité infiniment petite.

Pour représenter une quantité infiniment grande on fait usage du signe suivant ∞.

SIGNES D'OPÉRATIONS.

5. **Définitions.** Les signes d'opérations sont $+$, $-$, $\times$, $\div$, ^{2}, ^{3}, ^{4},......... $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$.

$+$ (lisez *plus*) est le signe de l'addition ; par exemple $a + b$ indique l'addition des deux quantités a et b.

$-$ (lisez *moins*) est le signe de la soustraction ; par exemple $a - b$ indique que la quantité b doit être soustraite de la quantité a.

$\times$ (lisez *multiplié par*) est le signe de la multiplication. La multiplication peut s'indiquer de trois manières ; par exemple : $a \times i \times t$, ou $a \,.\, i \,.\, t$. ou simplement et plus ordinairement $a\,i\,t$ (dans les deux premiers cas lisez a *multiplié par i multiplié par t* dans le troisième lisez *a i t* en séparant les lettres).

$\div$ (lisez *divisé par*) est le signe de la division.
La division s'indique encore par le signe : (lisez *divisé par*) ou bien $\frac{a}{b}$ (lisez a divisé par b, ou a sur b, ou enfin le quotient de a par b.

6. **Coefficient.** Quand une quantité doit être ajoutée plusieurs fois à elle-même, on abrège l'écriture de la manière suivante : au lieu de $a + a + a$, on écrit $3a$; de même, au lieu de $bc + bc$, on écrit $2bc$. Le nombre placé devant une ou plusieurs lettres devient un facteur et prend le nom de *coefficient*.

Le coefficient peut être fractionnaire, comme dans l'expression $\frac{3}{4}a$ qui signifie $\frac{3}{4} \times a$, ou bien $\frac{3a}{4}$.

7. **Exposant.** Lorsqu'un nombre, représenté par une lettre ou par un chiffre, est multiplié plusieurs fois par lui-même, le produit prend le nom de *puissance*, et on l'indique par un signe placé à droite de cette lettre ou de ce chiffre et un peu en haut ; ainsi au lieu de $a \times a \times a$, on écrit a^3, au lieu de $2 \times 2 \times 2$, on écrit 2^3 : le nombre ^{3} s'appelle *exposant* (lisez a puissance trois, ou a trois.........)

Quand la puissance est indéterminée ou indifférente on la marque par une *lettre* en exposant ; ainsi, a^m signifie que la quantité a doit être élevée à une puissance quelconque m, c'est-à-dire être m fois facteur, et se prononce a puissance m.

On doit bien éviter de confondre le *coefficient* avec l'*exposant*. Les expressions $3a$ et a^3, par exemple, ont une signification bien différente ; car, en supposant $a = 6$, on aura $3a = 3 \times 6 = 18$, tandis que $a^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

Une lettre écrite seule est considérée comme ayant l'*unité* pour coefficient et pour exposant; ainsi a équivaut à $1a^1$.

REMARQUE. On sait que la *racine* d'un nombre est un autre nombre, qui, élevé à une puissance indiquée, reproduit le premier nombre. *Ex.* : La racine 4ème de 81 est un nombre qui, élevé à la quatrième puissance, reproduit 81. Cette racine est 3 parce que $3 \times 3 \times 3 \times 3$ ou 3^4 égale 81.

L'opération par laquelle on cherche ainsi la racine d'un nombre s'appelle l'*extraction de la racine.*

8. **Signe radical.** Enfin, pour indiquer l'extraction des racines, on fait usage du signe $\sqrt{\ }$ qu'on appelle *radical*, et l'on place sur l'ouverture le nombre qui marque le degré de la racine à extraire ; ainsi $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ expriment la racine cubique et la racine cinquième de la quantité a. Ce nombre s'appelle l'*indice* de la racine.

Pour indiquer l'extraction de la racine carrée, on se dispense d'affecter le radical de l'indice ^{2}, et l'on écrit simplement $\sqrt{a}$.

SIGNES DE RELATIONS.

9. **Définitions.** Les signes de relations sont, $:$, $=$ $::$, $>$, et $<$.

$:$ (lisez *est à*) indique un *rapport*, (par quotient) entre deux quantités.

$=$ (lisez *égale*) est le signe de l'égalité. Ex. $a - b = x$.

$::$ (lisez *égale* ou bien *comme*) indique l'égalité de deux rapports, (par quotient). Ex. : $6 : 3 :: 8 : 4$ (lisez 6 *divisé par* 3 *égale* 8 *divisé par* 4, ou bien 6 *est à* 3 *comme* 8 *est à* 4. (Autre Ex. $a : b :: c : d$.)

$< >$ Pour marquer l'inégalité on se sert des signes $>$, $<$; ainsi, $a > b$ signifie et s'énonce a plus grand que b ; $m < n$ indique que m est plus petit que n.

La quantité la plus petite est placée du côté de la pointe.

SIGNES DE GROUPEMENT.

10. **Définitions.** ( ) (parenhèses). [ ] (crochets) ou { } (accolades). — (barre horizontale) et | (barre verticale).

Ces signes indiquent qu'une opération à effectuer concerne toute une expression composée, et non pas seulement un des nombres qui la composent.

Ainsi $(3a + 5b + 7) \times 8$ ou $\overline{3a + 5b + 7} \times 8$

$$\begin{array}{r|l} 3a & 8 \\ 5b & \\ 7 & \end{array}$$

Cette manière d'écrire indique que c'est toute la somme $3a + 5b + 7$ qui doit être multipliée par 8 tandis que $3a + 5b + 7 \times 8$, sans parenthèses, indique que c'est le nombre 7 seul qui doit être multiplié par 8.

SIGNES DE RAISONNEMENT.

11. **Définitions.** Dans les problèmes on emploie quelquefois pour abréger le raisonnement les signes suivants $\therefore$ et $\because$.

Le premier signe $\therefore$ veut dire *donc*, *par conséquent*, etc.

Le second signe $\because$ veut dire *parce que*.

AUTRES NOTIONS INDISPENSABLES.

12. **Expression algébrique**. On appelle *expression algébrique* une lettre isolée ou un ensemble de nombres et de lettres représentant des quantités. Ainsi a, 3ab, 5ad—b, 8a3, $\frac{5a-b}{c-d}$ sont des *expressions algébriques.* On emploie aussi au lieu des mots " expression algébrique " les mots *quantité littérale.*

Une expression algébrique est *entière* quand elle ne renferme l'indication d'aucune division :

$$a^3 - 2ab + b^2 :$$

Une expression algébrique est *fractionnaire* si elle renferme l'indication d'une division :

$$\frac{a-b+8}{2}$$

Elle est *rationnelle* quand elle ne contient aucun radical :

$$a+b-c\ ;\ \frac{a+b+x}{a^2-b^2}$$

Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire :

$$\sqrt[3]{a}-b\ ;\ \sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$$

13. **Formule algébrique.** On appelle *formule algébrique* une égalité entre deux expressions algébriques.

Ex.: $I = \frac{ait}{100}\ ;\ x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\ ; x + b = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$

14. **Terme.** On donne le nom de *terme* à toute quantité algébrique précédée du signe + ou du

signe —. Le terme est dit *positif* quand le signe + le précède, et *négatif* lorsque c'est le signe — ; ainsi $+ 6a^2$, $+ a^3b$, $+ \frac{b}{c}$, $+ \frac{c-d}{3-b}$ sont des termes positifs, tandis que les termes $- 7b$, $-am^3$, $-\frac{3c}{2d}$, $-\frac{6x+3}{11}$ sont négatifs.

Tout terme écrit sans aucun signe est censé avoir le signe + ; ainsi $4ab^2$ est la même chose que le terme positif $+ 4ab^2$.

15. **Monôme**. On appelle *monôme* une expression algébrique qui n'a qu'un seul terme, telle que $-3a$, ou $\frac{b^n}{2}$, ou bien $\frac{2}{4}a^2bc$.

16. **Polynôme**. On donne le nom de *polynôme* en général à toute expression ou quantité algébrique composée de plusieurs termes, et l'on appelle en particulier *binôme* la réunion de deux termes, *trinôme* celle de trois termes ; ainsi $a + b$ et $\frac{3a^2}{c} - \frac{b^2}{4}$ sont des binômes, et $5a^2 - bc + b^2$ est un trinôme.

17. **Degré des Monômes et des Polynômes.** On appelle *degré d'un monôme entier par rapport à une lettre*, l'exposant de cette lettre dans le monôme. —Ainsi $3a^2bx^4$ est du 4ème degré en x. Quand cette lettre n'a pas d'exposant on la regarde comme ayant l'exposant 1 et le monôme est du premier degré.

On appelle *degré absolu*, ou simplement *degré d'un monôme entier* la somme des exposants de toutes les lettres qu'il renferme. Ainsi le monôme $3a^4bx^2$ est du degré $2 + 1 + 4$ ou 7, c'est-à-dire du 7ème degré.

On appelle degré d'un polynôme le degré de celui de ses termes où il est le plus élevé. — Ainsi le polynôme $4x^3 - 7a^4x^2 + 5bx - 1$ est du 3ème degré en x et absolument du 6ème degré.

18. **Termes semblables.** On appelle *termes semblables* les termes composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, quels que soient d'ailleurs leur signe et leur coefficient ; par exemple : $5a^2b$, $-\frac{1}{2}a^2b$, $7a^2b$, sont trois termes semblables, de même $26a^3b^2x$, $8a^3b^2x$ et $-12a^3b^2x$ sont semblables.

19. **Valeur numérique.** Dans les expressions littérales les lettres représentent des valeurs quelconques, mais ces valeurs sont déterminées dans chaque cas particulier, de manière que si l'on remplace chaque lettre par sa valeur et qu'on effectue tous les calculs indiqués, l'expression algébrique sera traduite en un nombre, lequel est la *valeur numérique* de cette expression. Cette valeur numérique sera, selon le cas, entière ou fractionnaire, positive ou négative.

Par exemple, supposons que dans l'expression $4a^2b$ on fasse $a = 9$ et $b = 2$. La *substitution* de ces valeurs particulières donnera

$$4 \times 9^2 \times 2 = 4 \times 81 \times 2 = 648,$$

et l'on dira que 648 est la valeur numérique de l'expression $4a^2b$ pour le cas déterminé.

Soit encore l'expression

$$x = \frac{24a^3 - 2c^2}{3b}$$

Si l'on suppose $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$, la formule

devient $x = \dfrac{24 \times 2^3 - 2 \times 7^2}{3 \times 5}$,

ce qui donne, en effectuant les calculs,

$$\frac{192 - 98}{15} = \frac{94}{15} = 6\,\frac{4}{15};$$

donc la valeur de l'inconnue x est dans ce cas 6 *unités* 4 *quinzièmes*.

QUESTIONNAIRE.

Quel est le but de l'Algèbre ? (1)

Comment l'Algèbre parvient-elle à ce but ? (2)

Définissez les signes algébriques. (2)

Combien peut-on distinguer de signes algébriques ? (3)

Quels signes emploie-t-on pour représenter les quantités ?

A quoi servent généralement les premières lettres de l'Alphabet ? (4)

A quoi servent généralement les dernières lettres de l'Alphabet (**x**, y, z.) ? (4)

Qu'indique le signe 0 (zéro) ? (4).

Comment s'énonce le signe de l'addition ? (5)

Représentez sur le tableau le signe de l'addition ?

Comment s'énonce le signe de la soustraction ? (5)

Comment s'énonce le signe de la multiplication ? (5)

Comment s'énonce le signe de la division ? (5)

Est-il toujours nécessaire de mettre le signe × (multiplié par) entre les lettres d'un produit ? (5)

Qu'est-ce qu'un coefficient ? (6)

Le coefficient est-il toujours un nombre entier ? (6)

Quel nom donne-t-on au produit d'un nombre multiplié plusieurs fois par lui-même ? (7)

Par quel signe indique-t-on la puissance ? (7)

Emploie-t-on toujours un chiffre pour marquer la puissance ? (7)

Les expressions $3a$ et a^3 ont-elles une signification bien différente ? (7)

Quel est l'exposant et quel est le coefficient d'une lettre écrite seule ; par exemple : a ? (7)

Qu'est-ce que la racine d'un nombre ? (7 — Remarque.)

Quelle est la racine 4ème de 81 ? (7 — Remarque.)

Comment appelle-t-on l'opération par laquelle on cherche la racine d'un nombre ? (7 — Remarque.)

Qu'appelle-t-on radical ? (8)

Qu'appelle-t-on indice ? (8)

Qu'indique le signe de relation : ? (9)

Qu'indique le signe = ? (9)

Comment lisez-vous l'expression $a : b :: c : d$? (9)

Par quels signes marque-t-on l'inégalité entre deux quantités ? (9)

Comment appelez-vous les signes qui suivent,

$$(\ ) ;\ \{\ \} ;\ [\ ] ;\ \overline{\quad} ;\ | \ ?\ (10)$$

A quoi servent-ils ? (10)

Comment peut-on exprimer donc en Algèbre ? (11)

Qu'appelle-t-on expression algébrique ? (12)

Qu'appelle-t-on formule algébrique ? (13)

Qu'est-ce qu'un terme ? (14)

Donnez quelques termes positifs. (14)

Qu'est-ce qu'un monôme ? (15)

Qu'est-ce qu'un polynôme ? (16)

Qu'appelle-t-on degré d'un monôme par rapport à une lettre ? (17)

Qu'appelle-t-on degré absolu d'un monôme entier ? (17)

Qu'appelle-t-on degré d'un polynôme ? (17)

Qu'appelle-t-on termes semblables ? (18)

Expliquez ce que l'on entend par la valeur numérique d'une expression algébrique. (19)

EXERCICES

SUR LES SIGNES ALGÉBRIQUES ET SUR LES VALEURS NUMÉRIQUES DES QUANTITÉS LITTÉRALES.

1. Exprimer le produit de la 5me puissance de a par la 2me puissance de b. R. a^5b^2.

2. Indiquer le quotient de la somme des quantités a et b par 3. R. $\frac{a+b}{3}$.

3. Exprimer le produit du quintuple de a par la racine cubique de c. R. $5a\sqrt[3]{c}$.

4. Traduire en langage ordinaire l'expression $\frac{5}{8}a^2x$.

5. Que signifie $3m^2 > 5n^3$?

6. On demande la différence de $5a$ à a^5 dans le cas de $a = 12$.

7. Quels sont les termes semblables dans le polynôme suivant :

$$7a^3b + 2a^2c - 12a^3b - 6b^2 + 4a^2c + a^3b \text{ ?}$$

8. Y a-t-il des termes semblables dans le trinôme $8a^3bc - 2a^3b^2c + 7abc$?

9. Trouver la valeur numérique du monôme $9a^3b^4c$, en supposant $a = 8$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$.

10. Quelle est la valeur numérique du binôme $a^2 - b^2$ pour $a = 23$, $b = 15$?

11. Pour $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 6$, quelle est la valeur numérique du polynôme

$$3a^2b - 2b^2c + 4c^2 - 4a^2d = \text{R.} -5$$

12. Si x représente l'âge d'un père et y celui de son fils, comment représentera-t-on algébriquement la somme de leur âge dans quinze ans ?

CHAPITRE PREMIER.

Addition algébrique. — Soustraction algébrique. — Réduction des termes semblables. — Multiplication. — Division. — Fractions algébriques.

ADDITION ET SOUSTRACTION ALGÉBRIQUES.

20. **Addition — Règle.** *Pour additionner les quantités algébriques, il suffit de les écrire les unes à la suite des autres, en conservant à chaque terme le signe qui le précède.*

Soit, d'abord, à ajouter au monôme a le monôme $(+b)$, on aura pour somme algébrique

$$a + b.$$

Soit, en second lieu, à ajouter au monôme a le monôme $(-b)$ l'on aura

$$a - b.$$

Soit, ensuite, à ajouter au monôme a le polynôme $(b - c + d)$, on aura pour somme algébrique

$$a + b - c + d.$$

21. **Soustraction — Règle.** *Pour effectuer une soustraction algébrique, il faut changer les signes de la quantité à soustraire et l'écrire à la suite de l'autre quantité.*

Soit, d'abord, à soustraire du monôme a le monôme $(-b)$, on aura pour différence algébrique

$$a + b.$$

Soit, en second lieu, à soustraire du monôme a le monôme $(+b)$, on aura pour différence algébrique

$$a - b.$$

Soit, ensuite, à sousıraire du monôme a le polynôme $b - c + d$, on aura pour différence algébrique

$$a - b + c - d.$$

DÉMONSTRATION.

22. **Caractère relatif d'une quantité.** Nous allons maintenant justifier les règles de l'addition et de la soustraction algébriques.

Soit la quantité (b) qu'il s'agit d'ajouter à la quantité (a), ou de retrancher de (a).

Il y a, dans cette quantité (b) deux choses bien distinctes à considérer : l'une est *sa valeur absolue*, l'autre *son caractère relatif.* Faisons $b =$ \$20 ; la valeur absolue de b sera alors \$20. Quel sera son caractère relatif ? Il faut voir quel signe précède (b) ; si c'est $+$, $(+ b)$, ces \$20 auront un caractère positif ; elles seront considérées comme *augmentant* ma fortuue, elles seront une somme que *je possède* ou qui *m'est dûe* ; si, au contraire, (b) était précédé du signe $-$, les \$20 piastres, que la lettre b représente, auraient alors, tout en conservant la même valeur absolue, un caractère négatif ; elles seraient considérées comme *diminuant* ma fortune : ce serait $20 que je dois.

23. Ce que nous disons d'une somme d'argent peut généralement s'appliquer aux autres quantités : par exemple, si $(+ b)$ désigne une distance comptée vers la droite, $(- b)$ désignerait une distance comptée vers la gauche. De même encore

Si	+	désigne	le Nord,	—	désignera	le Sud
"	+	"	l'Est	—	"	l'Ouest
"	+	"	le Haut	—	"	le Bas.
"	+	"	le Passé	—	"	le Futur.

On voit par ce qui précède que les signes $(+)$ et $(-)$ remplissent deux fonctions bien distinctes : 1° celle déjà indiquée (N° 5) 2° celle que nous venons d'expliquer.

24. **En quoi l'addition algébrique diffère de l'adition arithmétique.** On comprendra maintenant, sans difficulté en quoi l'addition et la soustraction algébriques diffèrent de l'addition et de la soustraction arithmétiques.

Dans celles-ci les quantités à ajouter ensemble, ou à soustraire l'une de l'autre, ont toujours le même caractère relatif : j'ajouterai, par exemple, une somme *qui m'est dûe* à une autre somme *qui m'est dûe*, ou bien une somme *que je dois* à une autre somme *que je dois*, mais jamais une somme *que je dois* à une somme *qui m'est dûe* ; ce dernier problème exigerait pour l'arithméticien une soustraction. Les Algébristes, au contraire, ont donné aux deux opérations dont il s'agit une plus grande généralité. Voici comment.

25. **Nature de l'addition et de la soustraction algébriques.** On est convenu d'entendre par l'addition de la quantité b à a, *l'union*, la *combinaison* de b avec a, mais en laissant à la quantité b

qu'on unit à la première a, le caractère, le sens qu'elle avait ; *tout au contraire* demander à soustraire b de a, ce sera demander *l'union*, la *combinaison* de b avec a, mais de telle sorte que b, la quantité que l'on combine avec la première, prenne le caractère opposé à celui qu'elle avait.

26. **Remarque.** Grâce aux conventions précédentes, il ne saurait y avoir de milieu entre l'addition et la soustraction : car, d'une part, toute quantité algébrique se prend avec un caractère déterminé, soit d'augmentation, soit de diminution, et d'une autre part, il faut bien que celui qui veut unir une quantité b à une quantité a se propose *ou de maintenir ou de renverser* le sens de cette quantité b. Or, dans le 1er cas c'est une addition ; dans le 2me c'est une soustraction.

27. **Application des notions précédentes.** Ces notions bien comprises, les règles de l'addition et de la soustraction algébriques se justifient d'elles-mêmes.

A a ajouter b c'est unir, c'est combiner b avec a, tout en laissant à b le caractère qu'il possède. Or, le caractère est indiqué par le signe qui le précède : donc, pour ajouter b à a, on écrira b à la suite de a, en conservant à b le signe (+) ou (—) selon que (+) ou (—) le précède.

Si à	$+a$,	l'on ajoute	$+b$,	l'on aura	$a+b$
" "	$+a$	" "	$-b$	l'on aura	$a-b$
" "	$-a$	" "	$+b$	" "	$-a+b$
" "	$-a$	" "	$-b$	" "	$-a-b$

Pareillement de a soustraire b, c'est unir, c'est combiner b avec a tout en donnant à b un caractère opposé à celui qu'il possédait : or, ce caractère de b est indiqué par son signe : donc, pour soustraire b de a, on écrira b à la suite de a, en changeant, selon le cas, son signe + en — ou son signe — en +.

Si de $+a$	l'on retranche $+b$	l'on obtiendra	$a-b$
" " $+a$	" " $-b$	" "	$-a+b$
" " $-a$	" " $+b$	" "	$-a-b$
" " $-a$	" " $-b$	" "	$-a+b$

28. **Monômes**. Examinons plus en détail le second cas de la soustraction qui, plus que les autres, pourrait embarrasser ceux qui veulent se rendre compte des règles expliquées.

De $+a$, je suppose, on veut soustraire $-b$. Le résultat, disons-nous, sera (No. 21).

$$a + b$$

Supposons que (a) représente ma fortune, $1000, par exemple : alors ($-b$), à cause du signe négatif exprimera (No. 23) une valeur dont le propre est de *diminuer* cette fortune : ce sera, si l'on veut, une dette de $100.

Ceci posé, demander la soustraction de ($-b$) c'est demander que les $100 représentées par ($-b$) ne soient plus comptées à mon désavantage, c'est-à-dire de manière à *diminuer* ma fortune, mais à mon avantage, c'est-à-dire de manière à l'augmenter, il est évident que ma fortune deviendra alors

$$\$1000 + \$100$$

ou

$$a + b$$

ce qui justifie la règle.

Un raisonnement analogue s'applique aux autres cas de la soustraction ou de l'addition.

29. **Polynômes.** Soit maintenant le cas où la quantité à ajouter ou à retrancher est un *polynôme.* Ainsi à a on veut ajouter $b-c+d$, en écrivant :

$$a + b - c + d$$

C'est-à-dire en conservant son signe à chaque terme du trinôme, on conserve à chaque terme du trinôme son caractère relatif, donc le trinôme

$$b - c + d,$$

dans sa totalité, conserve, en s'unissant à la quantité a, son caractère relatif : donc, d'après les définitions, on l'ajoute à la quantité a.

30. De même, supposons que de la quantité a, on veuille soustraire le trinôme

$$b - c + d$$

En écrivant :

$$a - b + c - d$$

C'est-à-dire en renversant le signe de chaque terme de la quantité à soustraire, on donne à chaque terme du trinôme un sens, un caractère opposé au sens, au caractère qu'il avait ; donc le trinôme $b - c + d$, envisagé dans son ensemble et comme un seul tout, prend, en même temps qu'il s'unit à la quantité a, un caractère opposé à celui qu'il avait : donc on retranche le trinôme $b - c + d$ de la quantité a.

REDUCTION DES TERMES SEMBLABLES.

31. **Réduction.** Dans les calculs algébriques on rencontre souvent des termes semblables, et alors il y a lieu d'effectuer l'opération qu'on appelle *réduction*, laquelle consiste à réunir ces termes semblables en un seul.

Ainsi, par exemple, $5a^2b + 8a^2b$ revient évidemment à $13a^2b$.

De même, le polinôme $7ab^3 + 10ab^3 - 12ab^3$ est égal à $5ab^3$.

Enfin, $2ax - 9ax + 6ax - ax$ égale d'abord $8ax - 10ax$, et se réduit ensuite à $-2ax$.

On voit, par ces exemples, que la réduction ne porte que sur les signes et sur les coefficients ; on peut donc énoncer ainsi la règle :

32. **Règle.** Pour opérer la réduction des termes semblables dans un polynôme, *il faut d'un côté réunir en un seul tous ceux qui sont positifs, de l'autre tous les négatifs, ensuite retrancher le plus petit coefficient du plus grand numériquement, et donner au reste le signe du plus grand.*

33. *Remarque.* L'ordre des termes dans un polynôme est indifférent ; ainsi l'on peut écrire également $8a^2b + 4b^3 + 2a^3 - 5ab^2$, ou $2a^3 + 8a^2b - 5ab^2 + 4b^3$; cependant il vaut mieux disposer les termes de manière que les exposants d'une même lettre aillent en croissant ou en décroissant : c'est ce qu'on appelle *ordonner* le polynôme ; quelquefois même c'est indispensable. Le polynôme ci-dessus, écrit de la manière suivante : $2a^3 + 8a^2b - 5ab^0 + 4ab^3$, est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a et d'après les puissances croissantes de b.

34. *Remarque.* Au lieu d'effectuer l'addition de plusieurs polynômes, on se borne quelquefois à l'indiquer en renfermant chacun d'eux entre deux parenthèses ( ) ou entre deux crochets [ ], et en les réunissant les uns aux autres par le signe +.

Ainsi l'addition des trois polynômes

$$12a^3 - 9b^2, \ -7a^3 + 5ab^2, \ 3a^3 - 8b^3 + 4$$

est indiquée comme il suit :

$$(12a^3 - 9b^2) + (-7a^3 + 5ab^2) + (3a^3 - 8b^3 + 4).$$

35. *Remarque IV.* Quand on écrit plusieurs polynômes dont on veut faire l'addition et qu'ils contiennent des termes semblables, il est avantageux de les disposer les uns au-dessous des autres, de manière que les termes semblables

oient dans une même colonne, parce que la réduction est plus facile; ainsi pour additionner es trois polynômes suivants, on les disposera de a sorte :

$$\begin{array}{lrrrr} & 12a^3 & -\ 9ab^2 & & \\ & -\ 7a^3 & +\ 5ab^2 & +\ b^3 & \\ & +\ 3a^3 & -\ 6ab^2 & -\ 8b^3 & +\ 4 \\ \hline \text{Somme...} & 8a^3 & -\ 10ab^2 & -\ 7b^3 & +\ 4 \end{array}$$

36. *Remarque V.* Au lieu d'effectuer la sous- raction algébrique, on se contente quelquefois le l'indiquer en plaçant la quantité à soustraire ntre deux parenthèses et faisant précéder la pre- nière parenthèse du signe —; ainsi, pour expri- ner que la quantité $a^2 - 2ab + b^2$ doit être re- ranchée du binôme $m + n$, on écrit :

$$m + n - (a^2 - 2ab + b^2).$$

37. Les élèves doivent bien se rappeler que le igne —, placé devant la parenthèse, affecte tous es termes qui y sont renfermés, et non pas le remier terme seulement.

C'est ainsi que l'expression $a - (m - n)$ est la nême chose que $a - (+ m - n)$ laquelle se réduit, n effectuant l'opération, à $a - m + n$.

De même $a - (-x + y)$ donne $a + x - y$.

QUESTIONNAIRE.

Donnez la règle de l'addition algébrique. (20)

Si vous ajoutez au monôme a le monôme $(+ b)$ quel sera e résultat ? (20)

Si vous ajoutez au monôme a le monôme $(- b)$ quel sera e résultat ? (20)

Si vous ajoutez au monôme a le polynôme $b - c + d$ uel sera le résultat (20)

Donnez la règle de la soustraction algébrique. (21)

Si vous soustrayez du monôme a ce monôme $(- b)$ quel ra le résultat ? (21)

Si du monôme a vous soustrayez $(+ b)$ quel sera le résul- t? (21)

Si du monôme a vous soustrayez le polynôme $(b - c + d$ quel sera le résultat ? (21)

Quelles sont les deux choses distinctes à bien considére dans toute quantité, dans la quantité (b) par exemple ? (2

Qu'est-ce que la valeur absolue d'une quantité ? (22)

Qu'est-ce que la valeur relative ou le caractère relatif? (2

Si le signe (+) désigne le Nord que désignera le sig (—) ? etc., (23)

En quoi l'addition et la soustraction algébriques diff rent elles de l'addition et de la soustraction arithmétiques (24)

Quelle est la nature de l'addition et de la soustraction al gébrique ? (25)

Appliquez les notions de l'additiou et de la soustractio aux différents cas, d'abord au cas où l'on doit ajouter + a la quantité + b ... ect. (27)

Cas des monômes. (28)

Cas des polynômes. (29) (30)

Quand y a-t-il lieu d'effectuer l'opération qu'on appell réduction des termes semblables ? (31)

Donnez la règle de la réduction des termes semblabl (32).

Qu'appelle-t-on ordonner un polynôme ? (33)

Comment peut-on disposer les polynômes avant de fai l'addition ? (35)

Au lieu d'effectuer la soustraction que peut-on se conte ter de faire ? (36)

Le signe moins (—) placé devant une parenthèse affect t-il tous les termes qui y sont renfermés ? (37)

EXERCICES ET PROBLÈMES

sur l'addition algébrique.

13. Additionner les polynômes $(7a - 6b)$ et $(5a$ $- b^3 + c)$.

14. Ajouter $13am^2 - 9a^2m + a^3$ avec $7a^2m$ $+ 5am^2 - a^3b$.

15. $3ab + x - y$.
$4c - 2y + x$.
$5ab - 3c + d$.
$4y + x^2 - 2y$.

16. Additionner $a + \sqrt{b}$ avec $a - \sqrt{b}$.

17. On met dans une bourse d'abord une somme a, ensuite une autre somme b, et plus tard on en retire une somme c ; que reste-t-il dans la bourse ?

18. Un négociant a gagné, pendant cinq années consécutives, une somme a pendant chaque année ; la sixième année il perd une somme b ; les trois années suivantes il gagne chaque année une somme c. Si en commençant les affaires il avait x piastres, comment exprimera-t-on sa situation après les neuf années ?

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LA SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE.

19. Du polynôme $9a + 3b - c$ retrancher $7a - 5b$.

20. Effectuer la soustraction indiquée $5a^2 - 2a - (3a^2 - 8a - 4)$.

21. De $15m^3 - 8n^2 + 5$ ôter $9m^3 + 4n^2 - 7n - {}^3/_4$.

22 x exprimant l'âge actuel d'une personne, quel était son âge il y a 13 ans ?

23. La somme de deux quantités est s, la plus petite x; exprimer la plus grande.

24. De $7x^2 - 2x + 5$
ôter $3x^2 + 5x - 1$.

25. $12a^2 - 3a + b - 1$
ôter $6a^2 + a - 2b + 3$.

26. $5y^2 - 4y + 3a$
ôter $6y^2 - 4y - a$.

$5a - b + 3c =$

MULTIPLICATION.

Multiplication des monômes.

38. **Monôme positif.** Supposons d'abord que les facteurs monômes soient positifs, pour n'avoir pas encore à nous occuper des signes.

39. **Règle des coefficients.** *Le coefficient du produit se forme en multipliant entre eux les coefficients numériques des facteurs monômes, d'après les règles ordinaires de l'arithmétique.*

Ainsi le produit de $6a$ par $4b$ sera $24ab$; en effet $6a \times 4b$ revient à $6 \times a \times 4 \times b$; ou bien en changeant l'ordre des facteurs, $6 \times 4 \times a \times b = 24ab$.

Nous savons, de plus, que le produit de plusieurs facteurs reste le même dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication, c'est-à-dire, que

$$a \times b \times c = b \times a \times c = b \times c \times a.$$

40. **Règle des lettres.** *Il faut écrire au produit toutes les lettres qui entrent dans chacun des facteurs monômes, et les placer les unes à la suite des autres dans un ordre quelconque.*

Ainsi le produit de a^2b par mn sera a^2bmn ou bien mna^2b.

41. **Règle des exposants.** Quand une même lettre se trouve dans les divers facteurs, on ne l'écrit qu'une fois au produit, mais on lui donne pour exposant la somme des exposants qu'elle avait dans les facteurs réunis.

Soit à multiplier a^3b^2c par a^2bc, le produit sera $a^5b^3c^2$.

En effet, $a^3b^2c \times a^2bc$ est égal à $aaabbc \times aabc$, ou bien, en intervertissant l'ordre des facteurs, à $aaaaa \times bbb \times cc$; or, d'après la signification des exposants, nº 5, ce dernier produit revient à celui qui est indiqué ci dessus $a^5b^3c^2$.

42. **Règle générale.** *Pour multiplier deux monômes, il faut d'abord faire le produit des coefficients numériques, écrire à sa suite, comme facteurs, les lettres communes aux deux monômes donnés, après avoir ajouté leurs exposants, enfin mettre telles quelles les lettres qui sont différentes.*

D'après cette règle on aura :

$$12a^4b^2c \times 3a^3bm^2 = 36a^7b^3cm^2,$$

$$\text{et } \frac{2}{3}a^2b \times \frac{4}{5}\ am = \frac{8}{15}a^3bm.$$

43. **Règle des signes.** *Le produit est positif toutes les fois que les deux facteurs ont le même signe, il est négatif quand les facteurs sont de signes contraires.*

44. **Démonstration.** La démonstration de cette règle sera divisée en deux parties ; dans la première, nous considèrerons le cas où le multiplicateur est positif, le multiplicande étant quelconque, et ensuite le cas où le multiplicateur est négatif.

1º Dans le premier cas tout s'explique facilement si l'on admet qu'un multiplicateur positif, b par exemple, indique qu'il faut répéter le multiplicande b fois, en laissant à ce multiplicande le caractère, positif ou négatif, qu'il possède ; en d'autres mots, le multiplicateur positif indique l'*addition* (Nº 20) du multiplicande à lui-même b fois.

Ceci posé, soit $+a$ à multiplier par $+b$: on aura, en supposant, pour fixer les idées, que $b =$

$$a + a + a + a + a = 5 \text{ fois } a = 5a = ba \text{ ou } ab$$

De même, multiplier $-a$ par $+b$, c'est encore ajouter à elle-même la quantité négative $-a$ autant de fois que l'indique la valeur absolue du multiplicateur b; donc, en faisant encore $b =$

$$-a \times (+b) = -a - a - a - a - a = 5 \text{ fois } -$$
$$= -5a = -ba \text{ ou } -ab.$$

2° En second lieu, un multiplicateur négatif $-b$ par exemple, indique qu'il faut répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans la valeur absolue du multiplicateur, c'est-à-dire b fois, mais *en changeant* le caractère du multiplicande de positif qu'il était en négatif, ou de négatif en positif; en d'autres mots, le multiplicateur négatif $-b$ indique qu'il faut soustraire (N° 21) le multiplicande b fois.

Ceci posé soit $+a$ à multiplier par $-b$ on aura, faisant encore $b = 5$,

$$a \times (-b) = -a - a - a - a - a = 5 \text{ fois } -$$
$$a = -5a = -ba = -ab$$

De même, multiplier $-a$ par $-b$ revient à soustraire $-a$ autant de fois que l'indique b et l'on aura

$$-a \times -b = +a + a + a + a + a = 5 \text{ fois}$$
$$+a = 5a = +ba = +ab$$

45. Or, en s'attachant à ce principe, savoir : *maintenir* ou *renverser* le *caractère*, c'est-à-dire, le signe du multiplicande, selon que le multiplicateur est positif ou négatif, on arrivera toujours à ce résultat que

$$+a \times +b = +ab,$$
$$-a \times -b = +ab,$$
$$+a \times -b = -ab,$$
$$-a \times +b = -ab,$$

on l'énonce en disant : + multiplié par + ou multiplié par — donne + ; et + multiplié r — ou — multiplié par + donne —.

MULTIPLICATION

DES POLYNÔMES.

46. **Règle.** *Pour faire le produit d'un polynôme r un autre, multipliez successivement tous les mes du multiplicande par chacun des termes du ltiplicateur, en observant la règle des monômes, ensuite opérez la réduction des termes semblables e peuvent renfermer les produits partiels.*

Appliquons cette règle à l'exemple suivant :

$$\begin{array}{lllllll}
\text{ltiplicande} & 5a^3 & -\,7a^2b & +\,3ab^2 & +\,4b^3 & & \\
\text{ltiplicateur} & 3a^2 & -\,8ab & -\,b^2 & & & \\
\hline
\text{partiels} \left\{ \right. & 15a^5 & -\,21a^4b & +\,9a^3b^2 & +\,12a^2b^3 & & \\
 & & -\,40a^4b & +\,56a^3b^2 & -\,24a^2b^3 & -\,32ab^4 & \\
 & & & -\,5a^3b^2 & +\,7a^2b^3 & -\,3ab^4 & -\,4b^5 \\
\hline
\text{al} & 15a^5 & -\,61a^4b & +\,60a^3b^2 & -\,5a^2b^3 & -\,35ab^4 & -\,4b^5
\end{array}$$

Pour former ce produit on a d'abord ordonné deux facteurs par rapport à a, après quoi on multiplié tous les termes du multiplicande par premier terme $3a^2$ du mu... ...ur, ce qui a nné $15a^5 - 21a^4b + 9a^3b^2$ ... $^2b^3$; ensuite a fait le produit de tous les ... du multicande par le 2ᵉ terme $-\ 8ab$ du multiplicateur l'on a obtenu $-\ 40a^4b\ +\ 56a^3b^2 - 24a^2b^3$ $32ab^4$, qu'on a écrit au-dessous de la première ne en faisant correspondre les termes semblas ; de même, le produit du multiplicande par 3ᵉ terme $-\ b^2$ du multiplicateur a fourni la ligne $-\ 5a^3b^2 + 7a^2b^3\ \ 3ab^4 - 4b^5$ qu'on a sée sous les autres dans l'ordre indiqué ; enfin, la réduction opérée sur tous les produits partiel en ayant soin de *bâtonner* les termes semblabl a donné le produit demandé.

47. **Démonstration.** En effet de même qu'e arithmétique la multiplication, par exemple, d 3657 par 543 revient à répéter le multiplicande fois, plus 40 fois, ensuite 500 fois, ce qui don trois produits partiels, de même en algèbre o fait le produit du multiplicande par chacun d termes du multiplicateur.

48. Avant d'effectuer la multiplication, il e avantageux d'ordonner les deux polynômes p rapport à la même lettre : ensuite on place l produits partiels de manière que les termes sem blables soient sur une même colonne ; par là l réduction est plus facile.

49. **Remarque.** Quand les deux facteurs so ordonnés par rapport à la même lettre, le pr duit se trouve nécessairement ordonné de l même manière ; mais ce qu'il importe de remar quer, c'est que *dans la multiplication de deu polynômes, ordonnés de la même manière, le pr mier et le dernier terme du produit sont sans rédu tion possible.* En effet, le premier terme du pro duit provient de la multiplication du premie terme du multiplicateur. Or, l'exposant de l lettre principale dans le premier terme du multi plicande, et l'exposant de la lettre principale dan le premier terme du multiplicateur, sont plus éle vés, chacun, par rapport à cette lettre que dan tous les autres termes.

Par conséquent l'exposant de la lettre princi cipale dans le produit de ces deux termes ser plus élevé que dans tous les autres termes.

Par une raison analogue, le dernier produi monôme qui résulte des deux derniers termes de facteurs, sera le seul qui ne contienne pas la let principale, ou il la contiendra avec le plus ible exposant.

Cette remarque importante sert de base à la éorie de la division.

50. **Mettre en facteur commun.** D'après la gle de la multiplication, quand un polynôme été multiplié par un monôme, ce monôme se ouve facteur dans chacun des termes du proit ; ainsi $2a^2 - 3ab + b^2$ multiplié par m onne $2a^2m - 3abm + b^2m$.

Réciproquement, lorsque tous les termes d'un lynôme contiennent des facteurs communs, on ut considérer le monôme résultant de ces derers comme un multiplicateur introduit dans le lynôme et que l'on peut en séparer de nouau. C'est ainsi qu'après avoir reconnu que us les termes du polynôme ci-dessus $2a^2m - bm + b^2m$ contiennent le facteur m, on l'envera pour l'écrire en dehors des parenthèses i renfermeront le polynôme restant, comme -après :

$$m(2a^2 - 3ab + b^2).$$

On trouverait de même que le polynôme

$$5a^2x^3 + 15a^3b^2 - 10a^4x,$$

nt les termes contiennent le facteur commun ^{2}, revient à

$$5a^2(x^3 + 3ab^2 - 2a^2x).$$

Enfin, on a évidemment $a^2x^2 - x^2 = x^2(a^2 - 1)$.

Effectuer ces décompositions, c'est ce qu'on mme en algèbre *mettre en facteur commun.*

51. Quand on veut indiquer la puissance d'un lynôme, on le renferme entre deux parenthè, et l'on place l'exposant en dehors et en haut la dernière parenthèse ; ainsi $(a + b - c)^2$

indique le cube ou la 3e puissance du trinôme $a + b - c$.

QUELQUES FORMULES FRÉQUEMMENT EMPLOYÉES.

52. **Multiplications importantes :**

1°

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \qquad \\
+ ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

Ce résultat donne lieu à la formule :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En langage ordinaire :

Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le double produit du premier par le second, plus le carré du second.

53. **Carré de la différence de deux nombres :**

$$\begin{array}{r}
a - b \\
a - b \\
\hline
a^2 - ab \qquad \\
- ab + b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2
\end{array}$$

Ce résultat donne lieu à la formule :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En langue ordinaire.

Le carré de la différence de deux nombres est égal au carré du premier, moins le double produit du premier par le second, plus le carré du second.

54. **Produit de la somme de deux nombres ar leur différence :**

$$\begin{array}{lll} a & + b & \\ a & - b & \\ \hline a^2 & + ab & \\ & - ab & - b^2 \\ \hline a^2 & - b^2. & \end{array}$$

Ce résultat donne lieu à la formule :

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2,$$

En langage ordinaire :

Le produit de la somme de deux nombres par ur différence est égal à la différence des carrés de s deux nombres.

Réciproquement, la différence de deux carrés ourra toujours être considérée comme provenant du produit de la somme par la différence s deux racines ; ainsi $m^2 - n^2 = (m + n)\ (m - n)$.

QUESTIONNAIRE.

Donnez la règle des coefficients dans la multiplication s monômes. (39)
Donnez la règle des lettres. (40)
Donnez la règle des exposants. (41)
Donnez la règle générale. (42)
Donnez la règle des signes. (43)
En combien de parties se divise la démonstration de cette gle ? (44)
Comment s'explique facilement le premier cas ? (44, 1°)
Que considère-t-on dans le second cas ? (44, 2°)
Comment énonce-t-on le résultat de toutes ces règles ? (45)
Donnez la règle pour la multiplication des polynômes. (46)
Démontrez cette règle. (47)
Est-il avantageux d'ordonner les deux polynômes avant effectuer la multiplication ? (48)
Qu'appelle-t-on mettre en facteur commun ? (50)
Comment indique-t-on la puissance d'un polynôme ? (51)

A quoi est égal le carré de la somme de deux nombres ? (52)

A quoi est égal le carré de la différence de deux nombres ? (53)

A quoi est égal le produit de la somme de deux nombr par leur différence ? (54)

Comment peut-on considérer la différence de deux carrés ? (54)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LA MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

27. Quel est le produit de $14a^3b^2c$ par $9abdm$

28. Effectuer le produit de $8ab^3y$ par $-7a^2c$

29. Faire le produit de $-5ab^2x^2$ par $-12am$

30. Trouver le produit des trois facteurs $(5ab$ $(-3bc)\ (+7ad)$.

Effectuer les opérations ci-après indiquées :

31. $(13ab)\ (-a^2),\ +7a^2(ab)$.

32. $(8a-3b+5c)\ 7a$.

33. $2a\ (a^3-5a^2b+3ab^2-b^3)$.

34. $(a^2-1)\ (a^4-a^2b+b^2)$.

$(3a^2-5a^2b-\frac{1}{2}ab^2)\ (-2a^2+3ab-b^2)$.

$ab\ (a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

35. Décomposer x^2-y^2 en deux facteurs binômes.

36. Quels sont les deux facteurs binômes numériques qui ont donné le produit $100-16$?

DIVISION ALGÉBRIQUE.

55. **Division algébrique—But de la division** *Etant donnés le produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, trouver l'autre facteur.* Donc **pour arriver à la pratique et à la théorie de la**

ivision algébrique, il faut se rappeler les lois ue nous avons établies ci-dessus dans la *multi-lication algébrique.*

Division des monômes.

Exemple. Divisez $18a^5b^3c$ par $6a^3b^2$; nous don-e pour quotient $3a^2bc$, ce qu'on exprime ainsi :

$$\frac{18a^5b^3c}{6a^3b^2} = 3a^2bc.$$

56. **Démonstration.** En effet, d'après la défi-ition ci-dessus, le dividende $18a^5b^3c$ est le pro-uit du diviseur $6a^3b^2$ par le quotient demandé ; r, d'après les règles de la multiplication des onômes, le signe, le coefficient, les lettres et s exposants du produit dépendent de ceux des eux facteurs, et, en se rappelant ces règles, on n tirera les déductions suivantes :

1° Le produit $18a^5b^3c$ étant positif, les deux acteurs qui l'ont formé sont de même signe (N° 43) ; donc le quotient sera positif comme le iviseur $6a^3b^2$.

2° Le coefficient 18 du dividende étant formé N° 39) de la multiplication du coefficient 6 du iviseur par le coefficient inconnu du quotient, e dernier s'obtiendra en divisant 18 par 6, et era 3.

3° L'exposant ^{5} de la lettre a dans le dividende rovient (N° 41) de l'addition de l'exposant ^{3} de a u diviseur à l'exposant inconnu de la même ettre dans le quotient ; on aura donc $5 - 3 = 2$ our l'exposant de a au quotient.

Par la même raison, b^3 du dividende, divisé par ^{2} du diviseur, donnera au quotient $b^{3-2} = b^1 = b$.

4° Enfin, la lettre c (N° 40), qui se trouve au dividende sans être dans le diviseur, doit se trouver telle quelle au quotient.

Cette démonstration conduit aux règles suivantes pour la division des monômes.

57. **Règle des signes.** Quand le dividende et le diviseur ont même signe, le quotient est positif; si le dividende et le diviseur sont de signes contraires, le quotient est négatif.

58. **Règle des coefficients.** Le coefficient du quotient s'obtient en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur.

59. **Règle des lettres.** Il peut se présenter trois cas : 1° Une lettre est au dividende sans être au diviseur, on l'écrit alors telle quelle au quotient ; 2° une lettre est au diviseur sans être au dividende, la division est alors impossible, (N° 62) ; 3° enfin une lettre se trouve au dividende et au diviseur, on se conforme alors à ce qui est dit dans la règle suivante.

60. **Règle des exposants.** Pour chaque lettre commune aux deux facteurs, on forme l'exposant du quotient en retranchant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Nous verrons (N° 64) quelques cas spéciaux.

61. **Application de ces règles.** Pour l'application de ces règles, divisons

$$54a^6b^5c^2mx^2 \text{ par } -9a^4b^2c^2x\,;$$

nous aurons $\dfrac{54a^6b^5c^2mx^2}{-9a^4b^2cx^2} = -6a^2b^3mx.$

(*Voir les exercices nos* 41, 42, 43, 44.)

62. **Division impossible.** Nous venons de dire (N° 59, 2°) que la division est impossible quand le diviseur contient une ou plusieurs lettres qui

e font pas partie du dividende ; dans ces cas, n se borne à indiquer la division, en mettant expression sous forme fractionnaire, comme ci- près :

$$\frac{12a^2b}{3ac}$$

On peut simplifier en supprimant les facteurs ommuns aux deux termes de la fraction : ainsi, étant commun aux deux termes de la fraction $\frac{2a^2b}{ac}$, celle-ci se réduit à

$$\frac{4ab}{c}.$$

Division des polynômes.

63.—**Division des Polynomes.**—Pour trouver règle de la division des polynômes, supposons ue le dividende, le diviseur et le quotient in- nnu soient ordonnés suivant les puissances écroissantes d'une même lettre. Le produit du viseur par le quotient doit reproduire le divi- ende ; donc le premier terme du dividende égale produit du premier terme du diviseur par premier terme inconnu du quotient. Pour ouver le premier terme du quotient, il suffira diviser le premier terme du dividende par le emier terme du diviseur. Si du dividende on tranche le produit du diviseur par le premier rme obtenu du quotient, le reste contiendra le oduit du diviseur par tous les autres termes connus du quotient. Pour obtenir les autres rmes du quotient, il faut donc diviser ce pre- ier reste par le diviseur ; ce que nous venons dire permet de trouver le premier terme de quotient qui est le second du quotient cherché.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{ll}
 & 24a^7b - 118a^5b^3c^2 + 44a^3b^5c^4 + 160a^2b^6c^5 \\
\text{1er Produit partiel.} & \mp 24a^7b \mp 12a^6b^2c \pm 96a^5b^3c^2 \\
 & \quad - 12a^6b^2c - 22a^5b^3c^2 \\
\text{2e Produit partiel.} \ldots & \quad \pm 12a^6b^2c \pm 6a^5b^3c^2 \mp 48a^4b^4c^3 \\
 & \qquad - 16a^5b^3c^2 - 48a^4b^4c^3 \\
\text{3e Produit partiel} \ldots & \qquad \pm 16a^5b^3c^2 \pm 8a^4b^4c^3 \mp 64a^3b^5c^4 \\
 & \qquad\quad - 40a^4b^4c^3 - 20a^3b^5c^4 \\
\text{4e Produit partiel} \ldots & \qquad\quad \pm 40a^4b^4c^3 \pm 20a^3b^5c^4 \mp 160a^2b^6c^5 \\
 & \qquad\qquad \text{Reste} \quad 0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
4a^3 + 2a^2bc - 16ab^2c^2 \\
\hline
6a^4b - 3a^3b^2c - 4a^2b^3c^2 - 10ab^4c^3
\end{array}
\end{array}
$$

Dans la pratique cette opération on adop une disposition analog à celle de la division d nombres absolus et on dispense d'écrire sur ligne de chaque res partiel les termes du vidende qui n'ont pas altérés ou ne doivent p l'être dans l'opérati partielle que l'on exécu

Pour faire la divisio des polynômes, *ordon le dividende et le diviseu par rapport aux puissa ces décroissantes d'une m me lettre ; diviser le pr mier terme du dividen par le premier diviseu ce qui donne le premi terme du quotient. Fai le produit du diviseur p le terme obtenu ; l'écri sous le dividende ; chan les signes de ce produit réduire ses termes av ceux du dividende. Ord ner le reste, opérer com on vient de le faire sur dividende ; et ainsi de sui jusqu'à ce qn'on obtien un reste nul*, auquel c on dit que la division fait exactement, *ou reste d'un degré inféri à celui du diviseur*, a uel on arrête ordinairement l'opération dans e cas.

Quand on arrive à un reste qni est d'un degré nférieur à celui du diviseur, par rapport à la ettre ordonnatrice, la division est impossible, à e point de vue que le dividende n'est pas égal u produit du diviseur par le quotient; autrement le premier terme de chaque reste serait ivisible par le premier du diviseur, ce qui n'a as lieu pour le reste que nous considérons. ouvent on complète le quotient par une fraction algébrique dont le numérateur est le reste, t dont le dénominateur est le diviseur.

Il n'est pas toujours nécessaire de mener l'opération aussi loin pour reconnaître qu'elle est npossible. Quand la division est possible, et que ividende, diviseur et quotient, sont ordonnés uivant les puissances d'une même lettre, le premier terme du dividende égale le produit du remier terme du diviseur par le premier terme u quotient; le dernier terme du dividende est e produit du dernier terme du diviseur par le ernier terme du quotient. Or, on peut ordonner ar rapport à une lettre quelconque commune u dividende et au diviseur; donc, si la division st possible, les termes du dividende qui contiennent une lettre commune au plus haut ou au lus haut ou au plus faible exposant doivent re respectivement divisibles par les termes du iviseur qui contiennent cette lettre au plus aut ou au plus faible exposant. Cette observaon s'applique aux dividendes partiels.

Le degré du quotient, quand la division est ossible, égale la différence entre le degré du ividende et le degré du diviseur. Si la division est pas possible, et si on ordonne le dividende le diviseur par rapport aux puissances croisntes, on verra qu'en continuant indéfiniment les opérations, le degré du quotient par rapport à cette lettre croît indéfiniment.

De l'exposant zéro et de l'exposant négatif.

64. $a^0 = 1$. La division algébrique donne naissance à certaines quantités qui ont besoin d'une interprétation particulière : ce sont les expressions a^0 et a^{-n}, que nous allons examiner.

1° *Toute quantité affectée de l'exposant zéro représente l'unité*, c'est-à-dire qu'on aura toujours

$$a^0 = 1.$$

Nous pouvons supposer que l'expression a^0 provient d'une division dans laquelle l'exposant du diviseur était égal à l'exposant du dividende. C'est ainsi que a^0 peut être considéré comme le quotient de

$$\frac{a}{a} \text{ ou de } \frac{a^2}{a^2}, \frac{a^3}{a^3}, \frac{a^4}{a^4}, \frac{a^5}{a^5}, \text{......ect......} \frac{a^m}{a^m};$$

Ceci est une conséquence de la *règle* des exposants (N° 60).

Or, on sait, d'un autre côté, que toute quantité divisée par elle-même a l'unité pour quotient.

$$\text{Ainsi } \frac{a^2}{a^2} = 1, \frac{a^3}{a^3} =, \frac{a^4}{a^4}\ 1 = 1\ ; \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Il suit évidemment de là que

$$a^0 = 1$$

65. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 2° *Toute quantité affectée d'un exposant négatif représente une fraction dont le numérateur est l'unité, et qui a pour dénominateur cette même lettre avec son exposant positif;* ainsi

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \text{ et en général } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

DÉMONSTRATION. La règle des exposants (N° 60) appliquée, par exemple, à $\frac{a^2}{a^5}$ nous montre que $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$. Or, en divisant les deux termes de la fraction $\frac{a^2}{a^5}$ par le numérateur a^2 on trouve $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$

$$\therefore a^{-3} = \frac{1}{a^3}. \text{ et en général}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Remarque.—De ce qui précède on voit clairement, 1° que le quotient, par exemple, de $\frac{a^2}{a^2}$ peut s'écrire a^0, ou bien simplement 1 ;

2° Que le quotient, par exemple, de $\frac{a^3}{a^5}$ peut s'écrire a^{-2} ou simplement $\frac{1}{a^2}$.

QUESTIONNAIRE.

Quel est le but de la division algébrique ? (55)
Donnez un exemple. (55)
Démontrez cette règle. (56).
Donnez la règle des signes. (57)
Donnez la règle des coefficients. (58)
Donnez la règle des exposants. (60)
Donnez la règle des lettres. (59)
Quand la division est-elle impossible ? (62)
Donnez la règle de la division des polynômes. (63)
Que représente une quantité affectée de l'exposant zéro ? (64)
Que représente une quantité affectée d'un exposant négatif? (65)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LA DIVISION ALGÉBRIQUE.

37. Diviser $72a^5b^3$ par $9a^3b$.

38. Diviser $35a^3b^2c$ par $-7a^2c$.

39. Diviser $-48a^7b^5c^2x$ par $12a^4b^3x$.

40. Diviser $-56a^9b^7c^3x^2$ par $-8a^5b^3c^3$.

41. Diviser $12x^5 - 13x^4 - 34x^3 + 39x^2$ par $4x^2 - 7x$.

42. Diviser $x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x$ par $x^2 - {}^1/_2\,x$.

43. Diviser $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ par $a + b$.

44. A quoi sont équivalentes les expressions a^0, b^0 ?

45. A quoi se réduit l'expression $\frac{a^0 + b^0 + x^2}{3}$?

46. Trouver la valeur de a^{-2} pour $a = 8$.

FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

66. **Définition.** On donne le nom de *fraction algébrique* ou *fraction littérale* à l'indication, entre deux monômes ou entre deux polynômes, d'une division, qui, en général, ne peut s'effectuer exactement ; telles sont les expressions

$$\frac{a}{b},\qquad \frac{a^2 - b^2}{m + n},\qquad \frac{3x^2}{x^3 - 2x + 2}.$$

Tous les principes et toutes les règles propres aux fractions numériques sont applicables aux fractions littérales et reposent sur cette même proposition fondamentale : *que l'on peut toujours multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par une même quantité sans altérer la valeur de cette fraction*, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\frac{am}{bm} = q, \text{ ou bien } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

On déduit de ce principe la simplification des fractions algébriques, ainsi que la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

67. **Simplification.** Elle consiste à débarrasser les deux termes d'une fraction de tous les facteurs qui leur sont communs. Ainsi, on aura

$$\frac{15a^5cx^3}{20a^3x^4} = \frac{3.5.a^3.a^2.c.x^3}{4.5.a^3.x^3.x} = \frac{3a^2c}{4x}$$

par la suppression de $5a^3x^3$.

De même, $\frac{a^2 - 4b^2}{2a + 4b}$, qui est la même chose (n° 54) que

$$\frac{(a + 2b)(a - 2b}{2(a + 2b)},$$

donne, par la suppression du facteur commun $a + 2b$,

$$\frac{a^2 - 4b^2}{2a + 4b} = \frac{a - 2b}{2}.$$

68. **Réduction au même dénominateur.** On effectuera cette réduction en multipliant en général les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres. Il ne faut pas négliger le cas où des facteurs communs aux divers dénominateurs permettraient d'obtenir un dénominateur commun plus

simple en prenant le plus petit multiple. Alors le dénominateur commun à plusieurs fraction se composera *de tous les facteurs qui entrent dans les dénominateurs des fractions données, pris une seule fois, mais avec l'exposant le plus élevé.* Ainsi, soit à réduire au même dénominateur les fractions suivantes :

$$\frac{m}{3a^3c^2} \qquad \frac{x}{4a^2b^2} \qquad \frac{n^2}{12bc^4}$$

Pour former le plus petit multiple qui soit divisible par chacun des trois dénominateurs ci-dessus, nous prendrons tous les facteurs différents que contiennent ces dénominateurs, lesquels sont 3, 4, a, b, c, et nous leur donnerons l'exposant qu'ils ont dans le terme où cet exposant est le plus élevé pour chacun d'eux, ce qui fournira le produit suivant pour le dénominateur commun aux fractions proposées :

$$3 \times 4 \times a^3 \times b^2 \times c^4 = 12a^3b^2c^4.$$

Maintenant, pour effectuer la réduction démandée, il suffira de multiplier les deux termes de chaque fraction par le quotient qui existe entre le dénominateur commun $12a^3b^2c^4$ et son dénominateur propre, c'est-à-dire qu'on multipliera les deux termes de la première par $4b^2c$, les deux termes de la seconde par $3ac^4$, et les deux termes de la troisième par a^3b.

Alors les fractions proposées deviendront

$$\frac{4b^2c^2m}{12a^3b^2c^4} \qquad \frac{3ac^4x}{12a^3b^2c^4} \qquad \frac{a^3bn^2}{12a^3b^2c^4}.$$

69. **Addition des fractions.** *Pour ajouter des fractions entre elles, il faut les réduire d'abord au même dénominateur, faire ensuite la somme des*

numérateurs et donner à cette somme le dénominateur commun ; ainsi :

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}+\frac{x}{y}=\frac{any}{bny}+\frac{bmy}{bny}+\frac{bnx}{bny}=\frac{any+bmy+bnx}{bny}.$$

70. **Soustraction des fractions.** *La soustraction ne peut s'opérer par les numérateurs qu'après toutefois que les deux fractions ont été réduites au même dénominateur ;* on aura donc

$$\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\frac{an}{bn}-\frac{bm}{bn}=\frac{an-bm}{bn}.$$

71. **Multiplication des fractions.** *On fait le produit de plusieurs fractions en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{m}{n}$; représentons la valeur de la première par p, celle de la seconde par q, et posons $\frac{a}{b}=p$, $\frac{m}{n}=q$,

ce qui donne $a=bp$ et $m=nq$.

Mais si les deux quantités a et m sont respectivement égales aux deux autres bp et nq, le produit des deux premières égalera aussi le produit des deux autres, et l'on aura $a\times m=bp\times nq$, ce qui revient à $am=bn\times pq$; et enfin, en divisant par la quantité bn, on aura

$$\frac{am}{bn}=pq;\ \text{donc}\ \frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}.$$

Ex.

Soit à multiplier $\frac{2x}{7}$ par $\frac{4x}{9}$

$$\left.\begin{array}{l}2x\times4x=8x^2\\ 7\times9=63\end{array}\right\}\ \therefore\ \text{la fraction demandée}=\frac{8x^2}{63}$$

72. **Division des fractions.** *On effectue la division d'une fraction par une autre en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{m}{n}$, et représentons le quotient par q; nous aurons :

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = q, \text{ ou bien } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \times q.$$

En réduisant au même dénominateur, on tire de là,

$$\frac{an}{bn} = \frac{bm}{bn} \times q;$$

en supprimant le dénominateur commun bn, on ne troublera pas l'égalité, et l'on aura $an = bm \times q$; enfin, cette dernière égalité, divisée de part et d'autre par bm, donne

$$\frac{an}{bm} = q, \text{ ou bien } q = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m},$$

ce qui prouve la règle énoncée.

2d Ex.

Soit à diviser $\frac{14x^2}{9}$ par $\frac{2x}{3}$

La fraction diviseur renversée devient $\frac{3}{2x}$; d'où

$$\frac{14x^2}{9} \times \frac{3}{2x} = \frac{42x^2}{18x} = \frac{7x}{3}.$$

73. Il est important de rappeler que la valeur absolue d'une fraction algébrique est indépendante des signes de ses termes, et que, de plus, cette valeur est positive si les deux termes ont le

même signe, et négative s'ils ont des signes contraires, c'est-à dire qu'on aura, nº 57,

$$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = +q, \text{ et } \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -q,$$

ce qui prouve que *l'on peut changer les signes des deux termes d'une fraction sans altérer sa valeur.*

QUESTIONNAIRE.

Qu'appelle-t-on fraction algébrique? (66)
Quel est le but de la simplification? (67)
Comment réduit-on au même dénominateur? (68)
Donnez la règle de l'addition des fractions. (69)
Donnez la règle de la soustraction des fractions. (70)
Donnez la règle de la multiplication des fractions. (71)
Donnez la règle de la division des fractions. (72)
Peut-on changer les signes des deux termes d'une fraction sans altérer sa valeur? (73)

EXERCICES

SUR LES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

47. Réduire au même dénominateur les fractions $\frac{a}{b}$ $\frac{m}{n}$ $\frac{x}{p}$.

48. Réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{5x}{b}$, et $\frac{4a}{5}$.

49. Réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2x+1}{5}$, et $\frac{3x}{4}$.

50. Simplifier la fraction suivante (voir N° 67) $\dfrac{14x^3 + 7ax + 21\ x^2}{35\ x^2}$.

51. Ajouter les fractions $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{2a}{3b}$ et $\dfrac{5b}{4a}$.

52. Quelle est la différence de $\dfrac{a}{b}$ à $-x$?

53. Quel est le produit de 7 par $-\dfrac{c}{d}$?

54. Faire le produit de $-\dfrac{a}{bc}$ par $-\dfrac{c}{d}$.

55. Multiplier $\dfrac{3x^2 - 5x}{14}$ par $\dfrac{7a}{2x^3 - 3x}$.

56. Diviser $\dfrac{(a^4 - 5)\ 5}{c - d}$ par $\dfrac{(a^3 + 5)\ 5}{d - c}$.

CHAPITRE II.

DES ÉQUATIONS.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

DÉFINITIONS.

74. **Egalité.** Quand on écrit que deux quantités, algébriques ou non, sont égales on a ce qu'on appelle une égalité :

$$a = b + c$$

la partie a qui précède le signe $=$ est le *premier membre* de l'égalité, et tout ce qui suit ce signe, $b + c$, compose le *second membre.*

75. **Identité.** On appelle ainsi une égalité vraie pour toutes les valeurs possibles des lettres qu'elles renferment : ainsi

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad \times bc)^2$$

sont des identités, parce que les deux membres prennent toujours les mêmes valeurs, par quelques nombres qu'on remplace les lettres.

76. **Equation.** On donne ce nom à une égalité dont les deux membres ne deviennent égaux que pour certaines valeurs convenables des lettres qu'elles renferment ; ainsi, si l'on pose

$$x - 3 = 7,\ 5x = \frac{x+3}{3},\ \frac{x}{a} - mx = a^2$$

on aura formé trois équations, parce que les membres ne deviennent égaux que pour des valeurs déterminées. La lettre x est l'*inconnue* de l'équation.

77. **Equation numérique.** C'est une équation qui ne contient pas d'autres lettres que les inconnues.

78. **Equation littérale.** C'est une équation où les quantités connues sont représentées par des lettres.

79. **Classification des équations.** Une équation, en général, peut renfermer une ou plusieurs inconnues, et ces inconnues peuvent y entrer à des puissances diverses et quelconques. De là, la classification des équations ; ainsi on les divise en équations à une seule inconnue, à deux inconnues, à trois inconnues, etc..., et pour le même nombre d'inconnues, en équation du premier degré, du 2e degré, du 3e degré, etc..., du me degré, selon que les inconnues y sont à la 1re puissance, à la 2e, à la 3e, etc..., à la me puissance.

80. **Degré de l'équation.**—Quand une équation algébrique est *rationnelle* et *entière* (No 13) on appelle degré de l'équation le degré le plus élevé parmi les degrés de ses différents termes, par rapport à toutes les inconnues. Quand les inconnues se rencontrent dans le même terme, le degré de l'équation est marqué par la *somme*

des exposants des inconnues, prise dans le terme où cette somme est la plus forte.

1° Equation numérique du 1^{er} degré à une seule inconnue : $3x = \frac{x}{2} - 5$

2° Equation du 2^{me} degré à une seule inconnue : $5x^2 - 3x = 35$.

3° Equation du 3^{me} degré à une seule inconnue: $x^6 - 7x^4 + x = 2x^3 + 9$.

4° Equation littérale du 1^{er} degré à deux inconnues : $ax + by = c$.

81. **Données.—Enoncé d'un problème.**—Dans tous problèmes il existe, en général, des quantités connues qu'on nomme les *données* de la question, et des quantités *inconnues qu'il s'agit de trouver*.

L'énoncé du problème fait connaître les relations qui lient les quantités connues ou inconnues et les conditions auxquelles doivent satisfaire ces inconnues ; c'est de cet ensemble que le calculateur déduit ensuite la solution du problème.

82. **Solution d'un problème.**—Résoudre un problème, c'est parvenir à la détermination des valeurs des inconnues qui satisfont à toutes les conditions de l'énoncé, ou bien c'est prouver que le problème est impossible.

83. **Problèmes du premier degré.**—On appelle ainsi les problèmes qui conduisent à des équations du premier degré.

84. **Solution.**—Pour résoudre complètement

un problème, il y a ordinairement quatre choses à faire.

1° Mettre les problèmes en équations.
2° Résoudre les équations trouvées.
3° Généraliser le problème.
4° Discuter le problème.

85. **Résolution des Équations.**—Nous commencerons par la résolution des équations, opération qui est soumise à des règles fixes et déterminées.

Résoudre une équation, c'est chercher quelles sont les valeurs numériques qui, mises à la place des inconnues dans cette équation, rendent les deux membres égaux entre eux. Ces valeurs se nomment les *solutions* du problème, et l'on dit que l'équation est *vérifiée* ou *satisfaite* par ces valeurs.

86. **Remarques importantes.**—1° *Dans toute équation on peut ajouter une même quantité aux deux membres à la fois sans altérer cette équation de même que l'on peut toujours en retrancher des quantités égales.*

Soit, par exemple, l'équation $x = a - b$; il est évident qu'on aura aussi $x + m = a - b + m$, et $x - m = a - b - m$.

2° *On peut toujours multiplier ou diviser à la fois les deux membres d'une équation par une même quantité sans altérer l'équation.*

Ainsi l'équation $x = a - b$ donnera $mx = am - bm$ ou bien $\frac{x}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$.

La quantité par laquelle on multiplie ou par laquelle on divise les deux membres d'une équation ne doit être ni nulle, ni infinie. De plus, si cette quantité contenait l'inconnue, il pourrait arriver, dans certains cas, que la nouvelle équation ne donnât pas pour l'inconnue les mêmes valeurs que la première.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

87. **Règle.** Cette résolution se résume dans les cinq opérations suivantes :

1° *On chasse les dénominateurs, s'il y en a.*

2° *On effectue, s'il y a lieu, les calculs indiqués.*

3° *On fait passer dans un membre tous les termes qui contiennent l'inconnue ; et dans l'autre tous les termes qui ne la contiennent point.*

4° *On réunit en un seul tous les termes qui contiennent l'inconnue (soit en effectuant la réduction des termes semblables, soit en mettant l'inconnue en facteur commun).*

5° *On divise les deux membres par le coefficient de cette inconnue.*

1er *exemple.* — Soit l'équation

$$\frac{5\,(x-3)}{4} - 1 = \frac{x-1}{6} - 2\,x.$$

88. Chassons les dénominateurs :

Règle. *Pour chasser ou faire évanouir les dénominateurs d'une équation on réduit tous les termes de cette équation au même dénominateur* (N° 6), *et l'on multiplie les deux membres par le dénominateur commun.* Notre fraction devient par là

$$15\,(x-3) - 12 = 2\,(x-1) - 24x.$$

89. 2° **Effectuons les calculs indiqués. — Les**

parenthèses indiquant une multiplication (No 10), nous aurons $15x - 45 - 12 = 2x - 2 - 24x$.

90. 3° Transposons :

Règle. *Pour faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre, on l'efface dans le membre où il se trouve, et on l'écrit dans l'autre avec un signe contraire.* Ce faisant nous avons

$$15x - 2x + 24x = -2 + 45 + 12.$$

91. 4° Réduisons. — Ici nous n'avons qu'à effectuer la réduction des termes semblables (No 31). Cela nous donne :

$$37x = 55.$$

92. 5° Divisons les deux membres par le coefficient 37 :

$$x = \frac{55}{37} = 1,486486.....$$

93. II$^{\text{ème}}$ *exemple.* Soit l'équation

$$\frac{2x}{3} - 8 = \frac{x}{4} + \frac{2}{5},$$

en chassant les dénominateurs elle se tranforme en $40x - 480 = 15x + 24$,

et en réunissant les termes en x dans le premier membre et les termes tout connus dans le second, nous aurons $40x - 15x = 24 + 480$,

ou, en simplifiant, $25x = 504$,

et enfin $$x = \frac{504}{25} = 20,16.$$

Vérification. Pour s'assurer qu'on a bien opéré, il faut vérifier la valeur trouvée : or, la substitution de cette valeur, dans l'équation proposée, donne

$$\frac{2 \times 20,16}{3} - 8 = \frac{20,16}{4} + \frac{2}{5};$$

en chassant les dénominateurs, on a

$$20 \times 2 \times 20,16 - 8 \times 60 = 15 \times 20,16 + 2 \times 12,$$

et, en effectuant les calculs, $326,40 = 326,40$.

94. III[ème] *exemple.* Proposons-nous encore de résoudre l'équation littérale

$$\frac{ax}{b} - m = n - \frac{x}{c}.$$

La réduction de tous les termes au même dénominateur donnera

$$\frac{acx}{bc} - \frac{bcm}{bc} = \frac{bcn}{bc} - \frac{bx}{bc},$$

ou bien, si l'on supprime ce dénominateur commun,

$$acx - bcm = bcn - bx;$$

ensuite, si l'on réunit les termes en x dans le premier membre, l'équation devient

$$acx + bx = bcm + bcn,$$

et, en mettant en facteur commun x et bc, on aura

$$(ac + b)\,x = bc\,(m + n);$$

d'où l'on tire enfin, pour la valeur de x,

$$x = \frac{bc\,(m + n)}{ac + b}.$$

95. *Vérification.* Si l'on substitue cette valeur à la place de x dans l'équation primitive, on verra

que celle-ci est satisfaite, puisqu'elle se réduit à une identité, et que, par conséquent, la formule ci-dessus est la véritable expression de l'inconnue x pour toutes les valeurs numériques qu'on pourrait donner aux lettres a, b, c, m, n. On obtient, en effet, successivement ;

$$\frac{abc\,(m+n)}{b\,(ac+b)} - m = n - \frac{bc\,(m+n)}{c\,(ac+b)},$$

$$\frac{ac\,(m+n)}{ac+b} - m = n - \frac{b\,(m+n)}{ac+b},$$

$$acm + acn - acm - bm = acn + bn - bm - bn,$$

ou enfin $$acn - bm = acn - bm.$$

QUESTIONNAIRE.

Qu'appelle-t-on égalité ? (74)
Qu'appelle-t-on identité ? (75)
Qu'est-ce qu'une équation ? (76)
Définissez une équation numérique. (77)
Qu'est-ce qu'une équation littérale ? (78)
Comment classifie-t-on les équations ? (79)
Qu'appelle-t-on degré d'une équation ? (80)
Qu'est-ce que l'énoncé d'un problème ? (81)
Qu'appelle-t-on les données d'une question ? (82
Qu'est-ce que résoudre un problème ? (82)
Définissez les problèmes du premier degré. (83)
Quelles sont les quatre choses à faire pour résoudre les problèmes du premier degré ? (84)
Qu'est-ce que résoudre une équation ? (85)
Dans toute équation peut-on ajouter une même quantité aux deux membres ou en retrancher une même quantité sans altérer cette équation ? (86 1o)
Peut-on toujours multiplier ou diviser à la fois les deux membres d'une équation, sans pour cela l'altérer ? (861 2o)
Indiquer les cinq opérations à faire pour résoudre une équation. (87)
Donnez un exemple. (87)
Comment chasse-t-on les dénominateurs ? (88)
Donnez des exemples des opérations à faire pour résoudre une équation. (87, 88, 89)

EXERCICES

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

57. Soit à résoudre l'équation

$$5x - 7 = 3x + 9.$$

58. $8x - 5x + 4x - 2x = 25.$

59. $12x - 3x - 4x - x = 24.$

60. $5x - (3 + 3x) = 8 - (-x - 1).$

61. $6(4 - x) - 4(6 - 2x) - 12 = 0.$

62. $\frac{2x}{3} + \frac{x}{4} = 22$

63. $\frac{2x}{5} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} = 44.$

MISE EN ÉQUATIONS DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

96. **Mise en équation.** *La mise en équation d'un problème consiste à exprimer, à l'aide de symboles algébriques, les relations que l'énoncé établit entre les données et les inconnues.*

97. **Règle.** *Il faut regarder le problème comme résolu, et indiquer, à l'aide des signes algébriques, sur les quantités connues représentées soit par des nombres, soit par des lettres, et sur les quantités inconnues représentées toujours par des lettres, les raisonnements et les opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier la valeur de l'inconnue, si cette valeur était donnée.*

Quand les élèves auront appliqué cette règle à un grand nombre d'exemples, ils en saisiront bien toute la portée.

98. **Problème I.** *Trouver un nombre dont le quintuple diminué de 17 soit égal au triple augmenté de 41.*

Si l'on représente par x le nombre cherché, et qu'on exprime, à l'aide des signes algébriques, les conditions du problème, on aura sur le champ

$$5x - 17 = 3x + 41,$$

d'où l'on tire $5x - 3x = 41 + 17$,

ou bien $2x = 58$, et enfin $x = 29$.

Vérification. Le nombre demandé est bien 29, car $5 \times 29 - 17 = 3 \times 29 + 41$, ou bien $128 = 128$.

99. **Problème II.** *Une personne laisse en mourant $\frac{1}{3}$ de sa fortune à son neveu, $\frac{1}{5}$ à sa nièce et les 1500 francs restant aux pauvres de sa commune: trouver l'héritage total ainsi que les lots du neveu et de la nièce.*

Représentons par x le bien du défunt, et, conformément à la règle (No. 97), indiquons les opérations qu'il faudrait effectuer sur la valeur de x pour la vérifier ; nous aurons

pour la part du neveu $\frac{x}{3}$,

pour la part de la nièce $\frac{x}{5}$,

et ces deux lots, ajoutés aux 1500 fr. restant, doivent égaler la succession totale x; nous aurons donc l'équation

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 1500 = x.$$

En faisant disparaître les dénominateurs, cette équation devient

$$5x + 3x + 22500 = 15x\,;$$

et celle-ci donne $22500 = 15x - 8x$,

ou bien $$7x = 22500,$$

et $$x = \frac{22500}{7} = 3214 \text{ fr. } 285.$$

Le neveu aura donc $\frac{3214,285}{3} = 1071$ fr. 428

la nièce $\frac{3214,285}{5} = 642$ fr. 857

les pauvres 1500 fr.

Total... 3214 fr. 285

100. **Problème III.**—*Un négociant achète des marchandises qu'il revend ensuite* 753 *fr. de plus qu'il ne les avait payées, et à ce marché il gagne* 15 *pour cent sur le prix de la vente. On demande le prix d'achat des marchandises.*

Si l'on représente par x le prix d'achat inconnu, on aura pour le prix de vente $x + 753$, Or, puisqu'on doit gagner 15% sur la vente, il faut que le bénéfice connu 753 fr. soit le 15% de $x + 753$; on aura donc pour l'équation du problème.

$$\frac{(x + 753) \times 15}{100} = 753.$$

ou $$15x + 15 \times 753 = 75300,$$

ou bien $$15x = 64005.$$

d'où $$x = \frac{64005}{15} = 4267 \text{ fr. prix d'achat.}$$

Vérification. Les marchandises ont coûté 4267 fr.

on les a revendues $4267 + 753 = 5020$ fr. ; pour que la solution soit exacte, il faut que 753 soit les $\frac{15}{100}$ de 5020, ce qui est vrai, car $\frac{5020 \times 15}{100} = 753$.

QUESTIONNAIRE.

En quoi consiste la mise en équation ? (96)
Donnez la règle de la mise en équation. (97)
Appliquez cette règle à des exemples. (100...)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LA MISE EN ÉQUATION.

64. La garnison d'une place se compose de 2600 hommes, parmi lesquels il y a 9 fois autant de fantassins et trois fois autant d'artilleurs que de cavaliers. Combien de chaque arme ?

65. Un maître promet à son domestique 200 piastres par an et un habit. Ce domestique est renvoyé au bout de dix mois, et on lui donne 160 piastres, plus l'habit pour ses gages : quel est le prix de cet habit ?

66. On veut partager 1300 piastres entre trois personnes de manière que la première ait 48 piastres de plus que la seconde, et celle-ci 20 piastres de plus que la troisième. Que revient-il à chacun ?

67. Un père a 49 ans et son fils 11 ; dans combien d'années l'âge du père ne sera-t-il plus que le triple de celui du fils ?

68. Un père laisse son héritage à partager entre ses enfants de la manière suivante : l'aîné aura 100 piastres plus le 10^e du reste ; le second 200 piastres plus le 10^e du reste ; le troisième 300 piastres plus le 10^e du reste, et ainsi de suite ;

néanmoins, le partage fait, il se trouve que les enfants ont reçu chacun la même somme : on demande 1° quel est l'héritage, 2° quel est le nombre des enfants.

Généraliser un problème.

101. **Généralisation.** Il suffit, pour généraliser un problème, de *remplacer les données* numériques *par des lettres pouvant recevoir toutes les valeurs possibles :* on a alors d'un seul coup la solution de tous les problèmes semblables.

102. **Cas particulier.** Comme cas particulier prenons le problème suivant:

La somme de deux nombres est **72**; *leur différence est* **8.** *Trouver ces deux nombres ?*

Désignons le plus petit nombre par x.

Le plus petit nombre étant x.

Le plus grand est $x + 8$.

Leur somme est $2x + 8$.

Mais cette somme est égale à **72.**

$$\therefore\ 2x + 8 = 72$$

Par suite $2x$ seul $= 72 - 8 = 64$.

d'où $$x = \frac{64}{2} = 32$$

Le plus petit nombre x valant **32**, le plus grand $x + 8 = 40$.

103. **Cas général. Problème.** *Trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence.*

Ce problème ainsi généralisé est indépendant de toute valeur particulière. Représentons donc par S la somme des deux nombres demandés, par

d leur différence donnée, et soit x le plus petit des deux nombres : il est évident que le plus grand sera $x + d$, et que l'équation du problème est

$$x + x + d = S,$$

laquelle devient successivement

$$2x + d = S,\ 2x = S - d,\ x = \frac{S - d}{2},$$

ou bien
$$x = \frac{S}{2} - \frac{d}{2}$$

Cette formule nous apprend qu'en général, quand on connaît la somme de deux nombres et leur différence, on obtient *le plus petit de ces nombres en retranchant de la moitié de la somme la moitié de la différence donnée.*

En second lieu, si, à la valeur de x, $\frac{S}{2} - \frac{d}{2}$, on ajoute la différence d, on aura pour le plus grand des deux nombres demandés

$$\frac{S}{2} - \frac{d}{2} + d, \text{ ou bien } \frac{S}{2} - \frac{d}{2} + \frac{2d}{2},$$

ce qui revient à
$$\frac{S}{2} + \frac{d}{2}.$$

Cette dernière expression prouve ce second principe : *que la moitié de la somme de deux nombres, ajoutée à la moitié de leur différence, donne le plus grand de ces nombres.*

Comme cas particulier, supposons que l'on demande deux nombres dont la somme est 34 et la différence 8 ; d'après ce qui précède, on aura :

pour le plus petit $\frac{34}{2} - \frac{8}{2} = 17 - 4 = 13,$

pour le plus grand $\frac{34}{2} + \frac{8}{2} = 17 + 4 = 21.$

Vérification. En effet,

$$13 + 21 = 34 \text{ et } 21 - 13 = 8,$$

104. Problème. *Deux courriers partent en même temps pour Lyon, l'un de Paris, l'autre de Fontainebleau : le premier fait* 11 *kilomètres par heure et le second* 8 *kilomètres. On demande à quelle distance de Paris ces deux courriers se rencontreront, sachant que Fontainebleau est à* 59 *kilomètres de Paris.*

Pour traiter ce genre de problèmes, où l'on doit comparer des *espaces parcourus* à des *vitesses*, il est indispensable que les élèves aient des idées précises sur la valeur de ces expressions.

Lorsqu'un voyageur marche d'un pas réglé et qu'il parcourt le même chemin dans des temps égaux, on dit que cet homme se meut d'un *mouvement uniforme.* Une aiguille de montre, par exemple, a un mouvement uniforme. Or, dans le mouvement uniforme, on appelle *vitesse* l'espace parcouru dans l'unité de temps : une seconde, une minute, une heure.

Cela posé, on comprend facilement ce que signifie une vitesse de 15, 20, 30 kilomètres à l'heure, ainsi qu'une vitesse double, triple, etc., d'une autre ; c'est-à-dire que lorsque l'espace parcouru dans l'unité de temps est double, triple, etc., on dit que la vitesse est double, triple, etc., et réciproquement. Cette loi s'énonce en disant que dans le mouvement uniforme, *les espaces parcourus sont proportionnels aux vitesses.*

Ces notions comprises, passons à la solution du problème proposé.

P 59^{k}. F x^{k}. R

Soient P Paris, F Fontainebleau, R le point de rencontre. La distance connue PF est de 59 kilomètres, et appelons x le nombre de kilomètres FR, de Fontainebleau au point de rencontre inconnu R.

D'après les données du problème, le premier courrier parcourera PR, c'est-à-dire $59 + x$ kilomètres, pendant que le second courrier parcourt FR ou x kilomètres ; et ces chemins, faits dans le même temps, seront parcourus avec les vitesses données 11 et 8.

Mais, en vertu du principe posé ci-dessus, que les espaces sont dans le même rapport que les vitesses, on aura l'équation

$$\frac{59 + x}{x} = \frac{11}{8},$$

ou bien $11x = 472 + 8x$ ou $3x = 472$,

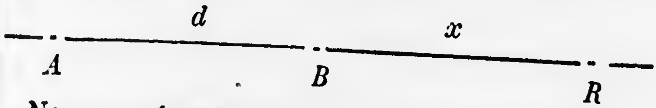
et enfin $$x = \frac{472}{3} = 157,333\ ;$$

c'est-à-dire que la distance FR sera de 157 kilomètres 333 mètres, laquelle, ajoutée à PF ou 59 kilomètres, donnera $157,333 + 59 = 216$ kilomètres 333 mètres pour la distance de Paris au point où les courriers se rencontreront.

Généralisons ce problème.

105. **Problème.** *Deux courriers partent en même temps, l'un du point A, l'autre du point B, et vont dans le même sens AR; la distance qui les sépare*

est d, *la vitesse du courrier parti du point A est représentée par V, celle du courrier qui part du point B par* v. *On demande à quelle distance du point A les deux courriers se rencontreront.*



Nous représenterons par x la distance BR parcourue par le second courrier, et alors la distance AR que parcourera le premier sera $d + x$; mais en vertu du principe précédent, que les espaces sont proportionnels aux vitesses, on aura l'équation

$$\frac{d + x}{x} = \frac{V}{v},$$

et $\quad Vx = dv + vx$ ou $(V - v)\,x = dv$;

d'où la formule $\quad x = \dfrac{dv}{V - v}.$

Cette valeur générale indique que, pour trouver le point où les deux courriers se rencontreront, il faut multiplier la distance qui les sépare en partant par la vitesse de celui qui est en avant, et diviser ce produit par la différence des vitesses de ces courriers.

Observation. Le problème des courriers, dans lequel on peut varier les conditions de l'énoncé, donne lieu à une discussion importante que nous développerons au chap. IV.

QUESTIONNAIRE.

Que faut-il faire pour généraliser un problème? (101)
Donnez un cas particulier. (102)
Donnez la généralisation de quelques problèmes. (103, 104, 105).

EXERCICES ET PROBLÈMES.

69. Quel est le nombre qui, diminué de 18, donne 56 moins ce nombre ?

70. Le triple d'un nombre est égal au quintuple du même nombre moins 27 : quel est ce nombre ?

71. Trouver un nombre dont le tiers augmenté de 7 donne 62.

72. Trouver un nombre dont la moitié, le tiers, le quart, augmentés de 45, donnent pour somme 448.

73. Le double d'un nombre, augmenté de 7 et de ses trois demis, donne pour résultat 6 fois le nombre moins 23 ; quel est-il ?

74. Partager 77 en deux parties, telles que la somme des quotients de l'une par 8 et de l'autre par 5 soit égale à 13.

75. Traiter le problème précédent d'une manière générale et trouver la formule.

76. Un commandant de place fait partir un courrier qui parcourt 23 milles en 2 heures : 9 heures après, il expédie un contre-ordre par un second courrier qui fait 49 milles en trois heures; on demande à quelle distance de la place ce dernier atteindra le premier courrier.

77. Un renard, poursuivi par un lévrier, a 60 sauts d'avance. Ce renard fait 9 sauts pendant que le lévrier n'en fait que 6 ; mais 3 sauts du lévrier valent 7 sauts du renard. On demande quel nombre de sauts doit faire le lévrier pour atteindre le renard.

N. B. *Nous nous en occuperons plus tard* (chap. IV) *de la* " discussion des problèmes."

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

106. **Problèmes à plusieurs inconnues.** Il existe des problèmes qui contiennent plusieurs inconnues distinctes, lesquelles, quoique dépendantes les unes des autres, ne sont pourtant pas telles qu'il suffise d'en calculer une seule. C'est de ce genre de questions que nous allons nous occuper.

107. 1° **Problèmes déterminés.** Un problème est dit *déterminé* quand son énoncé contient un nombre suffisant de conditions distinctes pour donner lieu à autant d'équations qu'il y a d'inconnues : on le nomme ainsi, parce qu'alors on trouve une valeur unique pour chaque inconnue.

108. 2° **Problèmes indéterminés.** Un problème est *indéterminé* quand son énoncé fournit moins d'équations qu'il ne renferme d'inconnues, parce que dans ce cas on est obligé de donner des valeurs arbitraires à certaines inconnues pour trouver celles des autres, ce qui conduit à des solutions diverses et quelquefois même à une infinité de solutions.

PROBLÈMES DÉTERMINÉS A DEUX INCONNUES.

109. **Problème I.** *Trouver deux nombres tels que le quadruple du premier, augmenté du triple du second, donne pour somme* 26, *et que sept fois le premier, moins huit fois le second, aient pour différence* 19.

En représentant le premier des nombres demandés par x, le second par y, on verra que l'énoncé du problème donne les deux équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} [1] & 4x + 3y = 26, \\ [2] & 7x - 8y = 19. \end{array}$$

Ces équations sont liées par la condition que les valeurs des inconnues x et y sont les mêmes pour les deux équations. Cette condition de rigueur, qui découle naturellement de l'énoncé de tous les problèmes à plusieurs inconnues, s'énonce en disant qne les équations *existent ensemble* ou bien qu'elles forment un *système*.

Il s'agit maintenant de résoudre le système des deux équations [1] et [2], c'est-à-dire de trouver les valeurs de x et de y qui conviennent à ces équations. Pour y parvenir, il existe plusieurs méthodes qui portent le nom de *méthodes d'élimination*.

1ère MÉTHODE.

110. **Elimination par substitution.** Cette méthode consiste à prendre, dans l'une des équations, la valeur d'une inconnue en fonction de l'autre, et à substituer cette valeur dans la seconde équation.

Appliquons cette règle aux deux équations du problème précédent; prenons dans la première [1] la valeur de x:

$$x = \frac{26 - 3y}{4}$$

et substituons-la dans l'équation [2], qui devient alors l'équation à une seule inconnue

$$7 \times \frac{26 - 3y}{4} - 8y = 19$$

La résolution de cette dernière donnera successivement

$$182 - 21y - 32y = 76,\ 53y = 106 \text{ et } y = 2.$$

Enfin, la valeur de y, substituée dans l'expression de x donnera

$$x = \frac{26 - 6}{4} = 5.$$

Les deux nombres demandés sont donc 2 et 5 ; en effet, cette solution vérifie les équations [1] et [2] et satisfait aux conditions du problème.

2ème MÉTHODE.

111. **Elimination par comparaison.** Pour opérer l'élimination d'une des inconnues entre les deux équations sus-mentionnées [1] et [2], on peut prendre la valeur de la même inconnue dans chaque équation, et égaler ces deux valeurs pour former une nouvelle équation à une seule inconnue.

Ainsi les deux équations du problème nº 109 donnent séparément

l'équation [1] $x = \dfrac{26 - 3y}{4}$,

l'équation [2] $x = \dfrac{19 + 8y}{7}$;

et ces valeurs égales fournissent cette autre équation :

$$\frac{19 + 8y}{7} = \frac{26 - 3y}{4};$$

celle-ci donne

$$76 + 32y = 182 - 21y,\ 53y = 106,\ y = 2\ ;$$

ensuite on trouve $\qquad x = 5.$

3ème MÉTHODE.

112. **Élimination par réduction.** Quand l'une des inconnues a le même coefficient dans les deux équations, il suffit pour éliminer cette inconnue, d'ajouter ou de retrancher ces équations *membre à membre*, selon que les termes qui contiennent cette inconnue ont des signes contraires ou le même signe.

Par exemple, si l'on avait à traiter les deux équations

$$4x + 5y = 43,$$
$$6x - 5y = 27,$$

il est évident que l'addition, membre à membre, fera disparaître y, et qu'on aura sur le champ

$$10x = 70 \text{ ou } x = 7;$$

cette valeur donne à son tour $y = 3$.

Si les termes en y avaient eu le même signe, on aurait retranché membre à membre.

113. L'égalité des coefficients d'une même inconnue ne se rencontre pas ordinairement dans les équations, mais nous pourrons toujours ramener des équations données à avoir même coefficient pour l'une des inconnues : il suffira de multiplier tous les termes de chaque équation par le coefficient qui affecte cette inconnue dans l'autre équation. C'est ce qui constitue la méthode par réduction.

Reprenons donc, pour exemple, les équations primitives [1] et [2] :

$$4x + 3y = 26,$$
$$7x - 8y = 19.$$

Si l'on veut éliminer y, on multipliera tous les termes de la première équation par 8, coefficient de y dans la seconde, ensuite tous les termes de la seconde par 3, coefficient de y dans la première, et l'on aura

$$32x + 24y = 208,$$
$$21x - 24y = 57,$$

Maintenant, si l'on additionne membre à membre, on obtient

$$53x = 265, \text{ d'où } x = 5,$$

et cette valeur, substituée dans l'une des équations [1] ou [2], donnera $y = 2$.

114. **Remarque.** La réduction au même coefficient de l'inconnue à éliminer est susceptible des mêmes simplifications que la réduction des fractions au même dénominateur.

Soit, par exemple, à réduire les deux équations

$$15x + 6y = 132,$$
$$3x + 8y = 74.$$

On remarquera d'abord que tous les termes de la première sont divisibles par 3, et que, par la suppression de ce facteur commun, on a à opérer sur les deux équations

$$5x + 2y = 44,$$
$$3x + 8y = 74,$$

dans lesquelles on voit que, pour réduire au même coefficient, il suffit de multiplier la première équation par 4, on a alors

$$20x + 8y = 176,$$
$$3x + 8y = 74,$$

Maintenant, pour éliminer y il faut retrancher membre à membre, à cause du signe commun, et comme le second membre 74 est plus petit que 176, on retranchera la seconde équation de la première, ce qui donnera

$$20x - 3x = 176 - 74,$$

ou bien $17x = 102$, d'où $x = 6$;

enfin, cette valeur de x, substituée dans l'une des équations primitives, donne $y = 7$.

PROBLÈMES DÉTERMINÉS A PLUS DE DEUX INCONNUES.

115. **Définition.** Lorsqu'un problème contient trois, quatre, ou un plus grand nombre d'inconnues, il faut, pour qu'il soit déterminé, que son énoncé fournisse un pareil nombre d'équations. Dans tous les cas, la résolution des équations s'effectue par l'une des méthodes d'élimination que nous venons de faire connaître ; seulement l'opération est d'autant plus laborieuse qu'il y a un plus grand nombre d'équations, parce que l'on ne peut éliminer les inconnues que l'une après l'autre.

116. **Exemple.** Supposons d'abord que l'énoncé d'un problème ait donné lieu aux trois équations suivantes :

[1] $5x + 6y - z = 23,$
[2] $4x - 3y + 2z = 9,$
[3] $7x + y - 3z = 2.$

Pour traiter ces équations par la méthode de substitution, nous commencerons par éliminer z entre la première et la seconde, ensuite entre la première et la troisième.

Or, l'équation [1] donne $z = 5x + 6y - 23$, et cette valeur, substituée dans les équations [2] et

[3], conduira, toutes réductions faites, aux deux équations à deux inconnues

$$14x + 9y = 55,$$
$$8x + 17y = 67.$$

Maintenant nous éliminerons y entre ces deux dernières équations, et comme la première donne

$$y = \frac{55 - 14x}{9},$$

la seconde deviendra successivement

$$8x + \frac{17\,(55 - 14x)}{9} = 67,$$
$$72x + 935 - 238x = 603,$$
$$332 = 166x,$$
$$\text{et } x = 2.$$

Cette valeur de x, substituée dans l'expression de y, donnera

$$y = \frac{55 - 28}{9} = 3.$$

Enfin, la substitution de $x = 2$ et $y = 3$ dans la valeur de z conduit à

$$z = 10 + 18 - 23 = 5.$$

La solution du problème est donc

$$x = 2, y = 3, z = 5.$$

En effet, ces valeurs vérifient les équations proposées.

117. **Règle.** *Il faut d'abord éliminer l'une des inconnues entre la première équation et chacune des autres, ce qui fait disparaître en même temps une inconnue et une équation ; opérer ensuite sur les nouvelles équations obtenues comme sur les premières, c'est-à-dire éliminer une autre inconnue entre*

l'une de ces équations et chacune des autres, pour se débarrasser d'une seconde inconnue et d'une seconde équation ; enfin, continuer ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à une seule et dernière équation qui ne contienne plus qu'une seule inconnue. Alors on tire la valeur de cette dernière inconnue, et en remontant successivement aux diverses expressions obtenues, on calcule aisément les valeurs de toutes les autres inconnues du problème.

118. **Remarque.** Les trois équations du nº 116 ont été traitées par la méthode de substitution ; mais on eût pu en employer une autre : ainsi, par exemple, si l'on avait voulu adopter la méthode de comparaison, on aurait tiré de chaque équation la valeur de la même inconnue

$$z = 5x + 6y - 23, \quad z = \frac{9 - 4x + 3y}{2}, \quad z = \frac{7x + y - 2}{3};$$

et, en égalant deux à deux ces trois valeurs, on en aurait déduit les deux équations à deux inconnues

$$5x + 6y - 23 = \frac{9 - 4x + 3y}{2},$$

$$5x + 6y - 23 = \frac{7x + y - 2}{3}.$$

En traitant ensuite ces dernières, on serait arrivé à la même solution.

119. **Observation.** Il se présente des problèmes où les inconnues n'entrent pas toutes à la fois dans chaque équation ; alors l'élimination, quoique basée sur les mêmes règles, est plus rapide et susceptible de simplification.

Admettons que l'énoncé d'un problème ait fourni les quatre équations suivantes :

$$5x + 4y - 8z = 29, \tag{1}$$
$$7x - 3y = 26, \tag{2}$$
$$2z + 9u = 38, \tag{3}$$
$$11x - 6u = 31. \tag{4}$$

A l'inspection seule on ne tarde pas à reconnaître que, pour effectuer l'élimination rapidement, il faut éliminer d'abord y entre les deux premières équations et u entre les deux dernières.

Or, l'équation [2] donne

$$y = \frac{7x - 26}{3};$$

cette valeur, substituée dans l'équation [1], fait disparaître y, et fournit cette autre équation

$$43x - 24z = 191. \tag{5}$$

D'un autre côté, on tire de l'équation [3]

$$u = \frac{38 - 2z}{9},$$

et cette valeur, mise à la place de u dans l'équation [4], donne, après réduction,

$$33x + 4z = 169. \tag{6}$$

Il ne restera donc plus à traiter que le système des deux équations [5] et [6] entre les deux inconnues x et z.

A cet effet, nous prendrons la valeur de z dans la dernière équation, et nous aurons

$$z = \frac{169 - 33x}{4};$$

nous transporterons cette valeur dans l'équation [5], qui deviendra

$$43x - 6\,(169 - 33x) = 191,$$

ou bien $\quad 241x = 1205$, d'où $x = 5$.

Maintenant que x est connue, nous substituerons sa valeur dans l'expression de z et dans celle de y, ce qui donnera $z = 1$ et $y = 3$; enfin l'expression de u fournira $u = 4$.

En conséquence, on aura pour la solution du problème les quatre valeurs $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$ et $u = 4$.

120. **Problème.** *Une personne rencontre* 15 *hommes*, 24 *femmes*, 31 *enfants*, *et leur distribue* 75 *fr.*

Une autre fois, elle distribue de la même manière une somme de 103 *fr.* 80 *entre* 30 *hommes*, 18 *femmes et* 40 *enfants.*

Enfin, dans une troisième rencontre, cette personne donne encore 64 *fr. à* 12 *hommes*, 26 *femmes et* 19 *enfants.*

On demande ce que cette personne charitable a donné par tête, aux hommes, aux femmes et aux enfants.

En représentant par x, y, z le don respectif reçu par chaque homme, chaque femme et chaque enfant, on aura les trois équations :

$$15x + 24y + 31z = 75,$$
$$30x + 18y + 40z = 103{,}8,$$
$$12x + 26y + 19z = 64\ ;$$

et, en appliquant à ces équations la méthode exposée nº 116, on trouvera

$$x = 2 \text{ fr.},\ y = 1 \text{ fr. } 10,\ z = 0 \text{ fr. } 60.$$

FORMULES GÉNÉRALES.

121. Les équations générales pour tous les problèmes du premier degré à deux inconnues pourront être ramenées à la forme suivante :

$$[1] \qquad ax + by = c,\ a'x + b'y = c'.$$

Dans ces équations, les lettres a, b, c, a', b', c', représentent des nombres entiers, mais qui peuvent, selon le cas, être positifs, nuls ou négatifs.

En résolvant ce système d'équations, d'après les méthodes connues, on arrive aux formules générales :

$$[2] \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Les formules générales [2] conviennent à toutes les questions du premier degré à deux inconnues, et dispensent dans chaque cas d'effectuer les calculs d'élimination ; pour en donner un exemple, admettons que l'énoncé d'un problème ait conduit aux deux équations numériques

$$5x - 3y = 15, \qquad 2y - x = 4.$$

En comparant ces équations aux équations générales [1], on voit qu'il faut, dans ce cas, faire

$$a = 5,\ b = -3,\ c = 15,\ a' = -1,$$
$$b' = 2,\ c' = 4\ ;$$

en conséquence, les formules générales]2] donneront

$$x = \frac{15.2 - (-3)\ 4}{5.2 - (-3)\ (-1)} = \frac{30 + 12}{10 - 3} = \frac{42}{7} = 6.$$
$$y = \frac{5.4 - 15\ (-1)}{5.2 - (-3)\ (-1)} = \frac{20 + 15}{10 - 3} = \frac{35}{7} = 5.$$

QUESTIONNAIRE.

Qu'entendez-vous par les problèmes à plusieurs inconnues ? (106)

Quand est-ce qu'un problème est dit déterminé ? (107)

Quand est-ce qu'un problème est dit indéterminé ? (108)

Donnez un exemple d'un problème déterminé à deux inconnues. (109)

En quoi consiste l'élimination par substitution ? (110)

En quoi consiste l'élimination par comparaison ? (111)

En quoi consiste l'élimination par réduction ? (112)

La réduction au même coefficient de l'inconnue est-elle susceptible de quelques simplifications ? (114)

Comment peut-on effectuer la résolution des équations dans les problèmes déterminés à plus de deux inconnues ? (115)

Donnez la règle. (117)

L'élimination peut-elle être quelquefois plus rapide ? (119)

Donnez les formules générales pour tous les problèmes du premier degré ? (121)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

78. Traiter par substitution les deux équations

Solution.

$$11x - 10y = 14, \qquad x = 4,$$
$$5x + 7y = 41. \qquad y = 3.$$

79. Résoudre les équations précédentes par la méthode de comparaison.

80. Les résoudre par réduction.

81. Résoudre les deux équations littérales :

Solution.

$$ax + by = m, \qquad x = \frac{dm - bn}{ad - bc},$$

$$cx + dy = n. \qquad y = \frac{an - cm}{ad - bc}.$$

82. Résoudre les deux équations

Solution.

$$(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112, \qquad x = 3,$$
$$2x + 10 = 3y + 1. \qquad y = 5$$

83. Résoudre les équations

Solution.

$$x + y + z = 29{,}25, \qquad x = 16,$$
$$x + y - z = 18{,}25, \qquad y = 7{,}75,$$
$$x - y + z = 13{,}75. \qquad z = 5{,}5.$$

84. Traiter les équations littérales

Solution.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \qquad x = \frac{2}{a+b-c},$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \qquad y = \frac{2}{a+c-b},$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c. \qquad z = \frac{2}{b+c-a}.$$

85. Résoudre les quatre équations incomplètes suivantes :

Solution.

$$3x + 4z = 20, \qquad x = 4,$$
$$5x - 2u = 18, \qquad y = 3,$$
$$4z + 9y = 35, \qquad z = 2,$$
$$6x - 7u = 17. \qquad u = 1.$$

86. La somme de deux nombres est 23, le triple de leur différence est 21 ; quels sont ces nombres ?

(Rép. 15 et 8.)

87. Trois frères ont acheté une terre au prix

de 2000 piastres. Le troisième pourrait la payer seul si le second lui donnait la moitié de son argent ; le second dit que lui aussi il la paierait seul si l'aîné lui donnait le tiers de ce qu'il possède ; enfin l'aîné aurait besoin du quart de l'argent du plus jeune pour payer cette terre à lui seul. On demande quelle somme possédait chacun de ces trois frères.

(Rép. l'aîné \$1680 ; le 2e \$1440 ; le 3e \$1280.)

CHAPITRE IV.

INTERPRÉTATION DES DIVERS RÉSULTATS AUXQUELS PEUT CONDUIRE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS. — DISCUSSION DES PROBLÈMES.

122. **Observation.** Il peut se faire qu'un problème soit mal énoncé, qu'il contienne de fausses suppositions, des conditions incompatibles, enfin qu'il soit *impossible*, *absurde*. On conçoit que dans ces divers cas l'algèbre doit nécessairement nous avertir de ces particularités par des caractères spéciaux. C'est ce que nous allons étudier dans ce chapitre.

Des solutions négatives.

123. **Solution négative.** Quand on traite les équations par les méthodes indiquées, on conçoit que les solutions obtenues peuvent être affectées du signe + comme du signe —, c'est-à-dire qu'on peut trouver pour la valeur d'une inconnue $x = 5$ ou bien $x = -5$, et en général $x = +a$ ou bien $x = -a$.

Or, quel sens attacher à une solution négative $x = -a$?

Pour rendre une pareille expression intelligible, traitons quelques problèmes.

124. Problème Ier. *Un père a 40 ans et son fils 16; dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui du fils ?*

En représentant par x le nombre d'années cherché, l'âge du père sera à cette époque $40 + x$, et celui du fils $16 + x$; on aura donc l'équation

$$2(16 + x) = 40 + x,$$

ou bien $32 + 2x = 40 + x$, d'où $x = 8$.

Cette solution positive satisfait à l'équation ainsi qu'au sens direct de l'énoncé du problème, puisque dans 8 ans le fils aura $8 + 16$ ou 24 ans, et le père $40 + 8 = 48$, ou le double de l'âge du fils.

Mais modifions un peu les conditions du problème, et formulons-le comme il suit :

125. Problème II. *Un père a 40 ans, son fils en a 16; dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils?*

x représentant toujours le temps demandé, on aura l'équation

$$3(16 + x) = 40 + x,$$

laquelle donne $2x = 40 - 48 = -8$,
ou bien $x = -4$;

c'est-à-dire que la réponse à la question est *moins 4 ans*,

Cette valeur négative $x = -4$ satisfait bien à l'équation, car on a $3(16 - 4) = 40 - 4$, ou bien $36 = 36$; mais quelle interprétation lui donner en présence des conditions du problème ?

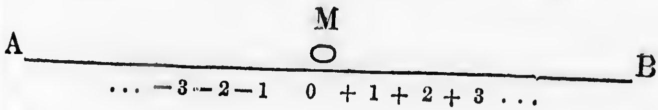
Si l'on considère que le signe $-$ rappelle à l'esprit une idée opposée à celle du signe $+$, on concevra aisément sous quel point de vue nouveau il faut comparer ce résultat négatif à l'énoncé du problème. En effet, dans ce problème, comme dans le précédent, nous avons attaché un *sens d'avenir* à la valeur de x; et si, dans la première question, une solution positive a répondu directement à notre prévision, nous devons ici attacher un sens contraire à la valeur négative, c'est-à-dire la prendre pour un temps *passé*.

Ainsi la solution $x = -4$ indiquera que la condition du problème *était remplie il y a 4 ans*; en effet, le père avait à cette époque $40 - 4$ ou 36 ans, et le fils $16 - 4$ ou 12; ce qui est conforme à l'énoncé.

Cette discussion et l'interprétation plausible de ce résultat négatif nous prouvent que les solutions négatives ont une existence aussi réelle que les solutions positives, mais que leur acception doit être prise en sens opposé.

Au reste, dans le cas des valeurs négatives, si l'on change les signes des termes en x dans l'équation du problème, on verra les modifications qu'il faudra introduire dans son énoncé.

126. Pour expliquer davantage le sens qu'il faut attacher aux valeurs négatives, supposons une droite AB, et admettons qu'un mobile M parte



d'un point donné zéro et qu'il puisse se mouvoir de M en B ou de M en A, il ne suffit pas de connaître la valeur absolue du chemin parcouru pour avoir le point d'arrivée, il faut encore fixer le sens de la course. Si donc on admet que les distances comptées de M en B sont positives, celles qu'on prendra en sens inverse de M en A devront être négatives.

De cette sorte, la position du mobile sera déterminée, dans tous les cas, par la valeur numérique de l'inconnue et par son signe.

Ainsi, quand on trouvera les solutions $x = +45$ kilomètres et $x = -45$ kilomètres, on en comprendra clairement la signification.

127. **Zéro-limite.** Il est important de remarquer à ce sujet, que l'on n'arrive des valeurs positives aux valeurs négatives qu'en passant par zéro, et alors les quantités négatives sont considérées comme plus petites que zéro ; d'ailleurs, ces valeurs négatives sont d'autant plus petites que leur valeur absolue est numériquement plus grande. On écrira donc

$$5 > 0, \ 0 > -2, \quad \text{et} -3 > -7.$$

Par conséquent l'expression *zéro* prend ici une acception nouvelle et ne signifie plus l'absence de toute grandeur ; mais ce *zéro-limite* indique le point de départ de deux séries opposées qui s'étendent indéfiniment, l'une vers l'infini positif, l'autre vers l'infini négatif.

Des solutions absurdes.

128. **Solutions absurdes.** L'interprétation que nous venons de faire des valeurs négatives, pour donner à certains problèmes une signification réelle et convenable, n'est pas admissible dans tous les cas : on conçoit, en effet, que s'il s'agissait de déterminer la distance de deux villes, le rayon d'un cercle, la surface d'un triangle, par exemple, une solution négative n'aurait aucun sens et indiquerait l'impossibilité du problème.

Mais, en outre, la résolution des équations que peuvent fournir les problèmes algébriques ne conduit pas uniquement à des valeurs positives ou négatives ; il est d'autres résultats qu'il importe d'examiner. A cet effet, traitons encore quelques questions.

129. Problème 1er. *Un père a 57 ans, son fils 19; dans combien de temps l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils ?*

Cet énoncé donne évidemment l'équation

$$3\,(19 + x) = 57 + x,$$

laquelle revient à

$$57 + 3x = 57 + x,$$

ou bien

$$3x = x,$$

résultat *impossible* pour toute valeur de x autre que zéro. D'ailleurs, zéro satisfait à l'équation et au problème, puisque actuellement l'âge du père, 57, est triple de 19, âge du fils.

130. Problème II. *Trouver un nombre dont les $\frac{2}{3}$ augmentés de 4 donnent une somme égale à 7 fois les $\frac{2}{21}$ de ce nombre plus un.*

La traduction de cet énoncé fournit l'équation

$$\frac{2x}{3} + 4 = 7 \times \frac{2x}{21} + 1,$$

laquelle donne $14x + 84 = 14x + 21$,

ou bien $84 = 21$, ou $4 = 1$, ou enfin $3 = 0$.

Cette solution est évidemment *absurde*, et cela est facile à comprendre, puisque l'énoncé même du problème contient une absurdité.

Observation. Un problème serait encore absurde, par exemple, s'il conduisait à une solution fractionnaire, tandis que son énoncé ne comporte que des nombres entiers.

131. Problème III. *Trouver un nombre dont le triple plus un soit égal à l'excès plus un des $\frac{9}{2}$ sur les $\frac{9}{6}$ de ce nombre.*

Appelons x le nombre demandé, et, en traduisant l'énoncé du problème, nous aurons l'équation

$$3x + 1 = \frac{9x}{2} - \frac{9x}{6} + 1\,;$$

en chassant les dénominateurs, nous obtiendrons

$$18x + 6 = 18x + 6\,;$$

ou bien

$$3x + 1 = 3x + 1,$$

équation *identique*, qui est satisfaite *quelle que soit la valeur qu'on attribue arbitrairement à* x. Dans ce cas, on dit que l'équation et le problème sont *indéterminés*, puisqu'il y a une infinité de solutions.

Des solutions incompatibles.

132. **Solutions incompatibles.** Dans les problèmes à plusieurs inconnues, comme dans ceux à une seule, on peut rencontrer des solutions impossibles, absurdes ou indéterminées ; mais il peut se faire en outre que, dans certains cas, les valeurs trouvées pour ces inconnues diverses soient *contradictoires*, *incompatibles*. Donnons-en un exemple.

133. **Problème**. *Trouver trois nombres* x, y, z, *qui aient entre eux les rapports suivants :*

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3},\ \frac{y}{z} = \frac{3}{7},\ \frac{x}{z} = \frac{5}{8}.$$

Ces rapports fournissent les trois équations

$$3x = 2y,$$
$$3z = 7y,$$
$$5z = 8x.$$

La première de ces équations donne

$$y = \frac{3x}{2},$$

la seconde devient $z = \dfrac{21x}{6}$,

et la dernière prend alors la forme $105x = 48x$.

Ce résultat est d'autant plus absurde et contradictoire, qu'on ne peut pas, comme au nº 129, admettre même la supposition de $x = 0$, qui satisfait algébriquement à l'équation, parce que ce serait dénaturer le problème proposé. Il faut donc en conclure qu'il y a *incompatibilité* dans les conditions du problème et dans les équations.

En effet, les trois rapports donnés sont liés de telle sorte que deux d'entre eux déterminent le troisième ; ainsi ce troisième est contradictoire aux autres, s'il n'en est pas une déduction, comme il arrive dans l'exemple proposé.

QUESTIONNAIRE.

Peut-il se faire qu'un problème soit mal énoncé, qu'il contienne de fausses suppositions, des conditions incompatibles? (122)

Parlez-nous des solutions négatives. (123)

Donnez des exemples. (124, 125, 126)

Expliquez davantage le sens attaché aux valeurs négatives au moyen d'une droite. (126)

Qu'entendez-vous par zéro-limite? (127)

Parlez-nous des solutions absurdes. (128)

Donnez des exemples. (129, 130, 131)

Parlez-nous des solutions incompatibles. (132)

Donnez-nous des exemples. (133)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LES CAS D'IMPOSSIBILITÉ, D'INDÉTERMINATION, ET SUR LES INTERPRÉTATIONS DES VALEURS DANS LES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

88. $\frac{3(2x+1)}{4} - 5 - \frac{3x+2}{10} = \frac{2(3x-1)}{5}$.

89. $\frac{3x-8}{6} = \frac{x}{2} + 1$.

90. De quel nombre faut-il augmenter les deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$ pour qu'elle se réduise à $\frac{2}{3}$?

91. Un père a actuellement 30 ans et son fils 10 ans. Il arrive dans leur vie une époque où l'âge du père est le quintuple de celui du fils. Quelle est cette époque ?

92. En 1809, l'âge d'un père était 4 fois celui de son fils, et en 1813 il n'en était plus que le triple. Quel âge avaient le père et le fils en 1800.

93. Trouver un nombre tel que ses $\frac{2}{3}$ diminués de 5 soient égaux à 3 fois les $\frac{2}{9}$ de ce nombre plus 5.

Discussion des problèmes et des formules algébriques.

134. **Définition.** Lorsqu'on a résolu un problème dans lequel les quantités données sont représentées par des lettres, la valeur de l'inconnue est exprimée par une formule qui indique les opérations à effectuer sur les données. Supposer que ces données reçoivent toutes les valeurs possibles, et examiner s'il en résulte, pour la ques-

tion, quelques cas particuliers remarquables, c'est ce qu'on appelle *discuter le problème.*

135. **Exemple.** Pour éclaircir cette définition, nous allons donner des exemples. A cet effet, reprenons d'abord le problème du n° 105, en généralisant un peu plus son énoncé.

PROBLÈME. *Sur une ligne indéfinie XY, deux courriers vont dans le même sens avec des vitesses respectives* v *et* v'*; le premier arrive au point A quand le second est en B, et la distance connue* AB *est* d *; on demande le point de rencontre de ces deux courriers.*

En supposant que la course ait lieu dans le sens BY, que la rencontre se fait en R, et en représentant par x la distance cherchée BR, nous trouverons comme au numéro cité, la formule

$$x = \frac{dv'}{v - v'}$$

136. **Discussion**. Le numérateur de cette expression fractionnaire est nécessairement positif dans tous les cas, mais le dénominateur, qui est la différence de deux quantités, peut, selon les circonstances, être positif, nul ou négatif, parce que les deux vitesses v et v' des deux courriers peuvent recevoir toutes les modifications possibles ; de là trois cas à examiner.

137. 1er *cas.* Supposons d'abord $v > v'$, c'est-à-dire que le courrier arrivé en A aille plus vite que celui qui est en B ; alors le dénominateur $v - v'$ sera positif, ainsi que la valeur de x, et la solution du problème, réelle et positive, indique-

ra que la rencontre a lieu dans le sens désigné en R et conformément aux données de la question ; car si le courrier A poursuit le courrier B avec une plus grande vitesse, il l'atteindra nécessairement dans la direction de la course BY.

On voit, de plus, que x sera d'autant plus grand que d sera plus grand lui-même, et $v - v'$ plus petit, c'est-à-dire que le point de rencontre R sera d'autant plus éloigné que l'intervalle AB, qui sépare les courriers, sera plus considérable et la différence de leur vitesse moindre.

138. 2e *cas.* Si $v = v'$, c'est-à-dire si les courriers vont avec la même vitesse, le dénominateur de la formule est zéro et la valeur de x devient

$$x = \frac{dv'}{0},$$

expression qu'on représente en général par le symbole

$$\frac{m}{0}.$$

Mais quelle signification peut avoir un pareil symbole, autrement dit, quel peut être le quotient d'une quantité divisée par zéro ?

Pour l'interpréter, on se rappellera que, dans une division dont le dividende reste constant tandis que le diviseur diminue sans cesse, le quotient est d'autant *plus grand* que le diviseur est *plus petit* ; c'est-à-dire que si le diviseur se réduit successivement à 0,1 à 0,01 à 0,001, etc., de sa valeur primitive, le quotient devient dix fois, cent fois, mille fois, etc., plus grand qu'il n'était d'abord ; en sorte que le diviseur, diminuant indéfiniment, le quotient augmenterait jusqu'à l'infini.

Mais, dans ces deux séries inverses, le diviseur tend vers la limite zéro sans jamais l'atteindre, pendant que le quotient va en s'élevant au-dessus de toute grandeur assignable : donc l'expression $\frac{m}{0}$ dépasse en grandeur tout ce que l'imagination peut se représenter, autrement dit, c'est le symbole de l'*infiniment grand*, qu'on indique par le signe ∞. (nº 4).

Cela posé, nous devons conclure que dans l'hypothèse $v = v'$, la valeur de x donnée par la formule est infiniment grande, c'est-à-dire que les deux courriers ne se rencontreront jamais. En effet, puisqu'ils vont également vite, ils conserveront toujours entre eux la distance primitive AB ou d qui les sépare au début.

On voit par là que le symbole $\frac{m}{0}$ est aussi le signe de l'*impossibilité.*

Mais pendant qu'on suppose $v = v'$, si l'on avait aussi la distance $d = o$, alors la formule se réduirait à

$$x = \frac{0}{0}.$$

Ce nouveau symbole demande aussi son explication. Nous avons un dividende et un diviseur nuls; en conséquence, le quotient est quelconque, parce que tout nombre multiplié par zéro donne zéro pour produit : donc la valeur de x, dans ce cas, reste arbitraire, indéterminée, et $\frac{0}{0}$ est le *symbole de l'indétermination.* En effet, dans la double hypothèse ci-dessus, les deux courriers ont la même vitesse, même direction, et à un instant donné ils arrivent en même temps au même point A ou B ; il faut donc qu'ils aient été et qu'ils soient toujours ensemble, c'est-à-dire que leur rencontre ait lieu sur tous les points de la route XY.

139. 3e *cas.* Supposons maintenant $v < v'$; dans cette hypothèse, le dénominateur de la formule aura le signe —, et la valeur de x sera négative. Nous conclurons alors, d'après les considérations du nº 126, que la rencontre des deux courriers doit avoir lieu, non pas dans le sens indiqué, mais dans une direction opposée, c'est-à-dire qu'ils se rencontreront en un point R' situé sur AX et non pas en R sur BY.

Ce résultat s'accorde encore parfaitement avec les circonstances. En effet, si le courrier qui arrive en A va moins vite que le courrier B qui est en avant, il est évident qu'ils ne pourront se joindre dans la direction BY, mais qu'au contraire leur rencontre a dû précéder leur arrivée respective en A et B, et avoir eu lieu en arrière du point A.

140. Enfin, pour compléter cette discussion, nous devons examiner encore ce que devient la formule primitive, dans le 1er et le 3e cas, lorsqu'on suppose nul l'intervalle AB ou d, pendant que les vitesses sont inégales. Alors, en faisant $d = 0$, la valeur de x prend la forme

$$x = \frac{0}{m}, \text{ ou bien } mx = 0;$$

et comme m est un nombre positif ou négatif, il faut nécessairement que x soit zéro.

La rencontre a donc lieu au point de départ A ; et, en effet, deux courriers qui à un instant donné, sont en un même point A et vont avec des vitesses inégales, se séparent pour ne plus se rencontrer jamais.

On pourra appliquer une discussion analogue à toute autre formule, et c'est pour cela que nous nous bornons à cet exemple,

En résumé, les trois symboles $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{m}$, représentent le premier, l'impossibilité, l'incompatibilité ou l'infini ; le deuxième, l'indétermination, et le troisième, une valeur nulle ou absurde.

QUESTIONNAIRE.

Qu'est-ce que discuter un problème ? (134)
Donnez-nous un problème à discuter. (135)
Discutez ce problème dans le cas de $v > v'$. (137)
Ensuite dans le cas de $v = v'$. (134)
Enfin dans le cas de $v < v'$. (139)

EXERCICE

SUR LA DISCUSSION DES FORMULES.

94. Résoudre et discuter l'équation

$$ax + b = a'x + b'.$$

CHAPITRE V.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

141. **Définition.** Nous avons appelé *problèmes indéterminés* (nº 108) ceux qui contiennent plus d'inconnues que leur énoncé ne peut fournir d'équations, et nous avons vu (nº 123) que, par les méthodes d'élimination, avec chaque inconnue qu'on élimine on fait disparaître aussi une équation ; en sorte que si l'on a moins d'équations que d'inconnues, l'équation finale contiendra nécessairement plusieurs inconnues, et sera impuissante à en faire connaître les valeurs.

En effet, le cas le plus simple, c'est qu'après l'élimination l'équation dernière contienne encore deux inconnues et soit de la forme

$$ax + by = c.$$

Il est évident que cette équation ne peut donner la valeur de l'une des inconnues qu'en attribuant une valeur à l'autre ; si, par exemple, on pose

$$x = \frac{c - by}{a};$$

on voit que, pour avoir la valeur de x, il faut prendre pour y une valeur qui reste arbitraire;

et comme, d'ailleurs, chaque valeur prise pour y en donnera une correspondante pour x, il est de toute évidence que le problème aura une infinité de solutions, lesquelles seront entières ou fractionnaires, positives ou négatives.

Cette conclusion s'applique forcément à tous les problèmes qui donnent moins d'équations qu'ils ne contiennent d'inconnues, et c'est pour cela qu'on les nomme indéterminés. Les inconnues x, y, z, prennent elles-mêmes, dans ce cas, le nom d'*indéterminées.*

142. **Analyse indéterminée.** Mais si les équations que fournissent les problèmes indéterminés peuvent *algébriquement* être satisfaites d'une infinité de manières, il y a des cas où les conditions de l'énoncé imposent certaines restrictions; ainsi, par exemple, certaines questions, par leur nature, ne comportent que des *solutions entières et positives*; or, la méthode employée pour trouver toutes les solutions entières et positives d'un problème indéterminé, porte le nom d'*analyse indéterminée.* C'est la matière de ce chapitre.

Pour commencer par le cas le plus simple, proposons-nous le problème suivant:

143. Problème 1er. *De combien de manières peut-on payer la somme de* 21 *fr. avec des pièces de* 1 *fr. et de* 5 *fr.*

En représentant par x les pièces de 1 fr. et par y celles de 5 fr., nous aurons l'équation

$$x + 5y = 21,$$

et c'est la seule que fournit ce problème, bien qu'il renferme deux inconnues distinctes: le problème est donc indéterminé.

Cette équation donne $\quad x = 21 - 5y;$

d'où l'on voit que, pour connaître la valeur de x, il faut donner une valeur arbitraire à y ; mais, puisque x et y doivent être entiers et positifs par la nature du problème, il est naturel de supposer y successivement égal aux nombres entiers consécutifs 1, 2, 3, etc.....

Or, $y = 1$ donne $x = 16$,
$y = 2$ $x = 11$,
$y = 3$ $x = 6$,
$y = 4$ $x = 1$,

et $y = 5$ rendrait x négatif : le problème admet donc les quatre solutions ci-dessus, et pas davantage.

Vérification. Il est facile, d'ailleurs, de se convaincre que ces solutions satisfont également au problème proposé. En effet, une pièce de 5 fr. et 16 pièces de 1 fr. font 21 fr. ; de même 2 pièces de 5 fr. et 11 pièces de 1 fr. font aussi 21 fr., et ainsi des autres.

144. PROBLÈME II. *Dans un repas on a bu pour 31 fr. de vins, bordeaux et champagne ; le premier a coûté 3 fr. la bouteille et le second 5 fr. Combien a-t-on pris de bouteilles de chaque espèce ?*

x et y représentant les nombres de bouteilles de bordeaux et de champagne, on aura l'équation

$$3x + 5y = 31,$$

laquelle donne $x = \dfrac{31 - 5y}{3}$.

Ici la valeur de x est sous forme fractionnaire, parce que cette inconnue a dans l'équation un coefficient autre que l'unité ; en sorte que si, comme dans le problème précédent, nous prenions immédiatement pour y les nombres naturels 1, 2, 3, etc., la plupart d'entre eux donneraient pour x des valeurs fractionnaires, et il faudrait essayer inutilement beaucoup de nombres avant d'arriver aux solutions entières et positives du problème.

Pour éviter ces essais infructueux, on doit assigner les limites entre lesquelles tombent les solutions véritables, et pour les trouver on emploie un procédé qui consiste en général à effectuer autant que possible la division indiquée par l'expression fractionnaire, et à donner au reste une forme entière, en introduisant une ou plusieurs *indéterminées* auxiliaires.

D'après cela la valeur $x = \frac{31 - 5y}{3}$

deviendra $$x = 10 - y + \frac{1 - 2y}{3},$$

et sous cette forme on verra immédiatement que, pour que x et y soient entiers, il faut choisir pour y des nombres entiers qui rendent entière la partie $\frac{1 - 2y}{3}$.

En représentant donc cette partie par l'indéterminée entière z, on posera

$$[1] \qquad \frac{1 - 2y}{3} = z,$$

et l'on aura pour x la forme entière

$$x = 10 - y + z.$$

Pour obtenir l'expression de y, on tirera sa valeur de l'équation de condition [1], et l'on aura successivement :

$$1 - 2y = 3z,\ 2y = 1 - 3z, \text{ et } y = \frac{1 - 3z}{2},$$

En effectuant encore la division, cette valeur devient

$$y = -z + \frac{1-z}{2};$$

et, pour donner à cette expression une forme entière, on représentera le reste $\frac{1-z}{2}$ par une nouvelle indéterminée entière t, et l'on aura à la fois

[2] $$\frac{1-z}{2} = t, \text{ et } y = -z + t.$$

Ensuite pour obtenir l'expression de z, on traitera l'équation de condition [2] comme on a traité l'équation [1] et on posera

$$1 - z = 2t, \text{ d'où } z = 1 - 2t$$

Maintenant que nous n'avons plus de dénominateur, il est évident que tout nombre entier, mis à la place de l'indéterminée t, donnera des valeurs entières pour les autres ; mais, comme nous ne devons tenir compte que des solutions entières et positives, il nous importe en outre de trouver les limites qui les renferment.

A cet effet, nous combinerons par voie d'élimination les trois expressions entières trouvées ci-dessus

$$x = 10 - y + z,$$
$$y = -z + t,$$
$$z = 1 - 2t,$$

lesquelles donnent successivement

$$y = -1 + 2t + t = 3t - 1,$$
$$x = 10 - 3t + 1 + 1 - 2t = 12 - 5t;$$

et nous aurons enfin, pour la solution du problème, les deux formules

$$x = 12 - 5t$$
$$x = 3t - 1.$$

Sous cette forme rien n'est si facile que d'assigner les limites demandées, car, pour que x et y soient entiers et positifs, il faut prendre pour l'indéterminée t les nombres entiers qui satisfont à la double condition

$$5t < 12 \text{ et } 3t > 1,$$

ou bien

$$t < \frac{12}{5} \text{ et } t > \frac{1}{3}.$$

En conséquence, puisque t doit être entier et compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{12}{5}$ on ne pourra avoir que $t =$ 1 ou $t = 2$.

mais $t = 1$ donne $x = 7$ et $y = 2$,

et $t = 2$ $x = 2$ $y = 5$.

Le problème offre donc deux solutions et pas davantage.

Vérification. D'après la première solution, on aurait bu 7 bouteilles de bordeaux à 3 fr. et 2 bouteilles de champagne à 5 fr., ce qui fait bien en tout 31 fr.

D'après la seconde, il y aurait eu 2 bouteilles de bordeaux, 6 fr., et 5 bouteilles de champagne, 25 fr., ou soit encore 31 fr.

145. En résumant la marche que nous venons de tracer, on voit que la recherche des solutions entières et positives d'un problème indéterminé consiste à tirer de l'équation du problème la

valeur de l'inconnue qui a le plus petit coefficient ; à opérer des divisions successives qui font diminuer les coefficients jusqu'à ce que l'un d'eux soit ramené à l'unité ; à introduire de nouvelles indéterminées, pour donner une expression entière aux valeurs de toutes les inconnues, et à éliminer ensuite entre ces expressions le plus grand nombre possible des indéterminées introduites.

146. Mais hâtons-nous de dire qu'avant d'appliquer cette règle à une équation donnée, il faut classer ses dénominateurs si elle en a, et la débarrasser des facteurs qui pourraient être communs à tous ses termes. En outre, il est possible de connaître à l'avance si le problème proposé aura ou non des solutions entières. Il existe à ce sujet le principe suivant :

147. *Pour qu'une équation à plusieurs inconnues admette des solutions entières, il faut et il suffit que les coefficients* ENTIERS *de ces inconnues soient premiers entre eux, ou bien, s'ils ont un facteur commun, que ce facteur divise également le terme tout connu.*

Remarquons d'abord que, si tous les termes de l'équation avaient un facteur commun, il faudrait l'en débarrasser dans tous les cas, en sorte qu'on peut toujours supposer que le terme tout connu est premier avec les coefficients ; mais il faut, de plus, que les coefficients soient premiers entre eux, car la méthode appliquée ci-dessus à l'équation $3x + 5y = 31$ consiste à diviser le plus grand coefficient 5 par le plus petit, ensuite ce dernier par le reste de leur division, ce premier reste par le second reste, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne l'unité pour le dernier reste, c'est-à-dire qu'on pratique sur les coefficients des deux inconnues la recherche du plus grand commun diviseur. Par conséquent, pour arriver à l'unité, il faut que ces coefficients soient premiers entre eux, comme dans l'équation proposée.

Si, au contraire, on avait l'équation

$$12x + 15y = 50,$$

dans laquelle les coefficients 12 et 15 ont un facteur commun 3 qui ne divise pas 50, on ne saurait avoir des solutions entières, parce qu'en divisant par ce facteur l'équation devient

$$4x + 5y = \frac{50}{3},$$

et que sous cette forme on voit évidemment qu'elle ne peut être satisfaite par aucune solution entière, attendu que toute valeur entière pour x et y donnerait un nombre entier dans le premier membre et ne pourrait pas être égal au terme tout connu $\frac{50}{3}$, qui est nécessairement fractionnaire ; il faut donc que l'une des inconnues au moins soit fractionnaire elle-même.

148. En second lieu, si l'on prenait l'équation

$$12x + 15y = 51,$$

qui en apparence, diffère peu de la précédente, on aurait des solutions entières, parce que le facteur 3, commun aux coefficients des inconnues, divise le terme tout connu 51, et que l'équation se réduit à

$$4x + 5y = 17,$$

dans laquelle les coefficients 4 et 5 sont premiers entre eux.

En effet, cette dernière équation donne le calcul suivant :

$$x = \frac{17 - 5y}{4} = 4 - y + \frac{1 - y}{4},$$

ou bien $\qquad x = 4 - y + z,$

$$\frac{1 - y}{4} = z, \text{ d'où } y = 1 - 4z;$$

et, en substituant cette valeur de y dans celle de x, on aura les deux formules

$$x = 3 + 5z \text{ et } y = 1 - 4z.$$

Ces expressions donnent à x et y des valeurs entières pour tous les nombres entiers qu'on peut mettre à la place de z ; mais il n'y a que la supposition $z = 0$ qui rende ces valeurs positives : le problème dont l'équation proposée serait la traduction ne comporterait donc que la seule solution entière et positive

$$x = 3 \text{ et } y = 1.$$

149. Comme application de tout ce qui précède, proposons-nous de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{5x}{12} - \frac{2y}{7} = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire de trouver toutes les solutions entières et positives qu'elle comporte.

Nous chasserons d'abord les dénominateurs et nous aurons

$$140x - 96y = 84;$$

en divisant ensuite par le facteur commun 4, nous obtiendrons

$$35x - 24y = 21.$$

Sous cette forme nous reconnaissons que l'équation et le problème qui l'a fournie auront des solutions entières, puisque les coefficients 35 et 24 des indéterminées sont premiers entre eux ; mais y en aura-t-il de positives et quelles sont-elles ? Voilà ce qu'il faut rechercher.

A cet effet, nous appliquerons à cette équation la méthode tracée nº 146, et, en prenant d'abord dans l'équation la valeur de y qui a le coefficient le plus petit, nous aurons la série des calculs indiqués dans le tableau suivant :

$$y = \frac{35x - 21}{24} = x + \frac{11x - 21}{24}.$$

$$y = x + z; \qquad \frac{11x - 21}{24} = z;$$

$$x = \frac{24z + 21}{11} = 2z + 1 + \frac{2z + 10}{11};$$

$$x = 2z + 1 + v; \qquad \frac{2z + 10}{11} = v;$$

$$z = \frac{11v - 10}{2} = 5v - 5 + \frac{v}{2};\ z = 5v - 5 + t,$$

$$\text{et} \quad \frac{v}{2} = t, \qquad \text{d'où} \qquad v = 2t.$$

Maintenant que toutes les indéterminées y, x, z, v ont une expression entière, nous remonterons par substitution de l'une à l'autre, et nous aurons successivement

$$z = 10t - 5 + t = 11t - 5,$$

$$x = 22t - 10 + 1 + 2t = 24t - 9,$$

$$y = 24t - 9 + 11t - 5 = 35t - 14,$$

Les deux formules du problème, dépendant de l'indéterminée t, sont donc

$$x = 24t - 9 \quad \text{et} \quad y = 35t - 14.$$

D'après la nature de ces expressions, on voit que tous les nombres entiers et positifs depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$ donneront des valeurs entières et positives pour x et pour y, en sorte que l'équation proposée admet une infinité de solutions. En effet, suivant que

$$t = 1, 2, 3, 4, 5, \text{etc.},$$

on a
$$x = 15, 39, 63, 87, 111, \text{etc.},$$
$$y = 21, 56, 91, 126, 161, \text{etc},$$

et toutes ces solutions vérifient l'équation proposée.

150. *Remarque I.* C'est ici le moment de faire une observation importante : dans tous les problèmes indéterminés, les diverses valeurs de la même inconnue forment toujours une progression arithmétique, et dans le cas de deux inconnues et par conséquent d'une seule équation, la progression formée par les valeurs de x a pour raison le coefficient de y dans l'équation, tandis que le coefficient de x devient la raison arithmétique des valeurs de y. On trouve la vérification de ce fait dans les trois problèmes traités ci-dessus n^{os} 143, 144, 149.

151. *Remarque II.* D'après ces exemples, nous voyons que certains problèmes indéterminés donnent un nombre fort restreint de solutions, tandis que d'autres en admettent une infinité. Ce double résultat est également facile à prévoir, à l'inspection seule de l'équation du problème et en vertu de ce principe : *que, dans toute équation dont les deux termes, contenant les deux inconnues, ont le même signe, les solutions entières et positives*

sont limitées ; tandis que ces solutions sont en nombre infini quand ces inconnues ont des signes différents.

En effet, dans les équations

$$3x + 5y = 31 \text{ (n}^\circ\text{ 144), et } x + 5y = 21 \text{ (n}^\circ\text{ 143)},$$

où les inconnues x et y ont le même signe, le premier membre se compose de deux nombres entiers et positifs dont la somme doit être égale au terme tout connu, et alors les indéterminées x et y ne peuvent prendre qu'un nombre limité de valeurs différentes ; tandis que dans l'équation

$$35x - 24y = 21 \text{ (n}^\circ\text{ 149)},$$

où les indéterminées x, y ont des signes contraires, la différence $35x - 24y$ pourra égaler le nombre entier 21 dans une infinité de cas.

152. *Remarque III.* Quand on traite une équation indéterminée par le procédé indiqué nos 145, 146, on a quelquefois une longue série d'opérations à effectuer avant d'arriver à l'unité pour coefficient ; mais souvent aussi on peut abréger les calculs comme nous allons le faire voir.

Soit à résoudre l'équation

$$65x - 7y = 30$$

qui donne
$$y = \frac{65x - 30}{7};$$

il se présente une première simplification, à cause du facteur 5 commun aux deux termes du numérateur : car on peut écrire

$$y = \frac{5\,(13x - 6)}{7},$$

et remarquer que, pour rendre y entier, il suffit de déterminer x de manière que $13x-6$ soit divisible par 7, c'est-à-dire de poser

$$\frac{13x-6}{7}=z, \text{ ce qui donne } y=5z.$$

Ainsi la question est ramenée à traiter une équation plus simple que la proposée ; mais ce n'est pas tout : une nouvelle simplification est encore praticable.

Pour traiter l'équation

$$z=\frac{13x-6}{7},$$

il faudrait diviser 13 par 7, ensuite 7 par le reste, et ainsi de suite, ce qui introduirait cinq à six indéterminées accessoires avant d'arriver à l'unité, tandis que, avec une petite modification, on n'aura besoin que d'une seule indéterminée nouvelle. En effet, il suffit d'augmenter d'une unité les coefficients 13 et 6 du numérateur pour les rendre divisibles par le dénominateur 7 et on peut opérer cette modification sans changer la valeur de z, en ajoutant et retranchant à la fois $x-1$ à ce numérateur, c'est-à-dire en posant

$$z=\frac{13x-6+x-1-x+1}{7}=\frac{14x-7+1-x}{7},$$

ce qui donne alors

$$z=2x-1+\frac{1-x}{7};$$

et, en faisant $\frac{1-x}{7}=t$, d'où $x=1-7t$,

on a sur-le-champ $z=2x-1+t$,

ou bien $z=1-13t$, et ensuite $y=5-65t$.

153. *Observation.* Cet exemple fournit une autre observation que nous n'avions pas eu occasion de faire encore : c'est que l'indéterminée t doit être prise ici négativement pour que les valeurs de x et de y soient positives. Cela d'ailleurs est tout à fait permis, car, dans les méthodes ci-dessus, les indéterminées accessoires ne sont astreintes qu'à la condition d'être entières, quels que soient leurs signes. Il n'y a que les inconnues, qui figurent dans l'énoncé du problème et dans l'équation primitive, qui doivent être entières et positives.

Cela posé, puisque dans les formules précédentes

$$x = 1 - 7t \text{ et } y = 5 - 65t$$

toute valeur entière et positive de t donnerait à x et à y des valeurs négatives inadmissibles, nous supposons successivement

$$t = 0, -1, -2, -3, - \text{etc.},$$

et nous aurons pour valeurs correspondantes les progressions indéfinies

$$x = 1, 8, 15, 22...$$
$$y = 5, 70, 135, 200...$$

154. Jusqu'ici nous n'avons traité que des problèmes à deux inconnues ; quant à ceux qui en renferment un plus grand nombre, soit qu'ils fournissent une ou plusieurs équations, il suffira de donner la règle suivante :

155. **Règle.** *Quel que soit le nombre des équations il faut opérer l'élimination jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'une seule équation ; tirer de cette équation finale la valeur de l'inconnue qui a le plus petit coefficient ; ramener cette valeur à la forme entière et remonter par substitution à toutes les expressions antérieures, afin d'obtenir pour chaque inconnue*

une formule en fonction de la même ou des mêmes indéterminées.

QUESTIONNAIRE.

Donnez la formule dans le cas le plus simple des problèmes indéterminés du 1er degré. (141)

Qu'appelle-t-on analyse indéterminée ? (142)

Donnez des exemples. (148, 144)

En quoi consistent, en résumé, les solutions entières et positives d'un problème indéterminé ? (145)

Donnez le principe qui facilite la recherche de ces solutions. (146)

Faites l'application de ces règles. (148)

Par quel principe peut-on prévoir le nombre de solutions ? (150)

Peut-on quelquefois simplifier les opérations, et comment ? (151)

Quelle est la règle pour les problèmes indéterminés à plusieurs inconnues ? (154)

EXERCICES ET PROBLEMES

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

95. On veut former la longueur du mètre en alignant des pièces d'or de 20 fr. et de 40 fr., dont les diamètres respectifs sont de 21 et de 26 millimètres. De combien de manières peut-on le faire ?

96. Sachant que le diamètre d'une pièce de 5 fr. est de 37 millimètres, celui des pièces de 2 fr. de 27 millimètres, et celui des pièces d'un franc de 23 millimètres, on demande de combien de manières on pourrait obtenir la longueur du mètre, en alignant des pièces d'argent de ces trois espèces.

97. Une société d'élèves rhétoriciens et philosophes dépensent dans une promenade 75 fr.

Les rhétoriciens ont payé chacun 2 fr. 10c. et les philosophes 2 fr. 40c. Combien y avait-il de rhétoriciens et de philosophes ?

98. Deux paysannesont ensemble 100 œufs. L'une dit à l'autre : Quand je compte mes œufs par huitaine, il y a un surplus de 7. La seconde répond : Si je compte les miens par dizaines, j'en ai aussi 7 de surplus. Combien chacune a-t-elle d'œufs ?

CHAPITRE VI.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

Formation du carré des quantités littérales.

156. **Observation.** On sait que le carré ou la seconde puissance d'une quantité est le produit de cette quantité par elle-même.

Ainsi le carré de a est $a \times a$ ou a^2 ;
Le carré de $4a^2b$ sera $4a^2b \times 4a^2b = 16a^4b^2$;
Celui de $-3b$ est $-3b \times -3b = +9b^2$.

De même le carré d'une fraction $\frac{a}{b}$ s'obtiendra en élevant au carré chacun de ses termes ; car

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

157. **Carré d'un monôme.** Nous savons déjà que le carré d'un monôme se forme en élevant au carré chacun de ses facteurs, c'est-à-dire *en faisant le carré de son coefficient numérique, en doublant les exposants de toutes les lettres, et en*

donnant toujours au résultat le signe +. Ainsi le carré de $5a^4b^3c$ est $25a^8b^6c^2$;
celui de $-5a^4b^3c$ est également $25a^8b^6c^2$,
car, d'après la règle du nº 42,

$$+a \times +a = -a \times -a = a^2.$$

158. **Carré d'un binôme.** Nous savons aussi que le carré d'un binôme se compose, comme nous l'avons dit (nº 53) de trois parties : *du carré du premier terme de ce binôme, du double produit du premier terme par le second, et du carré du second terme.*

159. **Carré d'une fraction.** Enfin, le carré d'une fraction quelconque est une autre fraction dont les termes sont les carrés respectifs des termes de la fraction donnée ; ce carré est toujours positif.

Ex. $$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

Extraction de la racine carrée des quantités algébriques.

160. **Definitions.** Nous avons appelé *racine* (nº 7 Rem.) la quantité qui sert à former la puissance.

161. L'*extraction* de la racine carrée d'une quantité algébrique est l'opération qu'il faut effectuer sur le carré pour retrouver la racine ; cette opération s'indique par le signe $\sqrt{}$, comme nous l'avons dit nº 8.

162. Toute quantité est racine, parce qu'on peut toujours, par des multiplications, former sa puissance ; mais toute quantité n'est pas puis-

sance : au contraire, dans les quantités algébriques, comme dans les nombres, les puissances exactes sont peu nombreuses. Cela posé :

163. On nomme *rationnelles* toutes les quantités qui forment une puissance exacte et qui, par conséquent, ont une *racine ;* et, par opposition, on appelle *irrationnelles* celles qui ne sont pas des puissances exactes ; ainsi $\sqrt{81}$ est une quantité rationnelle, et $\sqrt{7}$ une quantité irrationnelle.

164. **Double signe. Racine ambiguë.** Hâtons-nous de remarquer que la racine carrée d'une quantité quelconque doit toujours être affectée du double signe, parce que, d'après la loi de formation des carrés, le changement de signe dans la racine ne change en rien le signe du carré. On écrira donc $\sqrt{a^2} = \pm a$; et, en effet, a^2 est aussi bien le carré de $+ a$ que de $- a$. On exprime cette particularité en disant que la racine carrée d'une quantité algébrique est *ambiguë*.

165. **Racine carrée des monômes.** Pour extraire la racine carrée d'un monôme, il faut opérer sur chaque facteur en particulier, c'est-à-dire *extraire d'abord celle de son coefficient numérique* (Arith), *diviser par 2 les exposants de toutes les lettres, et affecter le résultat du double signe* $\pm$. Ainsi on aura

$$\sqrt{25a^6b^4c^2} = + 5a^3b^2c.$$

166. *Remarque* I. Il suit de cette règle qu'à l'inspection seule d'un monôme on reconnaîtra s'il est ou s'il n'est pas un carré parfait, c'est-à-dire que :

1° Tout monôme positif, dont le coefficient numérique est un carré et dont les facteurs littéraux sont affectés d'exposants pairs, *est un carré parfait ;*

2° Tout monôme *ne peut être un carré* s'il est négatif, ou bien si, étant positif, l'un des exposants est impair, ou si le coefficient numérique n'est pas un carré parfait.

167. **Comment indiquer la racine d'un carré qui n'est point parfait.** Quoiqu'une quantité algébrique ne soit pas un carré parfait, on a besoin souvent d'exprimer sa racine, et l'on se borne alors à placer cette quantité sous le signe radical sans oublier le double signe ; ainsi la racine carrée de $12a^3b^2$ sera $\pm\sqrt{12a^3b^2}$; de même, la racine incomplète du binôme $a^2 + b$ s'indiquera par

$$\pm\sqrt{a^2 + b}.$$

168. *Remarque* II. Si les quantités irrationnelles n'ont pas de racines exactes, on peut du moins calculer ces racines par approximation, quand ces quantités sont positives ; mais si l'on veut se faire une idée de la racine carrée d'une quantité négative, eût-elle un aspect rationnel, l'imagination se perd ; ainsi

$$\sqrt{-4},\ \sqrt{-a^2},\ \sqrt{-3b}$$

sont des expressions qui n'ont aucun sens et qu'on nomme *imaginaires*, par opposition aux quantités positives et négatives qui ont une signification bien établie et qu'on appelle *réelles*. En effet, l'on ne saurait se représenter une quantité qui, multipliée par elle-même, donne un produit négatif

$$-4,\ -a^2;\ -3b.$$

169. **Racine carrée des quantités fractionnaires.** Pour extraire la racine carrée d'une ex-

pression fractionnaire, *on extrait séparément celle du numérateur et celle du dénominateur* : cette règle découle de la règle nº 159, 3º. Ainsi on aura

$$\sqrt{\frac{4a^4b^2}{9m^2x^6}} = \frac{\sqrt{4a^4b^2}}{\sqrt{9m^2x^6}} = \frac{2a^2b}{3mx^3}.$$

Les caractères indiqués plus haut pour les monômes nous serviront à reconnaître également si une fraction donnée est un carré parfait ou non.

170. D'après ce qui précède (nºs 154, 155), le carré d'un monôme est un monôme, et le carré d'un binôme est un trinôme ; par conséquent, une quantité composée de deux termes ne peut jamais être un carré parfait, et il n'y a pas lieu de chercher sa racine. Mais un trinôme pouvant être un carré, on doit se demander quels sont les caractères auxquels on reconnaîtra qu'un trinôme donné est un carré parfait et comment on trouvera sa racine.

Pour résoudre cette double question, il faut se rappeler (nºs 53 et 158) la loi de formation du carré d'un binôme, c'est-à-dire que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

et l'on en conclura :

1º Que pour qu'un trinôme soit un carré parfait, il faut qu'il contienne *deux termes positifs qui soient eux-mêmes des carrés monômes*, et un troisième terme positif ou négatif, mais *formé du double produit des racines des deux autres* ;

2º Que lorsqu'un trinôme est un carré, sa racine est nécessairement un binôme ;

3º Que, pour extraire la racine carrée d'un trinôme, il suffit d'opérer l'extraction sur les deux monômes qui sont des carrés parfaits, en donnant aux racines le même signe ou des signes contraires, selon que le double produit est positif ou négatif.

171. **1er Exemple.** Pour application de ces principes, soit proposé le trinôme

$$9a^4x^2 + 12a^2bx + 4b^2.$$

On voit de suite que ce trinôme est un carré parfait, car les termes extrêmes $9a^4x^2$ et $4b^2$ sont les carrés monômes de $3a^2x$ et $2b$, tandis que le troisième terme $12a^2bx$ est le double du produit $3a^2x \times 2b$ des racines des deux autres.

On voit de plus que la racine de ce trinôme sera le binôme formé des deux racines monômes $3a^2x$ et $2b$, lesquelles seront prises avec le même signe, attendu que le double produit $12a^2bx$ est positif, c'est-à-dire que cette racine est $+ 3a^2x + 2b$, ou bien $- 3a^2x - 2b$. On écrira donc :

$$\sqrt{9a^4x^2 + 12a^2bx + 4b^2} = \pm (3a^2x + 2b).$$

172. **2e Exemple.** Soit encore le trinôme $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$; on reconnaîtra pareillement que c'est un carré parfait, puisque x^2 et $\frac{9}{4}$ sont les carrés de x et de $\frac{3}{2}$, et que $2 \times x \times \frac{3}{2} = 3x$; mais comme ce double produit est négatif dans le trinôme donné, les deux termes de la racine seront de signes contraires, et l'on aura $x - \frac{3}{2}$ ou bien $\frac{3}{2} - x$ pour cette racine, c'est-à-dire que

$$\sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4}} = \pm (x - \tfrac{3}{2}).$$

173. **3e Exemple.** Enfin, si l'on proposait le trinôme

$$4x^2 + 5\,ax + a^2,$$

on reconnaîtrait bientôt que ce n'est pas un carré parfait, bien que les deux termes extrêmes le soient, car le troisième terme $5x$ n'est point égal au double produit des racines $2x$ et a des deux autres.

De même $-x^2 + 2ax - a^2$ ne saurait être carré, à cause des signes négatifs qui affectent les monômes carrés x^2 et a^2.

174. **Compléter le carré.** Nous avons dit qu'un binôme ne peut jamais être un carré ; mais on comprend aussi que quelquefois les deux termes d'un binôme donné doivent être composés de telle sorte qu'ils pourraient faire partie d'un trinôme carré, c'est-à-dire qu'il suffirait d'ajouter à ce binôme un troisième terme convenable pour le transformer en carré parfait. Quand on a opéré cette transformation, on dit qu'on a *complété le carré.*

175. Soit le binôme $x^2 + a^2$ composé de deux termes carrés ; il est évident qu'il peut faire partie d'un carré parfait, car si l'on ajoute à la somme de ces deux carrés le double produit de leurs racines $2ax$, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$, on aura le trinôme carré

$$x^2 \pm 2ax + a^2,$$

lequel a pour racine $x \pm a$.

176. En second lieu, soit un binôme dont les deux termes contiennent, l'un le carré (x^2) de l'inconnue et l'autre, la 1re puissance (x) de cette même inconnue.

177. Si le coefficient de x^2 est l'unité, il suffira, pour compléter le carré, d'ajouter au binôme pour troisième terme le carré de la moitié du coefficient de x. Si l'on avait, par exemple, le binôme $x^2 + 6x$ on y ajouterait pour troisième terme le carré de 3, moitié du coefficient du terme $6\,x$. On aurait ainsi

$$x^2 + 6x + 9,$$

dont la racine carrée est $x + 3$.

178. Si l'on avait eu le binôme $x^2 - 6x$ dans lequel x fait partie d'un terme négatif, on serait arrivé, en complétant le carré, au trinôme

$$x^2 - 6x + 9,$$

dont la racine carrée est $x - 3$.

179. Si le coefficient était autre que l'unité, on multiplierait les deux termes du binôme par quatre fois le coefficient de x^2 et l'on ajouterait, pour troisième terme, au binôme ainsi modifié, le carré du coefficient primitif de x.

Soit le binôme $3x^2 + 5x$.

En multipliant les deux termes par $3 \times 4 = 12$ l'on obtiendra

$$36\, x^2 + 60.$$

En ajoutant au binôme ainsi modifié le carré du coefficient primitif de x, c'est-à-dire 25, l'on obtient le trinôme $36x^2 + 60x + 25$, lequel est un carré parfait, dont la racine est $6\,x + 5$.

QUESTIONNAIRE.

Comment se forme le carré d'un monôme ? (157-1°) — d'un binôme ? (158-2°) — d'une fraction ? (159-3°)

Les quantités entières contiennent-elles des radicaux et des dénominateurs ? (163)

Les quantités rationnelles ont-elles un radical ?

Peut-on faire disparaître le radical dans les quantités irrationnelles ? (163)

De quel signe la racine carrée d'une quantité quelconque doit-elle toujours être affectée ? (164)

Comment fait-on pour extraire la racine carrée d'un monôme ? (165)

Qu'avez-vous à remarquer au sujet des quantités irrationnelles ? (168)

Comment fait-on pour extraire la racine carrée d'une quantité fractionnaire ? (169)

Comment reconnaître qu'un trinôme est un carré parfait ? (170).

Comment trouver la racine d'un trinôme ? (170...)

Que faut-il entendre par ces mots " compléter le carré " ? (174).

Quelle est la première méthode pour compléter le carré ? (175).

Quelle est la seconde ? (179...)

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ET DES PROBLÈMES DU DEUXIÈME DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

180. **Racines de l'équation.** Résoudre une équation du deuxième degré, c'est déterminer les valeurs qu'il faut mettre à la place de l'inconnue pour satisfaire à cette équation. Ces valeurs s'appellent les *racines* de l'équation.

On distingue les équations du deuxième degré en équations *incomplètes* et en équations *complètes*.

181. **Equation incomplète.** On nomme *équation incomplète*, ou *à deux termes*, celle qui, après l'évanouissement des dénominateurs et les réductions opérées, ne contient plus que deux espèces de termes, les uns en x^2, les autres tout connus, et qui, par conséquent, peut se ramener à la forme générale $ax^2 = b$.

Comme, d'ailleurs, on peut toujours, dans cette équation, diviser les deux membres par le coefficient de x^2 et représenter le quotient $\frac{b}{a}$ par m, on peut poser $x^2 = m$ pour l'équation générale du second degré à deux termes.

182. **Equation complète.** On appelle équation *complète*, ou à trois termes, toute équation du second degré qui, après l'expulsion des dénomi-

nateurs et les réductions, renferme des termes en x^2, des termes en x et des termes tout connus, c'est-à-dire celle qui peut prendre la forme

$$ax^2 + bx = c.$$

Comme on pourra toujours rendre le premier terme en x^2 positif et diviser l'équation par le coefficient a de ce premier terme, on aura

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}.$$

Enfin, en faisant $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$, l'équation générale du second degré à trois termes sera

$$x^2 + px = q,$$

c'est-à-dire que toute équation complète du deuxième degré à une seule inconnue peut toujours être ramenée à n'avoir dans le premier membre que deux termes contenant l'inconnue, le premier, toujours positif, formé de la seconde puissance de l'inconnue sans autre coefficient que l'unité ; l'autre, composé de la première puissance de l'inconnue, laquelle sera affectée d'un coefficient quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire ; enfin le second membre de cette équation sera un terme tout connu ayant un signe et une valeur quelconques.

Résolution des équations incomplètes du deuxième degré.

183. **Résolution des équations incomplètes.** Puisque toute équation du second degré à deux termes se ramène à $x^2 = m$, dans laquelle l'inconnue x forme un carré positif n'ayant jamais

d'autre coefficient que l'unité, il est bien évident qu'une seule extraction de racine carrée suffit pour résoudre ce genre d'équation.

En effet, $x^2 = m$ donne $x = \sqrt{m}$ ou bien (nº 164) $x = \pm\sqrt{m}$. D'après ce que nous avons dit au nº 165, il semblerait qu'en extrayant la racine carrée des deux membres de l'équation $x^2 = m$, on devrait affecter du double signe les deux racines et écrire $\pm x = \pm\sqrt{m}$; mais il est facile de se convaincre que ce double emploi est inutile, et qu'il suffit de donner le double signe au second membre.

En effet, $\pm x = \pm\sqrt{m}$ deviendrait en séparant les signes,

$$1^\circ\ +x = \pm\sqrt{m} \text{ ou } x = \sqrt{m} \text{ et } x = -\sqrt{m};$$

$$2^\circ\ -x = \pm\sqrt{m}, \text{ ou } x = \pm\sqrt{m},$$

ce qui donne $x = -\sqrt{m}$, $x = +\sqrt{m}$;

c'est-à dire qu'on a les mêmes valeurs dans les deux cas.

Ainsi, une équation du second degré à deux termes donne deux valeurs ou racines égales et de signes contraires. Ordinairement on désigne ces racines par x', x'', et l'on pose

$$x' = +\sqrt{m},\quad x'' = -\sqrt{m}.$$

Ces deux racines sont *réelles* quand le *terme* tout connu m est positif; mais elles seraient *imaginaires* si m devenait négatif. Dans ce dernier cas, l'équation serait impossible.

184. **Equation numérique.** Proposons-nous, pour exemple, de résoudre l'équation numérique

$$\frac{3x}{5} = \frac{15}{x}.$$

En chassant les dénominateurs, nous aurons successivement

$$3x^2 = 75,\ x^2 = \frac{75}{3},\ x^2 = 25\ ;$$

et, en extrayant la racine carrée des deux membres, on aura

$$x = \pm \sqrt{25},$$

ce qui donne les deux racines égales et de signes contraires

$$x' = +\ 5,\ x'' = -\ 5.$$

Vérification. Ces valeurs vérifient également l'équation proposée, car la première donne

$$\frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5} \text{ ou bien } 3 = 3,$$

et la seconde

$$\frac{3 \times -5}{5} = \frac{-15}{5} \text{ ou } -3 = -3,$$

185. **Equation littérale.** Enfin, pour dernier exemple, proposons-nous de résoudre l'équation littérale

$$3x^2 = \frac{2x^2}{a} + 5b.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette équation devient d'abord

$$3ax^2 = 2x^2 + 5ab,$$

et, en mettant x^2 en facteur commun,

$$(3a - 2)\,x^2 = 5ab\ ;$$

d'où l'on tire successivement

$$x^2 = \frac{5ab}{3a-2} \text{ et } x = \pm \sqrt{\frac{5ab}{3a-2}}$$

ce qui donne deux racines qui satisfont à l'équation proposée.

QUESTIONNAIRE.

Qu'est-ce que résoudre une équation du deuxième degré ? (180).

Qu'appelle-t-on équation incomplète ? (181).

Qu'appelle-t-on équation complète ? (182).

Comment s'opère la résolution des équations incomplètes du 2ème degré ? (183).

Donnez des exemples. (184, 185).

EXERCICES

SUR LES ÉQUATIONS A DEUX TERMES

Résoudre les équations suivantes :

101. $5\,x^2 - 1 = 244.$

102. $7\,x^2 + 9 = 3\,x^2 + 63.$

103. $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = 4$

104. $(x+a)^2 = 2$ [illegible] $6.$

105. $\left(a + \frac{a}{x}\right)\left(a - \frac{a}{x}\right) = (a+b)(a-b).$

Résolution des équations complètes du second degré.

186. **Résolution des équations complètes.** Nous savons (nº 182) que l'équation complète du

second degré à une seule inconnue peut toujours prendre la forme

$$[1] \qquad x^2 + px = q.$$

Or, d'après ce que nous avons dit (n° 174), on voit que le premier membre $x^2 + px$ fait partie du carré d'un binôme, puisque x^2 est un carré parfait et que px contient la racine x de ce carré; on pourra donc toujours compléter le carré en considérant px comme le double produit des deux termes de ce binôme.

Puisque ce binôme a pour premier terme connu x, il faut que p soit le double du second terme inconnu : donc $\frac{p}{2}$ est le second terme du binôme, et $\frac{p^2}{4}$ en est le carré.

En conséquence, pour compléter le carré dont $x^2 + px$ font partie, il suffit d'ajouter $\frac{p^2}{4}$ à ces deux termes; mais pour ne pas altérer l'équation [1], on fera subir au second membre la même addition qu'au premier, et cette équation deviendra alors

$$[2] \qquad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}.$$

En conséquence, l'équation proposée [1] pourra toujours être transformée en une autre [2] dont le membre qui contient l'inconnue est un trinôme carré parfait, et dont l'autre membre est une quantité toute connue.

Avant d'aller plus loin, appliquons ceci à quelques exemples numériques.

187. Supposons d'abord que l'énoncé d'un problème ait donné l'équation du second degré

$$(x - 6)\,x = 55,$$

laquelle devient, en effectuant le calcul indiqué,

$$x^2 - 6x = 55.$$

Sous cette forme, on reconnaît que $x^2 - 6x$ fait partie du carré d'un binôme dont x est le premier terme et dont le second est la moitié du coefficient -6, ou bien -3, c'est-à-dire que, si l'on ajoute 9, carré de -3, à $x^2 - 6x$, on aura un carré parfait $x^2 - 6x + 9$, dont la racine connue est $x - 3$. Mais l'addition faite au premier membre doit être faite aussi au second pour conserver l'égalité, et alors l'équation proposée devient

$$x^2 - 6x + 9 = 55 + 9 = 64.$$

Par cette transformation, nous avons ramené l'équation donnée à avoir pour premier membre un trinôme carré dont la racine est connue, et pour second membre un nombre dont la racine carrée est facile à trouver ; en sorte que l'équation du second degré sera réduite au premier degré par l'extraction de la racine carrée de ses deux membres. Cette équation transformée donne en effet,

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{64},$$

ou bien $x - 3 = \pm 8$, d'où $x = 3 \pm 8$.

En représentant par x' et x'' les deux racines de l'équation, on trouvera pour ces deux valeurs

$$x' = 3 + 8 = 11,$$
$$x'' = 3 - 8 = -5.$$

En effet, la substitution des valeurs $+ 11$ et

— 5 à la place de x satisfait également à l'équation donnée.

188. Pour second exemple, soit à résoudre l'équation

$$3x^2 + 2x = 56.$$

Le terme du second degré ayant un coefficient autre que l'unité, il faudra diviser tous les termes de cette équation par ce coefficient 3 de x^2, afin de la ramener à la forme générale $x^2 + px = q$, et l'équation donnée deviendra

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{56}{3}.$$

Maintenant, pour compléter le carré dans le premier membre, nous prendrons, comme ci-dessus, la moitié du coefficient $\frac{2}{3}$ de x, laquelle moitié est $\frac{1}{3}$; nous en ferons le carré $\frac{1}{9}$, et nous ajouterons ce carré à chaque membre de l'équation, qui deviendra alors

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{56}{3} + \frac{1}{9}$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée de chaque membre pour ramener l'équation au premier degré, et nous aurons

$$x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{56}{3} + \frac{1}{9}},$$

ou bien $$x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{169}{9}};$$

d'où l'on tire $x = -\frac{1}{3} \pm \frac{13}{3}$;

les deux racines de l'équation sont donc

$$x' = -\frac{1}{3} + \frac{13}{3} = \frac{12}{3} = 4,$$

$$x'' = -\frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{14}{3},$$

lesquelles satisfont également à l'équation donnée.

REMARQUE. On pourrait encore appliquer ici la seconde méthode que nous avons donnée au chapitre précédent pour compléter le carré (nº 179).

Ainsi l'équation donnée

$$3x^2 + 2x = 56$$

devient $3x^2 \times 12 + 2x \times 12 = 56 \times 12$,

ou $36x^2 + 24x = 672$.

En ajoutant au premier membre le carré du coefficient primitif de x nous avons

$$36x^2 + 24x + 4 = 676.$$

Extrayant la racine carrée de chaque membre de l'équation, il vient

$$6x + 2 = \pm\sqrt{676} = \pm 26,$$

d'où $6x = \pm 26 - 2$,

et par conséquent

$$x' = \frac{26-2}{6} = 4,$$

$$x'' = \frac{-26-2}{6} = \frac{-28}{6} = -\frac{14}{3}.$$

189. Ces deux exemples numériques suffisent pour faire comprendre comment la résolution d'une équation du second degré se ramène à celle d'une équation du premier degré. On voit que, pour abaisser l'équation du second au premier degré, il faut opérer une transformation par laquelle le premier membre de cette équation devient un carré parfait, et le second membre un nombre tout connu, comme nous l'avons indiqué n° 182.

Donc, en général, toute équation du second degré, représentée par $ax^2 + bx = c$, devra passer par les modifications successives qu'on voit dans le tableau suivant :

$$x^2 + px = q,$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}.$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

190. **Simplification**. Si l'on a bien compris cette théorie, qui n'est que l'application de celle du n° (174,), on verra qu'il n'est même pas nécessaire d'effectuer tous les calculs ci-dessus ; en effet, la moitié $\frac{p}{2}$ du coefficient de x, dont on

fait le carré pour l'ajouter aux deux membres, devient, après l'extraction de la racine carrée, le second terme d'un binôme dont x est le premier terme, et ce second terme conserve le signe qu'il avait dans l'équation, c'est-à-dire que la racine du premier membre de l'équation complétée est $x + \frac{p}{2}$ ou $x - \frac{p}{2}$, suivant que p est positif ou négatif dans l'équation proposée. On peut donc écrire immédiatement cette racine. D'un autre côté, quand on tire la valeur de x, qui est $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$, cette moitié $\frac{p}{2}$ passe dans le second membre en changeant de signe, et s'y trouve alors avec un signe contraire à celui qu'avait le coefficient p dans l'équation primitive. De là résulte la règle générale suivante pour résoudre les équations complètes du second degré.

191. **Règle.** *Quand on a mis en équation un problème du second degré, il faut effectuer les calculs indiqués dans cette équation, chasser ses dénominateurs, réduire, simplifier, et enfin diviser tous les termes par le coefficient de x^2, pour que l'équation donnée prenne la forme générale*

$$x^2 + px = q.$$

Alors on aura sur-le-champ la double valeur de l'inconnue x en posant : x *égale la moitié du coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée de la somme qu'on obtient en ajoutant au carré de ce demi-coefficient le terme tout connu de l'équation, avec le signe qu'il a dans le second membre.*

Il est important que les élèves retiennent cette règle, et, pour la bien fixer dans leur mémoire, nous allons traiter quelques exemples.

192. **Exemple**. Proposons-nous l'équation

$$\frac{(x+2)(x-1)}{3x} = \frac{x-1}{5}$$

En effectuant les calculs, chassant les dénominateurs et réduisant, on a successivement

$$5(x^2 + x - 2) = 3x(x-1),$$
$$5x^2 + 5x - 10 = 3x^2 - 3x,$$
$$2x^2 + 8x = 10,$$
$$x^2 + 4x = 5;$$

et cette dernière donne enfin, d'après la règle nº 183

$$x = -2 \pm \sqrt{5+4};$$

d'où l'on tire $x' = -2 + 3 = 1,$

$$x'' = -2 - 3 = -5.$$

Ces deux racines de signes contraires satisfont à l'équation proposée.

193 **Autre exemple**. Soit enfin l'équation

$$\frac{x}{x+6} = \frac{7}{5-3x},$$

laquelle donne successivement

$$5x - 3x^2 = 7x + 42,$$
$$3x^2 + 2x = -42,$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x = -14;$$

et, en vertu de la règle citée,

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 14}.$$

Il est facile de reconnaître ici que nous n'aurons pas de racines, car le radical renfermant deux nombres dont le plus grand est négatif, la valeur de ce radical est imaginaire, et, par suite, les racines cherchées le sont aussi.

Problèmes du second degré.

~~Interprétation géométrique des racines.~~

194. **Mise en équation des problèmes du second degré.** La mise en équation des problèmes du second degré est basée sur les mêmes principes que pour le premier degré (96).

195. PROBLÈME 1er.—*Un triangle a une surface de 58 mètres carrés 2 décimètres carrés; on sait que sa base est triple de sa hauteur; quelles sont les dimensions du triangle?*

On se rappellera que la surface d'un triangle s'obtient en multipliant la base par la demi-hauteur; or, si x représente la hauteur du triangle demandé, $3x$ sera la base et $3x \times \frac{x}{2}$ la surface; on aura donc l'équation

$$3x \times \frac{x}{2} = 58{,}02$$

laquelle donne successivement

$$3x^2 = 116{,}04$$

$$x^2 = \frac{116{,}04}{3} = 38{,}68$$

et $x = \pm\sqrt{38{,}68}$ ou bien $x = 6^{m}{,}219$.

La nature de la question n'admet pas le double signe, en sorte que nous ne devons tenir compte que de la solution positive qui répond au sens direct de l'énoncé. Par conséquent, la hauteur du triangle est de 6 mètres 219 millimètres, à moins d'un millimètre près, et la base de ce triangle $3 \times 6{,}219 = 18^m{,}657$.

196. PROBLÈME II. *On a acheté un meuble que l'on a revendu à perte pour le prix de $24 ; à ce compte, le taux de la perte et le prix d'achat sont exprimés par le même nombre ; quel est le prix d'achat ?*

Si x représente le prix d'achat, la perte effectuée sera le x pour cent de x, ou bien $\frac{x^2}{100}$.

D'un autre côté, $x - 24$ est une seconde expression de cette perte ; on aura donc l'équation

$$\frac{x^2}{100} = x - 24,$$

laquelle donne $x^2 - 100x = -2400$,

$$x = 50 \pm \sqrt{2500 - 2400},$$

$$x = 50 \pm 10, \text{ d'où } x' = 60 \text{ et } x'' = 40.$$

Ces deux racines positives satisfont à l'équation et indiquent que le problème est susceptible de deux solutions dans le sens direct de son énoncé.

En effet, si le prix d'achat est 60 $ la perte sera $60 - 24 = 36$ $. ; or, 36 est précisément le 60 pour cent de 60.

De même, si le meuble a coûté 40 $., la perte a été de $40 - 24 = 16$; or, 16 est bien le 40 pour cent de 40.

QUESTIONNAIRE.

Quelle forme une équation complète du second degré peut-elle toujours prendre ? (186)

Qu'y a-t-il à faire tout d'abord pour résoudre ces équations ? (186)

Donnez quelques exemples. (187)

Quelle méthode peut-on encore employer pour compléter le carré dans le cas du nº 188 ? (188—Rem.)

Quelles sont les modifications par lesquelles passe une équation du second degré représentée par $ax^2 + bx = c$. (189)

Que faut-il faire pour obtenir la valeur de l'inconnue x dans un problème du 2e degré ? (191)

Donnez des exemples. (192, 193)

Sur quels principes la mise en opération des problèmes du 2e degré est-elle basée ? (194)

Donnez des exemples. (195)

EXERCICES ET PROBLÈMES.

Résoudre les équations suivantes :

106. $$\frac{3x^2 - x}{4 - x} - 1 = 0$$

107. $$mx^2 - \frac{a}{b} = nx^2.$$

108. $$x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18.$$

109. $$x(3x - 2) = 65.$$

110. $$\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{x + 13}{3x}.$$

111. On demande un nombre dont la moitié plus 7, multipliée par la moitié moins 7, donne 32 pour produit.

112. La formule qui exprime la surface d'un cercle est πR^2 ; on demande de retrouver le rayon d'un cercle dont la surface est de 38 mètres carrés 14 décimètres carrés.

113. On sait qu'un corps, abandonné à l'action de la pesanteur parcourt des espaces proportionnels aux carrés des temps. D'après cela, quel temps mettrait une pierre pour tomber du sommet de la flèche de Strasbourg, situé à 142 mètres au-dessus du sol, sachant que, pendant la première seconde de sa chute, le corps parcourt $4^m,9$?

114. D'après le principe du problème précédent, on demande la profondeur d'u[illegible], alors qu'on sait qu'une pierre met 6 secondes et demie pour arriver au fond.

Des équations bi-carrées.

197. **Equations bi-carrées.** Bien que nous n'ayons pas à nous occuper des équations d'un degré supérieur au second, nous ne pouvons passer sous silence les équations du quatrième degré, appelées *bi-carrées*, c'est-à-dire celles qui sont de la forme $x^4 = a$, ou bien $x^4 + px^2 = q$, parce que leur résolution dépend de celle des équations du second degré.

1° Soit, en effet, à résoudre l'équation à deux termes $x^4 = a$; on fera d'abord $x^2 = z$, et l'équation deviendra $z^2 = a$, laquelle donne (n° 183)

$$z = \pm \sqrt{a};$$

et comme on a déjà $x = \pm \sqrt{z}$,

on aura enfin $x = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a}}$;

c'est-à-dire que la valeur de x s'obtiendra par deux extractions successives de racines carrées.

2° Si l'on avait l'équation à trois termes

$$x^4 + px^2 = q.$$

on ferait encore $x^2 = z$, et l'équation proposée deviendrait $z^2 + pz = q$; mais cette dernière donne (n° 191)

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

et comme, d'après l'équation accessoire $x^2 = z$, on a

$$x = \pm \sqrt{z},$$

on posera enfin, pour les valeurs de x,

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p_2}{4}}},$$

ce qui donnera en général quatre racines pour l'équation proposée.

Traitons un exemple.

198. Proposons-nous l'équation

$$\frac{x^4}{2} - x^2 = \frac{3x^2}{2} - \frac{9 - x^4}{4}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, l'équation devient

$$2x^4 - 4x^2 = 6x^2 - 9 + x^4,$$

et cette dernière donne successivement

$$x^4 - 10x^2 = -9.$$

$$x^2 = 5 \pm \sqrt{25 - 9},$$

$$x = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{16}};$$

d'où l'on tire les quatre racines

$$x' = 3, \quad x'' = -3, \quad x''' = 1, \quad x'''' = -1,$$

lesquelles sont réelles, égales deux à deux et de signes contraires.

Des questions de maximum et de minimum qui peuvent se résoudre par les équations du second degré.

199. **Questions de maximum et de minimum.** Les problèmes à solutions multiples offrent de l'intérêt par les conditions que doivent remplir ces solutions et par la recherche des limites entre lesquelles elles se trouvent ordinairement renfermées. Nous en avons vu des exemples dans l'analyse indéterminée (CHAP. V).

Mais, dans les problèmes indéterminés du 1er degré, ces limites ne dépendent que de l'énoncé seul, tandis que, dans les problèmes du 2e degré, elles sont subordonnées aux radicaux qu'amène la résolution des équations.

La discussion des quantités radicales est d'une grande importance dans les questions de maximum et de minimum dont nous allons nous occuper ici.

200. **Définition.** Une expression algébrique contenant des quantités constantes et d'autres variables peut, en général, prendre des valeurs diverses par les attributions successives de ces variables ; mais les accroissements et les décroissements de ces valeurs trouvent des limites en ce que ces expressions deviennent absurdes, impossibles ou contradictoires, au delà ou en deçà de ces limites. Or, on nomme *maximum* la plus grande valeur que puisse atteindre une expression algébrique dépendant d'une variable, et *minimum* la plus petite de ces valeurs.

La détermination des *maxima* et des *minima* joue un grand rôle dans la haute analyse ; mais nous n'avons à traiter que les équations du 2e degré à une seule variable, et voici la marche à suivre.

201. **Règle**. *Etant donnée une expression algébrique du 2e degré dans laquelle* x *est variable, on représente par une lettre étrangère* (m par exemple) *la valeur maximum ou minimum que l'expression proposée est susceptible de prendre ; on forme une équation en égalant cette expression* à m ; *on résout l'équation par rapport à* x, *et la discussion des racines fait connaître les conditions auxquelles doit satisfaire* m *pour que l'expression soit un maximum ou un minimum, s'il y a lieu.*

Appliquons cette règle à la solution de quelques problèmes.

202.—**Problème I.** *Quel est le plus grand rectangle que l'on puisse former avec une ligne donnée $4a$?*

Puisque la droite $4a$ exprime le périmètre constant de tous les rectangles que l'on peut construire avec cette droite, $2a$ sera le demi-périmètre ou bien la somme de la base et de la hauteur de chaque rectangle : donc, si l'on représente par x la base, on aura $2a - x$ pour la hauteur, et $x(2a-x)$ sera l'expression de la surface.
Enfin, si l'on représente par m la surface maximum cherchée, on aura l'équation

$$x(2a - x) = m,$$

laquelle donne $x = \pm\sqrt{a^2 - m}$.

Cela posé, afin que la valeur placée sous le radical ne soit pas négative et que les valeurs de x ne soient pas imaginaires, il faut que m ne surpasse pas a^2, mais il peut lui être égal : donc $m = a^2$ est le maximum cherché. Dans ce cas, le radical disparaît et la valeur correspondante de x est $x = a$.

Donc, *le plus grand rectangle que l'on puisse former avec une droite donnée est le carré qui a pour côté le quart de cette ligne.*

203. Problème II. *Partager un nombre ou une longueur donnée* 2a *en deux parties telles que la somme des carrés de ces parties soit un maximum ou un minimum.*

Appelons x l'une des parties demandées, l'autre sera $(2a - x)$, nous aurons $x^2 + (2a - x)^2$ pour la somme de leurs carrés.

Maintenant, représentons par m la plus grande ou la plus petite valeur que peut acquérir ce polynôme, sous les variations arbitraires de l'inconnue x, et posons l'équation

$$x^2 + (2a - x)^2 = m.$$

Cette équation devient $x^2 - 2ax = \dfrac{m - 4a^2}{2}$ et donne les deux solutions

$$x = a \pm \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}}$$

Ces deux valeurs expriment les parties demandées

$$a + \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}} \text{ et } a - \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}},$$ car x représente indifféremment l'une ou l'autre.

Le binôme placé sous le radical doit rester positif pour que ce radical et les racines ne soient pas imaginaires ; il faut donc qu'on ait $m > 2a^2$ ou tout au plus $m = 2a^2$. Ainsi $2a^2$ est la valeur *minimum* du polynôme donné par l'énoncé du problème, et ce minimum correspond à $x = a$ pour chacune des parties demandées ; en d'autres termes, la plus petite somme que puissent faire les carrés construits sur les deux segments d'une droite donnée est obtenue lorsque ces segments sont égaux entre eux et égaux à la moitié de cette ligne.

Ce résultat n'est pas le seul. Algébriquement, les deux racines trouvées admettraient une infinité de solutions pour toutes les valeurs de m supérieures à $2a^2$, mais le signe — qui précède le radical dans la seconde racine entraînerait des valeurs négatives qui ne peuvent convenir à la nature du problème proposé ;

il suit de là que $\sqrt{\dfrac{m-2a^2}{2}}$ doit rester au-dessous de a ou tout au plus lui être égal ; mais cette égalité $\sqrt{\dfrac{m-2a^2}{2}}=a$ annule une des racines et donne pour *maximum* $m=4a^2$. Ce maximum a donc lieu lorsque la droite donnée cesse d'être partagée et devient tout entière le côté d'un seul carré.

204. Problème III. *Déterminer le maximum ou le minimum de la fraction* $\dfrac{18}{x(3-x)}$.

Conformément à la règle générale ci-dessus énoncée, posons

$$\frac{18}{x(3-x)}=m,$$

nous en déduirons $x^2-3x=-\dfrac{18}{m}$

et

$$x=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9m-72}{4m}}.$$

Ce radical sera réel pour toutes les valeurs de m supérieures à $9m = 72$ ou pour $m = 8$, mais imaginaire pour $m < 8$; ainsi la valeur minimum de la fraction proposée est égale à 8 unités. Quant au maximum, c'est l'infini. Le minimum $m = 8$ donne pour la variable x la valeur $x = \frac{3}{2}$; en effet, la substitution de cette valeur de x réduit l'expression proposée à 8 entiers.

QUESTIONNAIRE.

Qu'appelle-t-on équations bi-carrées ? (197)
Donnez un exemple. (198)
Que nomme-t-on "maximum," et que nomme-t-on "minimum" ? (200)
Quelle est la marche à suivre dans la détermination des "maxima" et des "minima" ? (201)
Donnez des exemples. (202....)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

115. Décomposer un nombre donné a en deux facteurs dont la somme soit un minimum.

116. Partager un nombre donné $2a$ en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit un minimum.

117. Partager un nombre donné a en deux parties dont le produit soit le plus grand possible.

118. Inscrire dans un cercle le rectangle maximum.

CHAPITRE VIII.

RAPPORTS, PROPORTIONS ET PROGRESSIONS.

Des rapports.

205. **Définition**. En général, on appelle *rapport* le résultat de la comparaison de deux quantités ; mais deux quantités mathématiques, a et b, ne peuvent être comparées que de deux manières :

1° pour savoir de combien l'une surpasse l'autre ;

2° combien de fois l'une contient l'autre.

Dans le premier cas, on obtient le rapport au moyen d'une soustraction, et on le nomme pour cela *rapport par différence* ou rapport arithmétique.

Dans le second cas, le rapport est le quotient d'une division, et on l'appelle *rapport par quotient* ou rapport géométrique.

Ainsi, $a - b$ exprime le rapport arithmétique des quantités a et b ; tandis que $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ désigne leur rapport géométrique.

Dans les deux cas, les quantités que l'on compare, a et b, se nomment les *termes* du rapport.

Les deux termes d'un rapport doivent représenter des quantités de la même espèce ou être pris dans un sens abstrait, sans quoi le rapport n'aurait pas de signification.

Des proportions.

206. **Proportion**. On donne le nom de *proportion* à l'*expression de deux rapports égaux*. La proportion est *arithmétique* ou *géométrique*, selon que les rapports que l'on compare sont par différence ou par quotient. La proportion arithmétique s'appelle aussi *équi-différence*, tandis que le mot *proportion* tout seul désigne une proportion géométrique.

On indique la proportion arithmétique comme il suit :

$$a \,.\, b : c \,.\, d,$$

ou bien $$a - b = c - d.$$

La proportion géométrique s'écrit ainsi :

$$a : b :: c : d,$$

ou mieux encore $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Dans le premier cas, on prononce a est à b comme c est à d, et dans le second, a divisé par b égale c divisé par d, ou plus brièvement, a sur b égale c sur d. (N° 9.)

Dans toute proportion, le premier terme a et le dernier d se nomment les *extrêmes*, tandis que les intermédiaires b et c s'appellent les *moyens*.

Une proportion dans laquelle les deux termes moyens sont égaux, se nomme *proportion continue* ; ainsi

$$a \,.\, m : m \,.\, d \text{ et } p : n :: n : q$$

sont des proportions continues. Dans ce cas, la quantité m est une *moyenne proportionnelle arith-*

métique entre a et d, tandis que n est *moyenne proportionnelle géométrique* entre les extrêmes p et q.

Propriétés des équi-différences.

207. **Principe fondamental**. Dans toute proportion arithmétique, *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.* Ce principe découle de la définition ; en effet, poser $a \,.\, b : c \,.\, d$ c'est exprimer que $a - b = c - d$, ou bien, en transposant, que $a + d = b + c$.

Ce théorème donne le moyen de retrouver un des quatre termes d'une équi-différence dont les trois autres sont donnés : soit, par exemple, $a.\ b : c.\ x$; puisqu'on doit avoir $a + x = b + c$, on aura $x = b + c - a$.

Si la proportion était continue : $a \,.\, x : x \,.\, b$, on aurait $2x = a + b$, ou bien $x = \frac{a+b}{2}$, ce qui prouve que la *moyenne arithmétique entre deux quantités est la moitié de leur somme.*

Propriétés des Proportions.

208. **Propriété fondamentale**. Dans toute proportion géométrique, *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soient les quatre quantités proportionnelles a, b, c, d qui donnent les rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si l'on chasse les dénominateurs, on a $ad = bc$, ce qui démontre le principe énoncé.

Réciproquement. Quand le produit de deux facteurs est égal au produit de deux autres, ces quatre facteurs forment une proportion.

En effet, soit l'égalité $m \times n = p \times q$; si l'on divise les deux membres par le produit $n \times p$, on aura

$$\frac{m \times n}{n \times p} = \frac{p \times q}{n \times p}, \text{ et par conséquent } \frac{m}{p} = \frac{q}{n}.$$

On voit donc que quatre quantités forment une proportion dans deux circonstances distinctes, selon que, prises deux à deux, elles donnent des quotients ou des produits égaux ; or, pour fixer les idées, on dit que deux quantités a et b sont *directement proportionnelles* à deux autres c et d, quand on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; et que deux quantités m et n sont *inversement* ou *réciproquement proportionnelles* à deux autres p et q, quand on a $mn = pq$.

209. **Quatrième proportionnelle.** La propriété fondamentale d'une proportion géométrique fournit le moyen de retrouver un quatrième terme dans une proportion dont les trois autres sont connus ; en effet, les deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ donnent $ax = bc$ et $x = \frac{bc}{a}$. Dans ce cas, x s'appelle une *quatrième proportionnelle* entre les trois quantités a, b, c.

Si la proportion donnée était continue telle que $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$, on aurait $x^2 = ac$ et $x = \sqrt{ac}$; alors x se nomme une *moyenne proportionnelle géométrique* entre les deux quantités a et c.

Une moyenne géométrique entre deux quantités est donc la racine carrée du produit de ces deux quantités.

210. La propriété fondamentale et sa réciproque servent à démontrer toutes les propriétés des proportions.

En effet, la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donne les suivantes :

$$\frac{ma}{mb} = \frac{mc}{md}, \quad \frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

ce qui prouve que dans toute proportion on peut, sans la détruire,

1° Multiplier les quatre termes par un même nombre ;

2° Multiplier les deux numérateurs par un même nombre ;

3° Augmenter chaque numérateur de son dénominateur.

Ce que nous disons pour la multiplication et l'addition est vrai aussi pour la division et la soustraction.

211. *Quand on multiplie deux proportions, terme à terme, les produits sont en proportion.*

En effet, les deux égalités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

donnent évidemment cette nouvelle égalité $\frac{am}{bn} = \frac{cp}{dq}$; il en serait de même si l'on divisait terme à terme, les deux proportions données.

De là, découlent ces deux autres principes :

212. *Dans toute proportion, on peut élever les quatre termes à une même puissance, ou bien en*

extraire une racine du même degré, sans détruire la proportion.

Ainsi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donne $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}.$$

213. *Dans une suite de rapports égaux, la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs ont entre elles un rapport égal aux rapports donnés.*

Supposons qu'on ait $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=$ etc......;

représentons ce rapport commun par q et posons

$$\frac{a}{b}=q, \frac{c}{d}=q, \frac{m}{n}=q......,$$

ce qui donne $a=bq$, $c=dq$, $m=nq$......; ajoutons ensuite, membre à membre, et mettons q en facteur commun pour avoir l'égalité

$$a+c+m=(b+d+n)\,q;$$

donc enfin

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\text{etc...}$$

Des progressions.

214. **Progression.** On donne le nom de *progression* à une suite indéfinie de termes tels que le rapport qui existe entre deux termes consécutifs est constamment le même dans toute la série.

Ce rapport constant s'appelle la *raison* de la progression, et celle-ci est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport est une différence ou un quotient : ainsi, quand on écrit

$$\div\ 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . \text{etc.......},$$

on forme une progression arithmétique dont la raison est 3 ;

tandis que si l'on écrivait

$$\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 . \text{etc........}$$

on aurait une progression géométrique dont 2 est la raison.

Les progressions sont dites *croissantes* ou *décroissantes*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Propriétés des progressions arithmétiques ou par différence.

215. Principe fondamental. *Dans toute progression arithmétique croissante, un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme, augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Soit en général la progression croissante

$$\div\ a . b . c . e . f . g ......$$

dont nous représenterons la raison par d. D'après la définition même, il est évident qu'on aura

$$b = a + d,$$
$$c = b + d = a + 2d,$$
$$e = c + d = a + 3d;$$
$$\text{etc.........................}$$

c'est à-dire que la progression pourra être écrite ainsi :

$$\div a \;.\; a + d \;.\; a + 2d \;.\; a + 3d \;.\; a + 4d \;..;$$

ce qui démontre le principe énoncé. En conséquence, si l'on désigne par l un terme quelconque et par n le rang qu'il occupe, ce terme en aura alors $n - 1$ avant lui, et sa valeur sera exprimée par la formule

$$[a] \qquad l = a + (n - 1)d.$$

Comme application, si l'on demandait le 15e terme de la progression par différence écrite ci-dessus (nº 214), dont le premier terme est 4 et la raison 3, on aurait

$$l = 4 + 14 \times 3 = 46.$$

D'après ce principe, on peut résoudre le problème suivant :

216. Problème Ier. *Insérer entre deux termes donnés un nombre quelconque de moyens arithmétiques ou différentiels*, c'est-à-dire, former une progression par différence dont le premier terme et le dernier sont connus.

Supposons qu'on veuille insérer m moyens différentiels entre a et l; alors le dernier terme l en aura $m + 1$ avant lui, et la formule [a] donnera

$$l = a + (m + 1)d;$$

et comme la seule inconnue ici est la raison d, on tirera sa valeur qui est

$$[b] \qquad d = \frac{l - a}{m + 1}.$$

Proposons-nous, par exemple, d'insérer sept moyens différentiels entre les deux nombres 6 et

30 ; la formule [b] donnera pour la raison inconnue

$$d = \frac{30 - 6}{8} = 3,$$

et la progression demandée sera

$$\div\ 6\ .\ 9\ .\ 12\ .\ 15\ .\ 18\ .\ 21\ .\ 24\ .\ 27\ .\ 30.$$

Remarque. Si l'on insérait un même nombre de moyens différentiels entre tous les termes consécutifs d'une progression donnée, on formerait ainsi une seule et même progression, parce que la formule [b] donnerait la même raison pour toutes les insertions.

217. Théorème. *Dans toute progression arithmétique, les termes à égale distance des extrêmes font une somme constante.*

Soit la progression arithmétique croissante

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ h\ .\ k\ .\ l.$$

On sait que la raison étant représentée par d, on a

$$b = a + d,\ c = a + 2d \text{ etc......}$$

Si l'on renverse les termes pour former la progression décroissante

$$\div\ l\ .\ k\ .\ h.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ c\ .\ b\ .\ a,$$

la raison n'aura pas changé, et l'on aura

$$k = l - d,\ h = l - 2d, \text{ etc......}$$

En conséquence, ces deux progressions, ajoutées terme à terme, donneront

$$a + l = b + k = c + h = \text{etc.......}$$

218. Problème II. *Trouver la somme des termes d'une progression par différence.*

Appelons S la somme des termes de la progression

$$\div a . b . c . \dots\dots\dots . h . k . l ;$$

nous aurons évidemment

$$S = a + b + c + \dots\dots + h + k + l,$$
$$S = l + k + h + \dots\dots + c + b + a ;$$

en ajoutant terme à terme et en désignant par n le nombre des termes, nous obtiendrons

$$2S = (a + l)n, \text{ d'où } S = \frac{(a + l)n}{2} \quad [c];$$

par conséquent, *la somme des termes d'une progression par différence quelconque est égale à la demi-somme des deux termes extrêmes, multipliée par le nombre des termes de cette progression.*

Proposons-nous quelques applications.

219. Problème III. *Trouver la somme des cent premiers nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100.*

Nous avons ici une progression arithmétique dont la raison est 1 ; ainsi la formule [c] deviendra

$$S = \frac{1 + 100}{2} \times 100 = 101 \times 50 = 5050$$

220. Problème IV. *Exprimer la somme des* n *premiers nombres impairs.*

Les nombres impairs font une progression par différence dont la raison est 2 ; on aura donc $a = 1$, $d = 2$, $l = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, et la formule [$c$] donnera $S = \dfrac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$;

ainsi *la somme des* n *premiers nombres impairs est égale au carré de* n.

Les formules [a] et [c] résolvent toutes les questions relatives aux progressions par différence.

Propriétés des progressions géométriques ou par quotient.

221. Principe fondamental. *Dans toute progression géométrique croissante, un terme d'un rang quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à la puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Soit progression par quotient

$$\div\!\!\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots : l.$$

D'après la définition, si l'on représente la raison par q, on pourra écrire ainsi cette progression

$$\div\!\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots$$

et si l'on désigne par n le rang du terme l, qui alors aura $n-1$ termes avant lui, on aura

$$l = aq^{n-1} \qquad [d].$$

Cette formule démontre le principe énoncé.

Proposons-nous, par exemple, de calculer le 7e terme de la progression

$$\div\!\!\div\, 4 : 8 : 16 : 32 \ldots\ldots$$

la formule [d] donnera $l = 4 \times 2^6 = 256$.

Ce principe nous servira à résoudre le problème suivant.

222. Problème Ier. *Insérer entre deux termes donnés un nombre quelconque de moyens géométriques ou proportionnels.*

Supposons qu'on veuille insérer m moyens géométriques entre a et l : alors le dernier terme l en aura $m+1$ avant lui, et la formule [d] deviendra

$$l = aq^{m+1};$$

et comme l'inconnue, ici, est la raison q, on aura

$$q^{m+1} = \frac{l}{a} \text{ et } q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}} \qquad [e]$$

c'est-à-dire qu'on obtiendra la raison cherchée *en divisant le dernier terme par le premier, et en extrayant du quotient la racine dont le degré est marqué par le nombre plus un des moyens à insérer.* Cette raison sera rarement entière ; mais dans le cas où elle est moindre que l'unité, la progression est décroissante.

Prenons un exemple dans la progression numérique précédente, et proposons-nous d'insérer 5 moyens géométriques entre les deux nombres 4 et 256 ; la règle et la formule [e] donneront pour la raison cherchée

$$q = \sqrt{\frac{256}{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2,$$

et nous aurons

$$\div\!\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.$$

Remarque. Si l'on insérait entre les termes consécutifs d'une progression donnée un même nombre de moyens géométriques on formerait une seule et même progression, parce que la raison serait la même partout.

223. Problème II. *Trouver la somme des termes d'une progression géométrique.*

Soit la progression par quotient

$$\div\ a : b : c : d \ldots\ldots$$

qu'on écrit aussi de cette manière

$$\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots aq^{n-1};$$

en nommant S la somme cherchée on aura

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Si l'on multiplie tous les termes de cette égalité par la raison q, on obtient

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{n-1} + aq^n;$$

et en retranchant la première de celle-ci, on aura

$$Sq - S = aq^n - a, \text{ ou } S(q-1) = a(q^n - 1);$$

d'où enfin [f] $S = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

Soit, par exemple, à calculer la somme des 10 premiers termes de la progression

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 \ldots\ldots$$

nous aurons $S = \dfrac{3(2^{10} - 1)}{1} = 3(1024 - 1) = 3069$

Les formules [d], [e] et [f] résolvent toutes les questions relatives aux progressions par quotient.

224. Quand la progression géométrique est décroissante, c'est-à-dire quand la raison q est une fraction, il y a lieu de modifier la formule [f] en changeant les signes des termes, parce que le dénominateur $q - 1$ devient négatif par la suppo-

sition de $q < 1$. Cette formule est donc, dans ce cas,

$$[g] \qquad S = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

ou bien $$S = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Sous cette forme on voit que la somme S se compose de deux parties : la première $\frac{a}{1-q}$, *constante ;* la seconde $\frac{aq^n}{1-q}$, susceptible de devenir d'autant plus petite que n sera plus grand ; car les puissances successives de $q < 1$ diminueront rapidement. On peut donc prendre un assez grand nombre de termes pour que $\frac{aq^n}{1-q}$ devienne moindre que toute quantité assignable, et que la valeur de S se rapproche autant qu'on le voudra de la constante $\frac{a}{1-q}$. En conséquence, *la* LIMITE *vers laquelle tend la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, prolongée indéfiniment, est égale au premier terme divisé par l'unité diminuée de la raison.*

Enfin, à l'infini on a rigoureusement $S = \frac{a}{1-q}$.

Ainsi, dans la progression indéfinie

$$\div\, 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{27} : \tfrac{1}{81} : \text{etc...}$$

on aura $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1\,\frac{1}{2}$.

QUESTIONNAIRE.

Qu'appelle-t-on rapport ? (205)
Qu'appelle-t-on proportion ? (205)
Comment indique-t-on la proportion arithmétique ? (206)
Comment indique-t-on la proportion géométrique ? (206)
A quoi est égale la somme des extrêmes dans toute proportion arithmétique ? (207)
A quoi est égal le produit des extrêmes dans toute proportion géométrique ? (208)
Expliquez-nous ce que l'on entend par " quatrième proportionnelle " et par moyenne proportionnelle géométrique. (209)
Qu'est-ce qui sert à démontrer toutes les propriétés des proportions ? (210)
Les produits sont-ils en proportion quand on multiplie deux proportions terme à terme ? (211)
Peut-on élever les quatre termes d'une proportion à une même puissance, ou en extraire une racine du même degré sans détruire la proportion ? (212)
A quoi est égal le rapport de la somme des numérateurs et des dénominateurs dans une suite de rapports égaux ? (213)
Qu'appelle-t-on progression ? (214)
Donnez le principe fondamental des progressions arithmétiques ? (215)
Donnez le principe fondamental des progressions géométriques ? (221)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LES PROGRESSIONS.

119. Quel est le 12e terme d'une progression arithmétique dont la raison est 4 et le premier terme 2 ?

120. Quel serait le 12e terme si la raison était $\frac{1}{2}$?

121. On demande d'insérer 5 moyens différentiels entre 2 et 20.

122. Etant donnée la progression

$$\div 3 \,.\, 10 \,.\, 17 \,.\, 24 \ldots\ldots\ldots,$$

on se propose d'insérer quatre moyens différentiels entre chaque terme : quelle sera la nouvelle progression ?

123. Quel est le 18^e nombre pair dans la série des nombres entiers ?

124. Insérer 2 moyens géométriques entre 3 et 375.

125. Faire la somme des termes de la progression

$$\div\ 2 \ .\ 5 \ .\ 8 \ \ldots\ldots\ 29.$$

126. On demande la somme des termes de la progression

$$\div\!\!\div\ 2 : 4 : 8 \ \ldots\ldots : 256.$$

127. On propose d'insérer 8 moyens géométriques entre les nombres 3 et 4.

128. On donne à un mineur, pour creuser un puits de 15 mètres de profondeur, 2 fr. 75 c. pour le premier mètre, et une augmentation de 0 fr. 60 c. pour chaque mètre suivant. Combien coûtera 1° le 15^e mètre, 2° le travail entier ?

129. On a vendu un cheval, à condition qu'on le payerait 1 centime pour le premier clou de ses fers, 2 centimes pour le second clou, 4 centimes pour le troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'au trente-deuxième clou ; quel est le prix du cheval ?

130. Combien faut-il prendre de nombres entiers dans la suite des nombres naturels

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots$$

pour que la somme soit 55 ?

131. Discuter la valeur négative -11 trouvée dans le problème précédent.

132. Insérer 8 moyens proportionnels géométriques entre chacun des termes de la progression $1 : 2 : 4 : 8 \ldots\ldots$

CHAPITRE IX.

DES LOGARITHMES.

225. Vers le commencement du XVII^{e} siècle, un savant écossais, NÉPER, en cherchant le moyen d'abréger les calculs numériques, souvent très-laborieux, fut conduit à la découverte des *logarithmes*. Nous allons exposer ici leur théorie.

226. Quand on écrit une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme est l'unité, et qu'au-dessous on place une progression arithmétique commençant par zéro, on forme ce qu'on nomme une *table de logarithmes*. Telle est la suivante :

$$[a]\left\{\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187\ldots\ldots \\ \div\ 0 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, 14\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour montrer ce que ce rapprochement peut offrir de remarquable, faisons observer que la condition, pour la progression géométrique, de commencer par l'unité, donne pour ses termes successifs la 1re, la 2^{e}, la 3^{e} puissance, etc....., c'est-à-dire les puissances naturelles de la raison 3, tandis que la progression arithmétique, qui commence par zéro est formée des multiples naturels de la raison 2.

227. Cette double propriété se manifeste encore mieux en écrivant les deux progressions sous une forme générale, ce qui d'ailleurs est préférable, puisque, dans la définition des logarithmes, on ne tient nullement compte des valeurs particulières des raisons employées. Ainsi nous prendrons la table ci-après :

$$[b] \begin{cases} \div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 : q^8 : q^9 .. \\ \div 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \,.\, 5d \,.\, 6d \,.\, 7d \,.\, 8d \,.\, 9d .. \end{cases}$$

Par là, on voit que dans tous les termes de même rang, la raison q de la progression par quotient a pour exposant le nombre qui sert de coefficient à la raison d dans la progression par différence ; ainsi le 4e terme q^3 correspond au 4e $3d$, le 7e q^6 au 7e $6d$, et en général le $(n+1)^{me}$ terme q^n sera au même rang que nd.

228. C'est là l'idée qui frappa Néper, en lui révélant l'usage et l'utilité d'une pareille table. En effet, si l'on multiplie entre eux deux termes quelconques de la progression par quotient, leur produit sera un terme subséquent de la même progression, puisque celle-ci contient toutes les puissances de la raison ; mais si, d'un autre côté, on ajoute les deux termes correspondants de la progression par différence, leur somme formera dans cette progression un autre terme, situé au même rang que le produit ci-dessus dans la première ; ainsi l'un de ces résultats fera connaître l'autre. On voit, par exemple, qu'il y a correspondance entre

$q^3 \times q^5 = q^8$, 9me terme de la 1re progression
et $3d + 5d = 8d$, 9me terme de la 2e progression.

De même, dans la table $[a]$, si l'on multiplie le 3e terme par le 5e de la 1re progression, et qu'on ajoute les termes correspondants de la seconde, on aura des résultats placés au même rang, comme on le voit ci-après :

$$9 \times 81 = 729$$
$$4 + 8 = 12$$

Ainsi, pour connaître le produit 9×81, il suffirait d'effectuer l'addition $4 + 8$ des termes correspondants, et de chercher au-dessus de leur somme 12 le produit 729 demandé.

De même, le quotient du 8e terme 2187 par le 5e 81 se trouve sans division, en retranchant du 8e terme 14 le 5e 8, et en prenant au-dessus du reste 6 le terme correspondant 27.

229. Voilà le principe fondamental qui sert de base à la théorie de Néper. Il appela les termes de la progression par différence les *logarithmes* des termes correspondants de la progression par quotient ; ainsi 4 est le logarithme de 9 ; de même, 12 est le logarithme de 729, et l'on écrit :

$$\log. 9 = 4, \ \log. 729 = 12, \ \log. q^n = nd.$$

C'estpourquoi l'on dit : *les logarithmes des nombres sont les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro, qui correspondent à ces nombres, considérés comme faisant partie d'une progression géométrique dont le premier terme est l'unité.*

230. Il existe une infinité de tables de logarithmes formant tout autant de systèmes différents ; mais dans tous l'unité a toujours pour logarithme zéro.

On appelle *base* du système le nombre qui a pour logarithme l'unité.

231. La première réflexion qui se présente, c'est que les lacunes qui existent entre les termes consécutifs d'une progression géométrique semblent faire craindre que tous les nombres n'aient pas

leurs logarithmes ; mais nous allons voir comment on y a suppléé.

D'abord, quelles que soient les progressions qu'on ait choisies, on pourra toujours, par les procédés des nos 216 et 222, insérer un certain nombre de moyens géométriques entre les termes consécutifs de la progression par quotient, et un pareil nombre de moyens différentiels entre ceux de la progression par différence ; on conçoit de plus que cette double insertion peut être poussée assez loin pour comprendre toutes les nuances de grandeur, depuis 1 jusqu'à l'infini.

Quant aux nombres plus petits que l'unité, pour avoir leurs logarithmes, il faudra prolonger en arrière les deux progressions en écrivant :

$$\div\!\div \ldots\ldots \frac{1}{27} : \frac{1}{9} : \frac{1}{3} : 1 : 3 : 9 : 27 : 81 \ldots\ldots\ldots$$

$$\div \ldots\ldots -6 . -4 . -2 . 0 . 2 . 4 . 6 . 8 \ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on voit que les fractions proprement dites ont des logarithmes négatifs.

Propriétés des logarithmes.

232. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Cette propriété n'est que la traduction du principe fondamental (no 228). Nous avons, en effet,

$$q^3 \times q^5 \times q^7 = q^{15},$$
$$3d + 5d + 7d = 15d\ldots\ldots$$

Mais $3d$ est le logarithme de q^3, $5d$ est le logarithme de q^5, $7d$ est le logarithme de q^7, de même que $15d$ est le logarithme de q^{15} ; donc

$$\log.(q^3 \times q^5 \times q^7) = \log.q^3 + \log.q^5 + \log.q^7\,;$$
et en général $\log.(q^n \times q^m) = \log.q^n + \log.q^m$;
car on a $\qquad q^n \times q^m = q^{m+n},$
et $\qquad nd + md = (m+n)d.$

Au reste, on comprend de suite que le produit $q^n \times q^m$ donne le terme q^{m+n} de la progression géométrique qui a $m+n$ termes avant lui, et que la somme des logarithmes $nd + md$ ou $(m+n)d$ donne également le terme de la progression arithmétique qui en a aussi $m+n$ avant lui : donc, ces deux résultats se trouvent au même rang, et par conséquent *la somme des logarithmes des facteurs donne le logarithme du produit.*

233. 2° *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

Je dis, en effet, qu'on a $\log.\frac{a}{b} = \log.a - \log.b$.

Représentons le quotient $\frac{a}{b}$ par x ou bien posons $x = \frac{a}{b}$: alors on aura $bx = a$; mais, en vertu du n° précédent, cette égalité donne

$$\log.b + \log.x = \log.a,$$
$$\log.x = \log.a - \log.b.$$

234. 3° *Le logarithme d'une puissance est égal au logarithme de la racine multiplié par l'exposant de cette puissance.*

Soit a^5 ; je dis qu'on aura $\log.a^5 = 5\log.a$; en effet, $a^5 = aaaaa$; donc (n° 232),
$\log.a^5 = \log.a + \log.a + \log.a + \log.a + \log.a,$
$= 5\log.a$; et en général $\log.a^m = m\log.a.$

235. 4° *Le logarithme d'une racine est égal au logarithme de la puissance divisé par l'indice de cette racine.*

Je dis que $\log. \sqrt[5]{a} = \frac{\log. a}{5}$; en effet, représentons cette racine par x et posons $x = \sqrt[5]{a}$, d'où $a = x^5$; d'après le cas précédent, on a $\log. a = 5 \log. x$; et de là on tire $\log. x = \frac{\log. a}{5}$.

donc, en général, $\log. \sqrt[n]{a} = \frac{\log. a}{n}$

Des logarithmes vulgaires.

236. Les principes que nous venons de développer s'appliquent à tous les systèmes de logarithmes; mais il est temps de s'occuper des logarithmes qu'on a adoptés dans l'usage ordinaire des calculs et qu'on nomme *logarithmes vulgaires* ou logarithmes de Briggs, du nom de l'auteur qui en a publié les premières tables. On a dû prendre le système le plus avantageux, c'est-à-dire celui qui concorde le mieux avec notre système de numération décimale. Voici en quoi il consiste.

237. On a pris d'abord pour raison de la progression géométrique la base 10 de notre numération, et pour raison de la progression arithmétique l'unité; en partant ainsi des premiers termes 1 et 0, on écrit deux séries indéfinies dans les deux sens, comme on voit ci-après :

.... : 0,001 : 0,01 : 0,1 : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : ...
.... − 3 . − 2 . − 1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 ......

Ceci établit 1° que les puissances successives de 10, c'est-à-dire les nombres 10, 100, 1000, etc..., ont pour logarithmes respectifs les nombres entiers naturels 1, 2, 3, etc...; autrement dit, qu'un nombre composé de l'unité suivie d'un zéro, de deux zéros, de trois zéros, etc., de n zéros, a pour logarithme 1, 2, 3.... n.

2° Que les fractions décimales $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., ont pour logarithmes les mêmes nombres naturels pris *négativement*, c'est-à-dire -1, -2, -3, etc.

238. Dans cette table, le nombre 10, ayant pour logarithme l'unité, sera la base du système de logarithmes comme il est la base du système de numération.

239. Au reste, ce n'est encore là que le cadre d'une table de logarithmes, et, pour la compléter, il faut recourir aux insertions de moyens proportionnels entre les termes successifs des deux progressions ci-dessus, par les procédés indiqués nos 216, 222. Voici comment on procède :

On insère d'abord un certain nombre de moyens géométriques entre les deux premiers termes 1 et 10, un pareil nombre entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc..., ce qui donnera une nouvelle progression géométrique. Ensuite on recommence les insertions entre les termes successifs de cette dernière, et l'on renouvelle cette série d'opérations un grand nombre de fois, jusqu'à ce qu'enfin la raison q, qui est toujours plus grande que l'unité, n'excède plus l'unité que d'une quantité infiniment petite. Alors les termes de la dernière progression géométrique obtenue ne croîtront que par degrés insensibles, et la différence entre deux termes consécutifs quelconques pourra devenir moindre que toute quantité assignable. Il est donc certain qu'au nombre des termes de cette progression limite on rencontrera les nombres entiers 2, 3, 4, etc..., ou bien des nombres qui en différeront infiniment peu et qu'on pourra confondre avec eux.

En conséquence, dans notre progression les nombres 2, 3, 4, 5 . . . . 9 seront compris entre le premier terme 1 et le terme 10; les nombres 11, 12, 13... 99 se trouveront entre 10 et 100, et ainsi de suite pour tous les nombres entiers.

D'un autre côté, si dans la progression arithmétique on insère également entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc., un nombre de moyens différentiels égal au nombre des moyens géométriques qu'on aura insérés entre 1 et 10, entre 10 et 100, etc., les termes de cette seconde série arithmétique seront toujours les logarithmes respectifs des termes du même rang dans la progression géométrique ; en conséquence, tous les nombres naturels 2, 3, 4, etc., qui font partie de la progression géométrique, auront leurs logarithmes dans la progression arithmétique.

Cela posé, si l'on ne tient compte, dans la progression par quotient que des nombres entiers dans la progression par différence que des termes correspondants, on aura la table de logarithmes vulgaires dont on se sert dans la pratique.

240. D'après cette exposition, il est évident que tout nombre entier ou fractionnaire, compris entre 1 et 10, a pour logarithme une fraction comprise entre 0 et 1 ; que les nombres compris entre 10 et 100 ont des logarithmes entre 1 et 2; qu'entre 100 et 1000, les nombres ont des logarithmes entre 2 et 3, et ainsi de suite.

D'un autre côté, les nombres plus petits que l'unité ont des logarithmes négatifs : ainsi les fractions comprises entre 1 et $\frac{1}{10}$ ont des logarithmes compris entre 0 et -1 ; les fractions comprises entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$ ont des logarithmes entre -1 et -2, et ainsi de suite.

241. Il résulte de là que les nombres réciproques 10 et $\frac{1}{10}$, 100 et $\frac{1}{100}$, etc...., ont des logarithmes égaux et de signes contraires, et qu'il en est ainsi pour tous les nombres réciproques; ainsi le logarithme de $\frac{3}{5}$ est égal et de signe contraire à celui de $\frac{5}{3}$; et en général, $\log. \frac{m}{n} = -\log. \frac{n}{m}$.

Ceci d'ailleurs est conforme au principe du n° 232 ; car, deux nombres réciproques ayant pour produit l'unité, il faut que la somme de leurs logarithmes soit zéro, ce qui exige que ces logarithmes soient égaux et de signes contraires.

242. **Caractéristique.** On donne le nom de *caractéristique* à la partie entière d'un logarithme ; ainsi les nombres compris entre 1 et 10 auront zéro pour caractéristique de leurs logarithmes ; de 10 à 100 les nombres ont des logarithmes dont la caractéristique est l'unité ; de 100 à 1000 les nombres ont 2 pour caractéristique de leurs logarithmes, etc. ; et, en général, les nombres compris entre 10^n et 10^{n+1} ont des logarithmes dont la caractéristique est n, c'est-à-dire que la *caractéristique d'un logarithme quelconque, augmentée d'une unité, donne le rang des plus hautes unités du nombre correspondant, et réciproquement.*

Ainsi le nombre 87542 aura un logarithme dont la caractéristique est 4 ; et le logarithme

3,558948 correspondra à un nombre de quatre chiffres aux entiers, c'est-à-dire contenant des unités de mille.

243. **Partie décimale.** La partie fractionnaire des logarithmes calculés d'après la méthode indiquée nº 239 ne sera pas décimale ; mais, en admettant qu'elle ait été transformée en décimale, comme on le pratique en effet dans les tables en usage, nous ferons observer que cette partie décimale ne peut être obtenue que par approximation.

Cela posé, démontrons le théorème fondamental ci-après.

THÉORÈME.

244. *Lorsque deux nombres entiers ou décimaux sont exprimés par les mêmes chiffres significatifs, et qu'ils ne diffèrent que par la nature de leurs plus hautes unités, leurs logarithmes ont même partie décimale et ne diffèrent entre eux que par la caractéristique.*

Ce théorème découle de la première propriété (nº 232), où nous avons démontré que log. $ab = \log. a + \log. b$. En effet, si l'on prend les nombres décuples a $10a$, $100a$, etc., on aura

$$\log.\ 10a = \log.\ a + \log.\ 10,$$
$$\log.\ 100a = \log.\ a + \log.\ 100,$$
etc.................................

Mais les logarithmes de 10, 100, 1000, etc., étant 1, 2, 3, etc......, quel que soit le logarithme de a, il suffira d'ajouter 1, ou 2, ou 3 unités entières à sa caractéristique pour avoir les logarithmes de $10a$, $100a$, $1000a$, etc......, donc tous ces derniers auront leur partie décimale commune ; aussi l'on trouve dans les tables

$$\log.\ 32 = 1{,}505150$$
$$\log.\ 320 = 2{,}505150$$
$$\log.\ 3200 = 3{,}505150$$
etc......................

On aura de même, d'après le principe n° 233,

$$\log.\ \frac{a}{10} = \log.\ a - \log.\ 10,$$

$$\log.\ \frac{a}{100} = \log.\ a - \log.\ 100,$$
etc...................................

donc ces logarithmes auront encore la même partie décimale.

DISPOSITION DES TABLES.

245. **Des tables.** Les tables que nous publions s'étendent depuis 1 jusqu'à 10000. La première colonne, au haut de laquelle on voit *PP*, contient les parties proportionnelles. La seconde intitulée *N* contient la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 999.

Remarquons ici qu'on a jugé superflu, quand les deux premiers chiffres d'un nombre se répètent, d'écrire ce nombre tout au long ; ainsi au lieu de

101, 102, 103..... etc.....

ou de

131, 132, 133..... etc.,

on s'est contenté de mettre

100
1 = 101
2 = 102
3..... = 103..... etc.,

ou encore

130.....
1 = 131
2..... = 132.....

246. La colonne N est suivie de la colonne marquée O, placée immédiatement à droite. On trouve dans cette colonne les logarithmes des nombres inscrits dans la colonne marquée N.

N.-B. — On n'a pas mis de caractéristique aux logarithmes parce qu'on la connaît aisément à la seule inspection du nombre.

247. Dans cette colonne, marquée O, ainsi que dans les neuf colonnes suivantes, intitulées, 1, 2, 3, 4, ... 9, on remarquera certains nombres de quatre chiffres chacun. Il faut sous-entendre en montant à gauche de ces quatre chiffres, les deux chiffres isolés les plus prochains. C'est ainsi que

2034 équivaut à 332034
4051 " à 334051
.... etc ....

248. Nous venons de voir comment l'on trouve les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 999, comment trouver les nombres de quatre chiffres ? A l'aide des colonnes marquées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

1° Cherchons, par exemple, le nombre 1000 ; je trouve dans la colonne marquée *N* le nombre 100, qui contient les trois premiers chiffres de 1000, puis je regarde au haut de la colonne suivante, et j'aperçois 0, qui est le dernier chiffre de 1000. C'est dans cette colonne que se trouvera la partie décimale du logarithme de 1000.

2° Pour second exemple, soit à trouver le nombre 1028, je prends encore les trois premiers chiffres 102 dans la colonne marquée *N*, puis je regarde au haut de la page, et, sans faire attention aux colonnes **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,** je trouve le dernier chiffre, **8,** au haut de la 8me colonne. C'est dans cette colonne que se trouve la partie décimale du logarithme de 1028.

249. La dernière colonne intitulée *D*, contient les différences qui existent entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, compris entre 1000 et 10000. Si l'on compare entre eux, par exemple, les logarithmes de 1000, 1001, 1002...1009....., on observera que le second de ces logarithmes égale le premier *plus* 434 (c. a. d, 434 millionièmes), que le troisième égale le second *plus* 434 ......que le dizième égale le neuvième *plus* 430 : en un mot ces logarithmes forment une progression arithmétique ayant pour raison *moyenne* 432 (0,000432). Or, ce sont ces augmentations ou différences successives que contient la colonne *D*. Ces différences *tabulaires* sont d'autant plus faibles que les nombres comparés sont plus grands.

250. Une liaison étroite existe entre la colonne *D* que nous venons de considérer, et la colonne marquée *P.P.* Cette dernière colonne contient, vis-à-vis des chiffres 1, 2, 3,......9, de la colonne marquée *N*, les produits que l'on obtiendrait en multipliant par 0.1, 0.2, 0.3, ... 0.9, la différence tabulaire qui se trouve vis-à-vis le logarithme du nombre considéré, ou plutôt une diffé-

rence tabulaire moyenne entre les différences tabulaires qui précèdent, et celles qui suivent le nombre considéré. Par exemple, la différence tabulaire qui correspond au nombre 2.845 est 153 : or, 153 multiplié par 0.1, 0.2, 0.3,......jusqu'à 0,9 devient successivement. 15, 31, 46, 61, 77, 92, 107, 122, 138, nombres qu'on trouve dans la colonne *PP*.

On est arrivé à ces produits en s'appuyant sur ce principe, qui n'est vrai qu'approximativement, *que les différences entre les nombres sont proportionnelles aux différences entre les logarithmes correspondants.* En effet cette proportionalité une fois admise, on peut raisonner ainsi : l'unité, différence entre 2845 et 2846, par exemple, est à 0,1, différence entre 2845 et 2845,1, comme 153, différence entre le log. de 2845 et celui de 2846, est à x, qui sera la différence entre le log. de 2845 et celui de 2845,1 ; donc $\frac{1}{0.1} = \frac{153}{x}$. En faisant successivement le conséquent du premier rapport égal à (0.2) à (0.3)... (0.9), x donnera les nombres qu'il faut ajouter au log. de 2845 pour en faire successivement le log. de 2845,1, 2845,2, 2845,3...... 2845,9. Or, ces valeurs successives de x, 15, 31, 46, 71........, sont précisément les nombres que contient la colonne *PP*.

251. Si l'on veut savoir de combien le log. de 2845 s'accroît, lorsque 2845 devient 2845,01, 2845,02, 2845.03..... 2845,09, on n'a qu'à multiplier les parties proportionnelles par 0.1, ce qui revient à multiplier la diff. tab. par 0.01, ou encore, ce qui revient à résoudre les équations suivantes :

$$\frac{1}{0.01} = \frac{153}{x},$$

$$\frac{1}{0.02} = \frac{153}{x} \text{ ...... etc.}$$

De même multiplier les parties proportionnelles par 0.01, 002,... 0.09, serait la même chose que multiplier la diff. tab. par 0.001, 0.002..... 0.009.

USAGE DES TABLES

PROBLÈME 1er.

252. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme à l'aide des tables.* Ce problème offre plusieurs cas qui nous allons examiner successivement.

1°. Si le nombre proposé est entier et moindre que 100, point de difficulté ni de calul : On le trouve dans la première page, parmi les nombres naturels qui sont dans les colonnes marquées *N.* Le nombre que l'on trouvera à sa droite et sur la même ligne, sera son logarithme.

253. 2° Le nombre proposé est entier et formé de trois chiffres seulement.

On trouve ce nombre dans la colonne intitulée *N*, et l'ayant trouvé, on consultera la colonne suivante, marquée *O*. Si l'on y voit six chiffres de front à droite du nombre cherché et sur la même ligne que lui, on a tout d'un coup la partie décimale du logarithme désiré. Mais si l'on ne trouve que quatre chiffres, on n'a que les derniers chiffres de la partie décimale. Pour trouver les deux premiers, on remarquera qu'il y a à la gauche des quatre chiffres une marge ou espace blanc ; on suivra cette marge en montant et le premier nombre isolé que l'on rencontre donne les deux premiers chiffres cherchés. — 1er Ex : On demande le logarithme de 209 je trouve 320146 sur la même ligne et dans la colonne marquée *O* ; j'ai donc tout d'un coup la partie décimale du logarithme ; il ne me reste plus qu'à y joindre la caractéristique 2.

2° Ex. On demande le logarithme de 218. A côté de 218, dans la colonne marquée *O* je ne trouve que 8456. Mais je suis la marge en montant, et le premier nombre que je rencontre à gauche est 33 ; La partie décimale du log. est donc : 338456, et, en y joignant la caractéristique voulue, j'ai le logarithme complet, 2.338456 :

254. 3°. Soit à chercher le logarithme d'un nombre entier inférieur à 10000 ; le cas n'est guère plus difficile.

1er. Ex : On demande le logarithme de 4449. Je cherche d'abord les trois premiers chiffres 444 dans la colonne marquée *N*, je regarde ensuite au haut de la page et, à la tête de l'une des colonnes je trouve le chiffre 9. Je descends dans cette colonne et je trouve le nombre 8262. Ecrivant à la gauche les 2 premiers chiffres, 64, qui sont au haut de la marge j'ai toute la partie décimale du logarithme, c'est 648262. Sachant d'ailleurs (242) que la caracteristique est 3 j'ai pour le log. complet 3, 648262.

255. 2° Mais si le nombre donné n'est pas dans les tables, c'est à-dire s'il est fractionnaire ou supérieur à 10000, il faut alors avoir recours au calcul suivant :

Pour bien comprendre ce qui va suivre, on doit se rappeler les principes des nos 242, 244. Supposons d'abord qu'on demande le logarithme du nombre 8245658 plus grand que 10000.

Avant tout, nous devons chercher quelle sera la caractéristique du logarithme, et nous dirons : puisque ce nombre entier a sept chiffres, son logarithme aura pour caractéristique (6) ; quant à la partie décimale, elle sera la même que celle du logarithme d'un nombre 10 fois, 100 fois, 1000 fois plus petit que le nombre proposé ; si nous la determinons pour un de ces cas, elle sera connue pour le logarithme demandé.

A cet effet, séparons sur la droite du nombre donné assez de décimales pour le rendre inférieur à 10000, et posons 8245,658. Cherchons maintenant le log. du nombre entier immédiatement inférieur, c'est-à-dire de 8245. Ce log est 3.916191. Or, nous savons que le log. de 8245.658 est égal au log. de 8245 plus une fraction correspondant à l'excès 0.658 du premier nombre sur le second. Pour trouver cette augmentation nous ferons le raisonnement suivant : la différence entre le log. de 8245 et celui de 8246 (différence qu'indique le colonne *D*) est égale à 53 : cela équivaut à dire que l'addition d'une unité au nombre 3245 entraine pour son log. une augmentation de 0,000053, donc pour un demi, un tiers, un quart d'unité ajouté à 8245, il faudrait augmenter son log. de la moitié, du tiers, du quart, etc..., de la différence 0,000053.

Ainsi pour trouver l'augmentation relative à 0,658 il faudra prendre les six cent cinquante huit millièmes de cette différence. Multipliant donc 53 par 0,658 on trouve 34.874 ou 35 milionièmes. On ajoute ce produit au log. de 8245, et la somme est le log. de 8245,658. Voici comment on dispose le calcul :

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 8245 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3,916191 \\ \text{pour } 0.658 \ldots\ldots\ldots\ldots & 35 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{log. } 8245,658 = 3,916226$$

Ensuite nous nous rappellerons que le nombre proposé n'est pas 8245,658, mais le nombre mille fois plus fort 8245658, et que, si la partie décimale du logarithme reste la même, la caractéristique pour 8245658 est 6 et non pas 3 ; alors nous aurons enfin

$$\text{log. } 8245658 = 6,916226$$

256. **Remarque.** On peut, au moyen de la colonne *PP*, obtenir, d'une autre manière, l'augmentation relative à 0,658. En effet, 0,658 équivaut à 0.6 + 0,05 + 0,008. Or, l'augmentation relative à 0,6 est fournie immédiatement par les tables : c'est 32. Quant à l'augmentation qu'exigent les 0,05, on prendra dans les tables l'augmentation relative à 0,5, et on l'éloignera de la virgule décimale d'un rang vers la droite, c'est-à-dire qu'on la divisera par 10. De même l'augmentation relative à 0,8, laquelle est donnée par les tables, deviendra, si on l'avance de deux rangs vers la droite l'augmentation relative à 0,008. On aura ainsi :

log. 8245	3,916191
pour 0,6	32
pour 0,05	2 7
pour 0,008	42
log. 8245,658 =	3,916226|12

N. B. Dans la pratique, l'augmentation dont nous venons de parler se trouve encore plus rapidement. On se demande entre quels nombres simples (1, 2, 3, 4, 5 . . . 9) de dizièmes tombe l'excès du nombre sur le nombre entier immédiatement inférieur. Dans l'exemple que nous venons de traiter, la fraction 0,658 tombe entre 0,6 et 0,7, on prendra dans la table l'augmentation relative à 0,6, qui est 32, et celle relative à 0,7, qui est 37, et l'on ajoutera au log. de 8245 une augmentation moyenne entre 32 et 37, comme ci-après :

log. 8245	3,916191
pour 0,658	34
donc log. 8245,658 =	3,916225

avec une exactitude suffisante pour les cas ordinaires.

257. 3° Proposons-nous maintenant de trouver le logarithme d'un nombre décimal, et soit, pour premier cas, le nombre 47,8 dont on demande le logarithme. Les plus hautes unités de ce nombre étant des dizaines, la caractéristique de son logarithme sera 1, et nous savons de plus que la partie décimale de ce logarithme sera la même que celle du logarithme de 478 (n° 240). Mais ce dernier est dans les tables, où l'on trouve

$$\log. 478 = 2{,}679428$$

on aura donc

$$\log. 47{,}8 = 1{,}679428$$

Soit encore le nombre 4,518 dont on demande le logarithme, lequel aura zéro pour caractéristique, puisque ce nombre est compris entre 1 et 10 : les tables donnent

$$\log. 4518 = 3{,}654946$$

donc $\log. 4{,}518 = 0{,}654946$

258. 4° En second lieu, cherchons le logarithme du nombre 3154386,75. Nous commencerons toujours par déterminer la caractéristique, en remarquant que les plus hautes unités étant au septième rang, cette caractéristique sera 6.

Pour trouver la partie décimale, nous reculerons la virgule de trois rangs pour obtenir le nombre 3154,38675 inférieur à 10000, et nous prendrons dans les tables le nombre 3154, nombre entier immédiatement inférieur. On trouve

$$\log. 3154 = 3{,}498862 \text{ diff. tab. } 138\,;$$

ensuite on dira (256, N. B) la partie fractionnaire 0,38675 tombe entre 0,3 et 0,4, mais beaucoup plus près de 0,4. Or, à 0,3 correspond la partie proportionnelle 41 et à 0,4 correspond la partie proportionnelle 55, on ajoutera donc au log. de 3154 une augmentation placée entre 41 et 55, mais beaucoup plus près de 55, c-à-d., 51 ou 52 et l'on écrira

$$\begin{array}{rr} \log.\ 3154 = & 3.498862 \\ \text{pour } 0,38\ .\ .\ . & 52 \\ \hline \log.\ 3154,38675 = & 3.498914 \end{array}$$

Par conséquent,

$$\log.\ 3154386,75 = 6.498914$$

259. 5° Occupons-nous maintenant des fractions décimales et proposons-nous de trouver le logarithme de la fraction 0,04178.

La première idée qui se présente est de multiplier ce nombre par une puissance de 10 qui amène un ou plusieurs chiffres significatifs à gauche de la virgule, de calculer le logarithme de ce nombre transformé et de diminuer la caractéristique de ce logarithme d'un nombre d'unités égal au degré de la puissance de 10 employée.

Ainsi, multiplions, par exemple, la fraction proposée par 1000 et cherchons le logarithme de 41,78: les tables donnent log. 41,78 = 1,620968. Remarquons ensuite que la fraction donnée étant 1000 fois plus petite, son logarithme doit avoir une caractéristique moindre de 3 unités. Nous poserons donc

$$\log.\ 0,04178 = -3 + 1,620968 = -2 + 0,620968$$

ce qui se réduit au nombre entièrement négatif — 1,379032.

260. Nous savions bien que les logarithmes des fractions sont négatifs ; mais l'introduction,

dans les calculs, des décimales logarithmiques négatives aurait de grands inconvénients et diminuerait les avantages qu'offre l'emploi des logarithmes ; aussi est-on convenu de conserver aux logarithmes des fractions leurs décimales positives et de n'affecter que leur caractéristique du signe —; pour rappeler cette convention, on met le signe — au-dessus de la caractéristique, et l'on écrit

$$\log.\ 0{,}04178 = \bar{2}{,}620968,$$

sans oublier que cette expression est équivalente à

$$-2 + 0{,}620968 \text{ ou à } -1{,}379032\,;$$

Afin de mieux préciser la marche à suivre dans ce cas, cherchons le logarithme de 0,00395. On a d'abord log. 395 = 2,596597 ; on aura donc

$$\log.\ 0{,}00395 = -5 + 2{,}596597 = \bar{3}{,}596597$$

Par un procédé analogue, les élèves trouveront que

$$\begin{aligned} \log.\quad 0{,}732 &= \bar{1}{,}864511 \\ \log.\quad 0{,}04178 &= \bar{2}{,}620968 \\ \log.\quad 0{,}00235 &= \bar{3}{,}371068 \\ \log.\quad 0{,}000725 &= \bar{4}{,}860338 \\ \log.\quad 0{,}0000805 &= \bar{5}{,}905796 \end{aligned}$$

Ce tableau révèle la règle suivante qui est générale :

Dans les logarithmes des fractions décimales à caractéristique seule négative, cette caractéristique indique numériquement le rang qu'occupe, à droite de la virgule, le premier chiffre significatif de la fraction décimale correspondant à ce logarithme.

Supposons, en effet, qu'on transporte la virgule après le premier chiffre significatif d'une fraction décimale (ce qui est toujours possible), on obtient par cette opération un nombre décimal nécessairement compris entre 1 et 10 et dont le logarithme a *zéro* pour caractéristique ; d'un autre côté, on a, dans cette transformation, multiplié la fraction donnée par une puissance de 10 *précisément égale au rang* occupé par ce premier chiffre significatif, c'est-à-dire qu'on a multiplié par 10^1, 10^2...... 10^n, si le premier chiffre significatif est au 1er, au 2e..... au nme rang après la virgule. Or, comme après la recherche du logarithme provisoire il faut diminuer la caractéristique *zéro* de 1, 2......... n unités, il est évident que la caractéristique du logarithme définitif sera -1, -2......... $-n$ ou $\overline{1}$, $\overline{2}$ .... $\overline{n}$

261. Cette règle fournit un procédé simple et général pour calculer les logarithmes des fractions décimales : en voici l'énoncé : *faites abstraction de la virgule; prenez le nombre entier que forment les chiffres significatifs ; cherchez, dans les tables, la partie décimale seulement du logarithme de ce nombre transformé ; donnez pour caractéristique à ces décimales le nombre exprimant le rang qu'occupe le premier chiffre significatif de la fraction proposée et affectez cette caractéristique du signe — supérieur.*

262. 6° Enfin, quel est le logarithme d'une fraction ordinaire ? Cette question sera traitée dans la division par les logarithmes, pour le cas où le dividende est plus petit que le diviseur (n° 268).

PROBLÈME II.

263. *Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

La caractéristique d'un logarithme donné nous fait connaître (nos 242 et 262) le rang des plus hautes unités du nombre qui lui correspond ; ainsi, nous n'aurons à nous préoccuper que de la partie décimale qui peut se trouver ou non dans les tables. De là, deux cas à examiner.

Premier cas. Supposons d'abord qu'on donne le log. 2,549003 ; en ouvrant les tables, on voit ce log. en face du nombre 354, on pose donc

$$\log.\ 2{,}549003 = 354.$$

Si le log. proposé était 4,567379, on trouverait dans les tables sa partie décimale à côté du nombre 3693 ; mais comme sa caractéristique 4 exige que le nombre correspondant ait 5 chiffres aux entiers, on écrira

$$\log.\ 4{,}567379 = 36930$$

Cherchons, pour troisième exemple, le nombre auquel appartient le log. 1,859439. En feuilletant les tables, on voit les décimales de ce log. en regard du nombre 7235 ; mais la caractéristique 1 ne comportant que des dizaines, on aura (no 244)

$$\log.\ 1{,}859439 = 72{,}35$$

Enfin, admettons qu'on ait à calculer le nombre correspondant à un log. à caractéristique négative ; log. $\overline{4}$,456670, par exemple. La partie décimale de ce log. est en face du nombre entier 2862 et comme la caractéristique $\overline{4}$ indique, pour le nombre correspondant, une fraction décimale dont le premier chiffre significatif est au quatrième rang, à droite de la virgule, on aura

$$\log.\ \overline{4}{,}456670 = 0{,}0002862.$$

264. *Second cas.* Quand les tables ne contiennent pas la partie décimale du log., on est obligé

de recourir à un petit calcul pour résoudre le problème.

Soit, par exemple, le log. 2,734591 dont on demande le nombre correspondant. Après s'être assuré que sa partie décimale n'est pas tout entière dans les tables, on cherchera deux log. consécutifs entre lesquels tombe le log. proposé. Ces limites se rencontrent en général en plusieurs points des tables ; ainsi on trouve que la fraction 0,734591 tombe entre les log. de 54 et de 55 (offrant à la vérité une grande différence) ; on trouve encore qu'elle tombe entre les log.des nombres 542 et 543 ; enfin, plus loin, entre ceux de5 427 ét 5428 dont la différence 80 (colonne *D*) nous permettra de nous arrêter.

Nous noterons cette *différence tabulaire*, 0,000080, et nous prendrons aussi l'excès 0,000031, dont les décimales du logarithme donné surpassent celles du nombre 5427 : nous ferons ensuite ce raisonnement : le nombre provisoire qui convient aux décimales du logarithme donné est nécessairement compris entre 5427 et 5428, c'est-à-dire qu'il est égal à 5427 plus une fraction ; or, si l'addition de 0,000080 au log. de 5427 fait agmenter ce nombre d'une unité, l'addtion de 0,000031 entraînera une augmentation de $\frac{31}{80}$ et comme $\frac{31}{80} =$ 03875, on aura le nombre 5427,3875,lequel n'exige plus qu'un déplacemsnt de virgule pour devenir le nombre demandé ; celui-ci, en effet, à cause de la caractéristique 2, ne doit avoir que trois chiffres aux entiers ; on écrira donc

$$\text{log. } 2,734591 = 542,73875.$$

Cet exemple suffit pour faire ressortir l'avantage qu'il y a à chercher les logarithmes *limites* dans la partie la plus élevée des tables.

Il indique encore la marche à suivre daus tous les cas. Elle peut se résumer ainsi :

1° Chercher dans les tables les deux log. consécutifs qui se rapprochent le plus, l'un *en plus* l'autre *en moins*, du log. proposé, et prendre note du nombre de quatre chiffres qui correspond dans les tables au plus petit de ces deux log. limites ;

2° Retrancher le plus petit de ces deux log. du log. proposé ;

3° Diviser la différence obtenue par la diff. tab. correspondante (colome D).

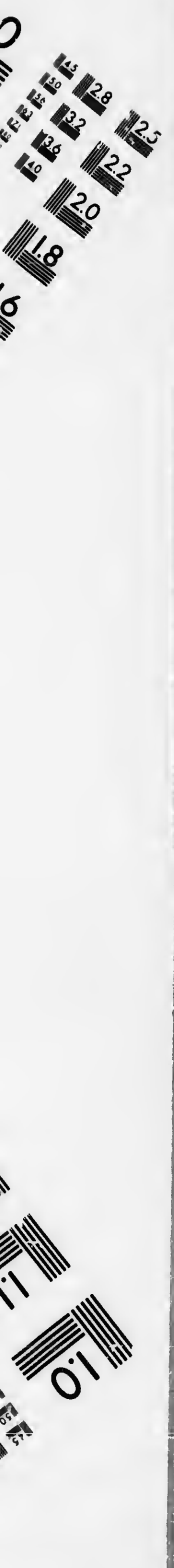
4° Ecrire les décimales du quotient à la suite du nombre de quatre chiffres dont on a pris note précédemment.

5° Donner à la virgule décimale la place qu'exige la caractéristique. (242)

Donnons un 2d exemple. Soit le log. 1, 456982. Ce log. (c'est-à-dire la partie décimale) tombe entre les deux log. tabulaires 456973 et 457125 ; en d'autres termes, le log. tab. qui approche le plus *en moins* du logarithme proposé est 456973, auquel correspond dans les tables le nombre 2864. Or, 456982 — 456973 = 9. La division de 9 par la diff. tab. 152 donne le quotient 0,06 qu'on écrit à la suite du nombre 2864. On obtient ainsi le nombre 286406, sur la gauche duquel on sépare deux chiffres, comme l'exige la caractéristique 1, et le nombre demandé est 28,6406.

Dans la pratique, lorsqu'on n'a besoin que d'une approximation ordinaire, les chiffres qui suivent le quatrième se trouvent d'une manière beaucoup plus expéditive.

Ainsi dans l'exemple du n° 265, on dirait : 31 étant un peu plus du tiers de la diff. tal. 80, il faut écrire à la suite de 5427 des chiffres qui, placés immédiatement à la droite d'une virgule



décimale, donneraient un peu plus du tiers de l'unité, c'est-à-dire quelque chose comme 0,345 .... ou 0,355..... ou 0,36555..... etc..... Donc

log. 734560 5427

pour 734591 — 734560 = 31 0,355

donc log. 134591 = 5427,355

Dans ce dernier nombre on peut compter sur l'exactitude des quatre ou même des cinq premiers chiffres. Or, c'est là une approximation dont on se contente souvent (Nº 266).

QUESTIONNAIRE.

Donnez la théorie des logarithmes ? (225..... 231)

Quelles sont les propriétés des logarithmes ? (232..... 235)

Comment a-t-on formé les logarithmes vulgaires ? (236..... 241)

Qu'est-ce que la caractéristique ? (242)

Q'avez-vous à remarquer au sujet de la partie décimale ? (243)

En quoi diffèrent les logarithmes de deux nombres entiers ou décimaux qui sont exprimés par les mêmes chiffres significatifs..... ? (244)

Expliquez la disposition des tables ? (245..... 250)

Comment trouve-t-on le log. d'un nombre quelconque à l'aide des tables ? (252..... 263)

Un logarithme étant donné, comment trouve-t-on le nombre auquel il appartient ? (264..... 265)

EXERCICES

SUR L'USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES.

133. Calculer les logarithmes des nombres entiers

48000 ; 31456 ;

4789536 ; 30047589500.

134. Trouver les logarithmes des nombres fractionnaires

$$53{,}2\ ;\ 377{,}45\ ;\ 1{,}00007.$$

135. Chercher les logarithmes des fractions ordinaires

$$\frac{5}{8}\,;\ \frac{115}{3845}\,;\ \frac{3}{111}\,;\ \frac{111}{9999}.$$

136. Trouver les logarithmes des nombres réciproques

$$\frac{11}{7} \text{ et } \frac{7}{11}\,;\ \frac{156}{36} \text{ et } \frac{12}{52}.$$

Approximation dans les calculs des logarithmes.

265. Les calculs logarithmiques entraînent des erreurs inévitables qui proviennent de plusieurs sources.

1° Les logarithmes étant incommensurables, on ne peut d'abord avoir le logarithme d'un nombre qu'avec approximation, et puisque nos tables donnent six décimales, l'erreur (en plus ou en moins) sera moindre qu'une demi-unité du 6^{me} ordre décimal, ou que 0,0000005. En effet, conformément aux règles d'approximation données en arithmétique, ceux qui ont calculé ces logarithmes ont d'abord cherché 7 décimales, puis supprimant la 7^{me}, ont *forcé* la 6^{me} (c'est-à-dire l'ont augmentée de 1), ou l'ont gardée telle quelle, suivant que la décimale rejetée surpassait 4 ou non. Il s'en suit que 0,0000005 est l'extrême limite de l'écart qui résulte de cette suppression.

2° Les parties proportionnelles dont nous avons fait usage au n^{os} 257 et 255 ne sont pas rigoureuses, parce qu'elles supposent que les logarithmes sont proportionnels aux nombres correspondants, ce qui n'est pas exact ; mais l'erreur est peu importante et d'autant plus faible que les nombres sont plus grands.

3° L'insuffisance des logarithmes est surtout manifeste dans les questions où l'on cherche le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique est fort élevée. S'il s'agissait, par exemple, de trouver le nombre correspondant au log. 9,626956, on verrait sa partie décimale tout entière en face du nombre 4236 ; mais la caractéristique 9 annonçant que le nombre demandé contient dix chiffres aux entiers, on serait obligé d'ajouter six zéros au nombre des tables, à défaut d'autres chiffres significatifs, et l'on écrirait

$$\log. 9{,}626956 = 4236000000.$$

D'ailleurs, on se contente ordinairement de cette approximation, car dans les nombres considérables les chiffres des plus hautes unités donnent seuls une idée de ces nombres.

Emploi des logarithmes dans les calculs.

266. 1re QUESTION. *Trouver le produit de plusieurs facteurs au moyen des logarithmes.*

Soit proposé d'effectuer le produit suivant :

$$51370 \times 0{,}517 \times 0{,}004735 \times 28{,}5.$$

Le principe du n° 232 nous apprend que le logarithme de ce produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs, on posera donc

$$\begin{array}{ll}
\log. 51370 & = 4{,}710710 \\
\log. 0{,}517 & = \overline{1}{,}713491 \\
\log. 0{,}004735 & = \overline{3}{,}675320 \\
\log. 28{,}5 & = 1{,}454845 \\
\hline
\text{Somme.........} & 3{,}554366 \text{ log. du produit.}
\end{array}$$

Pour faire cette somme, on se rappellera que les décimales étant toutes positives, on doit les additionner ensemble par le procédé arithmétique; quant aux caractéristiques, qui sont les unes positives, les autres négatives, on en fait la somme algébripue, en tenant compte des retenues positives provenant des décimales, et l'on a $7 - 4 = 3$.

Pour achever la solution de la question proposée, il reste encore à trouver, par le procédé du n° 264, le nombre auquel appartient le logarithme total 3, 554366, et comme l'on obtient 3583,98, ce nombre est le produit demandé.

267. 2e QUESTION. *Effectuer une division par les logarithmes.*

Supposons d'abord que le diviseur soit plus grand que l'unité, et proposons-nous de trouver le quotient de 93745,241 par 753,9. Le principe du n° 233 donne, pour le quotient demandé q,

$$\log.\ q = \log.\ 93745{,}241 - \log.\ 753{,}9\,;$$

ou bien

$$\log.\ 93745{,}241 = 4{,}971925$$

$$\log.\ \ 753{,}9 = 2{,}877314$$

$$\text{Différence......}\ 2{,}094641 = \log.\ q.$$

Ce dernier donne ensuite $q = 124{,}35$ pour le quotient cherché.

Ce procéde par soustraction, bien simple dans ce cas, devient très-compliqué si le diviseur est supérieur au dividende, parce qu'il conduit aux logarithmes négatifs dont l'emploi est très-embarrassant lorsqu'il y a des diviseurs multiples. Pour éviter ces inconvénients, on a cherché à remplacer, dans tous les cas, la soustraction par une seule addition dont la somme est le logarithme direct du quotient demandé.

On atteint ce but, en substituant au logarithme du diviseur un logarithme équivalent qu'on obtient par la théorie du *complément à l'unité.*

On nomme COMPLÉMENT A L'UNITÉ *d'une fraction décimale la partie qui lui manque pour faire une unité entière.* Ainsi, 0,3 est le complément à l'unité de 0,7, de même que 0,176 est celui de la fraction 0,824, etc.

Hâtons-nous de faire observer qu'on écrit *à vue* un pareil complément *en retranchant de* 10 *le dernier chiffre significatif de la fraction donnée, et de* 9 *tous les autres chiffres.*

Cela compris, reprenons l'opération précédente : le logarithme du diviseur 753,9 étant 2,877314 a pour complément à l'unité de sa partie décimale 0,122686 ; or, si l'on ajoute et si l'on retranche à la fois ce complément au logarithme du diviseur, on aura évidemment l'égalité.

$$\log. 753{,}9 = 2{,}877314 \text{ ou bien}$$

$$\log. 753{,}9 = 2 + 0{,}877314 + 0{,}122686 - 0{,}122686\,;$$

$$\text{mais} \quad 0{,}877314 + 0{,}122686 = +1$$

$$\text{donc } \log. 753{,}9 = 2{,}877314 = 3 - 0{,}122686\,;$$

ce dernier log. $+3 - 0{,}122686$ est le logarithme équivalent cherché. Employé sous cette forme, le logarithme du diviseur, devant être retranché de celui du dividende, n'aura qu'à changer de signe, et la soustraction des deux parties décimales sera ramenée à une addition, comme on le voit ci-dessous

$$\log. 93745{,}241 = 4{,}971949$$

$$\log. 753{,}9 = 3 - 0{,}122686 \text{ donne} - \log. 753{,}9 = 3{,}122686$$

$$\log. q \;\ldots\ldots\ldots\; \text{Somme} = 2{,}094635$$

résultat conforme au précédent.

268. Traitons un exemple dans lequel le diviseur est moindre que l'unité. Soit à calculer le quotient $q = \frac{53,726}{0,0405}$.

D'après le nº 233 on a

$$\log.\, q = \log.\, 53,726 - \log.\, 0,0405\,;$$

et les procédés des nºs 259 et 262 nous feront trouver, au moyen des tables, log. 53,726 $=$ 1,730185 et log. 0,0405 $= \overline{2},607455$.

Mais le logarithme à soustraire doit subir une modification basée sur le principe établi plus haut, pour rendre additive la partie décimale, c'est-à-dire qu'il faut augmenter et diminuer, comme ci-dessus, le logarithme du diviseur du complément à l'unité de sa partie décimale, ce qui donne l'égalité

$$\log.\, 0,0405 = \overline{2},607455 \text{ ou bien}$$

$$\log.\, 0,0405 = -2 + 0,607455 + 0,392545 - 0,392545\,;$$

mais $\quad 0,607455 + 0,392545 = +\ 1\,;$

donc le diviseur aura pour logarithme équivalent

$$\overline{2},607455 = -1 - 0,392545\,;$$

enfin, ce dernier logarithme, devant être soustrait, change de signe et devient positif, ; il n'y a plus alors qu'a opérer l'addition suivante :

$$\begin{array}{rl} \log.\, 53,726 & = 1,730185 \\ -\log.\, 0,0405 & = 1,392545 \\ \hline \log.\, q \ldots & = 3,122730 \end{array} \text{ et } q = 1326,57.$$

269. De ces deux exemples, résulte une règle bien simple pour effectuer une division par logarithmes, sans prendre la peine d'écrire la transformation précitée.

Règle. *Lorsqu'un logarithme doit être soustrait ajoutez algébriquement* $+1$ *à sa caractéristique, écrivez cette caractéristique, ainsi modifiée, avec un signe contraire, et, à la suite de la virgule, mettez le complément à l'unité de la partie décimale primitive.* Il ne reste plus à faire que la somme algébrique, comme pour la multiplication.

Pour indiquer qu'un logarithme soustractif a subi cette modification, on le fait précéder du signe —, ainsi qu'on l'a vu dans les deux exemples précédents.

Appliquons cette règle à quelques nouveaux exemples.

270. 1° *Convertir par logarithmes la fraction vulgaire* $\frac{3}{47}$ *en fraction décimale.*

Les tables donnent log. $3 = 0{,}477121$

log. $47 = 1{,}672098$ d'où $-$ log. $47 = \bar{\bar{2}},327902$

$$\log. \frac{3}{47} = \bar{2},805023$$

et par suite $\frac{3}{47} = 0{,}06383$.

271. 2° *Trouver le quotient de* 56976,348 *par* 0,000063.

Le calcul tabulaire donne log. $56976{,}348 = 4{,}755695$

log. $0{,}000063 = \bar{5},799341$ d'où $-$ log. $0{,}000063 = \bar{\bar{4}},200659$

$$\log. q = 8{,}956354$$

Le quotient demandé est donc $q = 904380000$.

272. *Enfin, pour dernier exemple, traitons une expression fractionnaire telle que*

$$q = \frac{0{,}0831 \times 61{,}075}{3{,}14159 \times 0{,}000682 \times 0{,}9015}.$$

Voici la disposition que l'on donne ordinairement au calcul :

$$\begin{aligned} &\log.\ 0{,}0831 = \overline{2},919601 \\ &\log.\ 61{,}075 = 1{,}785864 \\ -\ &\log.\ 3{,}14159 = \overline{1},502851 \\ -\ &\log.\ 0{,}000682 = 3{,}166216 \\ -\ &\log.\ 0{,}9015 = 0{,}045034 \\ \hline &\log.\ q = 3{,}419566 \end{aligned}$$

Donc le quotient demandé est 2627,642.

273. 3e QUESTION. *Élever un nombre à une puissance quelconque par les logarithmes.*

Soit le nombre 8,35 qu'on veut élever à la cinquième puissance. D'après la règle du nº 234, il suffira de multiplier par l'exposant 5 le logarithme de 8,35 pour avoir le logarithme de la puissance demandée.

Mais $\log.\ 8{,}35 = 0{,}921686$;
donc $\log.\ (8{,}35)^5 = 5 \times 0{,}921686 = 4{,}608430$;
et comme ce dernier correspond au nombre 40591,02 on aura enfin $(8{,}35)^5 = 40591{,}02$ à $\frac{1}{100}$ près.

274. Proposons-nous de trouver le cube de la fraction décimale 0,0512. Nous aurons

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}0512 &= \overline{2},709270 \\ \log.\ (0{,}0512)^3 &= 3 \times \overline{2},709270, \\ &= 3\,(-2 + 0{,}709270), \\ &= -6 + 2{,}127810, \\ &= \overline{4},127810, \end{aligned}$$

ou bien $\log.\ (0{,}0512)^3 = \bar{4},127810$,
lequel appartient au nombre 0,000134218 qui est le cube demandé.

On voit qu'ici, pour multiplier par 3 le logarithme de 0,0512, il faut opérer séparément sur sa partie positive et sur sa partie négative.

275. 4e QUESTION. *Extraire une racine quelconque par les logarithmes.*

On demande d'extraire la racine 7e du nombre 2749640; la règle du nº 235 indique qu'il faut diviser le logarithme de la puissance par l'indice pour avoir le logarithme de la racine ; nous aurons donc

$$\log.\ 2749640 = 6{,}439276,$$

$$\log.\ \sqrt[7]{2749640} = \frac{6{,}439276}{7} = 0{,}919897\ ;$$

ce dernier correspond au nombre 8,31567... racine demandée.

276. En second lieu, extrayons la racine cubique de 2 : nous aurons

$$\log.\ \sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{3}\log.\ 2 = \frac{0{,}301030}{3} = 0{,}100343;$$

lequel appartient à 1,25992... racine cherchée.

277. Soit, pour troisième exemple, $\sqrt[5]{0{,}00149}$; on a

$$\log.\ 0{,}00149 = \overline{3},173186,$$

et pour le diviser par 5, il faut poser

$$\frac{-3 + 0{,}173186}{5};$$

mais pour que cette division soit praticable, il faut que la caractéristique soit un multiple du diviseur. Quand il n'en est pas ainsi, on doit rendre la division possible en ajoutant et en retranchant à la fois assez d'unités entières à cette caractéristique, comme on le voit ci-après :

$$\frac{-3+0{,}173186}{5}=\frac{-5+2{,}173186}{5}.$$

On obtient alors pour quotient

$$-1+0{,}434637=\overline{1},434637.$$

Mais ce dernier logarithme correspond au nombre 0,272043 ; ainsi on aura

$$\sqrt[5]{0{,}00149}=0{,}272043.$$

QUESTIONNAIRE.

Dans les calculs logarithmiques de quelles sources les erreurs proviennent-elles ? (265, 1°, 2°, 3°)

Quel emploi fait-on des logarithmes dans les calculs ? (266....277)

Qu'appelle-t-on complément à l'unité ? (267)

Comment obtient-on ce complément à l'unité ? (267).

EXERCICES

SUR LES CALCULS LOGARITHMIQUES.

Effectuer les opérations suivantes au moyen des logarithmes :

137. $7356945 \times 49857325 \times 6450695000.$

138. $16567{,}45675 \times 0{,}0078564 \times 0{,}4765.$

139. $\dfrac{185426 \times 12567965 \times 769}{75482 \times 9647345}.$

140. $\dfrac{1865000 \times 1{,}0000596 \times 8065}{0{,}09035 \times 0{,}0000005}$.

141. $(3756825)^{13}$.

142. $\sqrt{4758943594 32}$.

143. $3^{5} \times (124)^{7} \times (9725)^{4}$.

144. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{8}$

145. $\sqrt[32]{{}^{1}/_{2}}$.

CHAPITRE X.

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

Intérêts composés.

278. *Définition.* On dit en général qu'une somme est placée à intérêts composés, lorsque chaque année l'intérêt s'ajoute au capital pour porter intérêt l'année suivante.

Cela posé, cherchons ce que devient, au bout d'un certain nombre d'années n, un capital C placé à intérêts composés.

Représentons par r l'intérêt annuel d'un franc; 1 fr., placé au commencement d'une année, vaut $1 + r$ à la fin de cette année, et 2, 3, 4 fr...... vaudront dans un an 2 fois, 3 fois, 4 fois,........ $1 + r$; par conséquent, le capital C deviendra dans un an $C(1 + r)$.

En d'autres termes, il faut multiplier le capital proposé par $1 + r$ pour savoir ce qu'il vaut au bout de l'année, *capital* et *intérêts* compris.

Il suit de là que le capital C vaut :

à la fin de la 1re année . . . . $C(1+r)$,
à la fin de la 2me année $C(1 + r)(1 + r) = C(1+r)^2$,
à la fin de la 3me année . . . . $C(1+r)^3$,
. . . .
et à la fin de la n^e année . . . . $C(1+r)^n$;

c'est-à-dire que si l'on appelle C' la somme à laquelle s'élève un capital C, placé à intérêts composés pendant n années, on aura la formule

$$[1] \qquad C(1+r)^n = C'.$$

279. Cette formule des intérêts composés montre que les questions de ce genre renferment toujours quatre quantités : 1° le capital primitif, C; 2° l'intérêt annuel d'un franc, r ; 3° la durée du placement, n ; 4° enfin le capital définitif, C'.

Chacune des quatre quantités, C, r, n, C', peut être prise tour à tour pour inconnue, de là quatre questions différentes.

280. 1re QUESTION. (C' inconnu.) — *On a placé 2000 fr. à intérêts composés au taux de 5 pour 0/0; que devient la créance au bout de la 8me année?*

En faisant, dans la formule [1], $C = 2000$; $r = 0{,}05$; $n = 8$, on aura le capital définitif :

$C' = 2000\,(1{,}05)^8$ d'où $\log.C' = \log.2000 + 8\log.1{,}05$

Les tables donnent	log. 2000 . .	3,301030
8 log. 105 = 8 × 0,021189	. . . .	0,169512
	log. C' =	3,470542

et par suite $C' = 2954$ fr. 90.

281. 2me QUESTION. (C inconnu.) — *On demande quelle somme C il faudrait placer pour produire un capital définitif C' dans n années, au taux r et à intérêts composés.*

En d'autres termes, *que vaut aujourd'hui une somme C qui n'est payable que dans n années?*

La formule [1] devient, dans ce cas,

$$[2] \qquad C = \frac{C'}{(1+r)^n}$$

d'où l'on tire $\log. C = \log. C' - n\log.(1+r)$.

EXEMPLE. *Quelle somme faut-il placer à intérêts composés et à 5 0/0 pour qu'elle produise 10000 fr. à la fin de la 15^me^ année?*

On substituera, dans la formule précédente, les données $C' = 10000$; $r = 0,05$; $n = 15$; les logarithmes donneront alors

$$\begin{array}{lr} \log. C' = \log. 10000 \ldots\ldots\ldots\ldots & 4,000000 \\ 15 \log. 1,05 = 0,317835 \text{ et} - 15 \log. 1,05 = & \bar{1},682165 \\ \hline \log. C = & 3,682165 \end{array}$$

Donc la somme demandée $C = 4810$ fr. 20.

282. 3^me^ QUESTION. (n inconnue.)—*Dans combien d'années une somme C aura-t-elle acquis une valeur C' par l'accumulation des intérêts composés, au taux* r?

La formule [1], traitée par les logarithmes, dont l'emploi est ici indispensable, devient

$$\log. C' = \log. C + n \log. (1 + r); \text{ d'où l'on tire}$$

$$[3] \qquad n = \frac{\log. C' - \log. C}{\log. (1 + r)}.$$

EXEMPLE. *En combien d'années un placement de 4810 fr. 20 s'élèvera-t-il à 10000 fr. par les intérêts composés, à raison de 5 0/0 ?*

On aura $C = 4810,20$; $C' = 10000$; $r = 0,05$; et la formule [3] donnera

$$n = \frac{\log. 10000 - \log. 4810,20}{\log. 1,05} = \frac{4 - 3,682165}{0,021189}.$$

$$\text{ou bien} \qquad \frac{0,317835}{0,021189} = \frac{317835}{2119} = 15 \text{ ans.}$$

283. Proposons-nous, comme second exemple, *de calculer le temps nécessaire pour qu'un capital*

placé au taux de 5 0/0 *et à intérêts composés, se trouve doublé, triplé... décuplé.*

Pour simplifier et généraliser la question, prenons pour type le capital un franc, en faisant dans la formule [1] $C = 1$; $r = 0.05$ et successivement C' égal à 2, 3... 10, nous aurons pour les diverses suppositions.

$(1 + r)^n = 2$ pour le double, ou bien

$$n = \frac{\log. 2}{\log. 1{,}05} = \frac{0{,}301030}{0{,}021189} = 14{,}206$$

$(1 + r)^n = 3$ pour le triple, ou

$$n = \frac{\log. 3}{\log. 1{,}05} = \frac{0{,}477121}{0{,}021189} = 22{,}517,$$

etc. . . . .

$(1 + r)^n = 10$ pour le décuple, ou

$$n = \frac{\log. 10}{\log. 1{,}05} = \frac{1}{0{,}021189} = 47{,}193.$$

Ainsi, au taux de 5 0/0, une somme est doublée dans 14 ans, 2 mois, 14 jours ;

elle est triplée dans 22 ans, 6 mois, 7 jours ;

. . . .

elle se trouve décuplée dans 47 ans, 2 mois, 9 jours.

284 4me QUESTION. (r inconnue.)—*A quel taux faut-il placer une somme de* 4810 *fr.* 20 *à intérêts composés, pour qu'elle constitue au bout de* 15 *ans un capital de* 10000 *fr.?*

La formule [1], traitée par les logarithmes, donne

$$n \log. (1 + r) = \log. C' - \log. C,$$

d'où l'on tire $\log. (1 + r) = \dfrac{\log. C' - \log. C}{n}$,

et si, dans cette dernière expression, on fait $C' = 10000$, $C = 4810,20$ et $n = 15$, on aura enfin

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. 10000 - \log. 4810,20}{15} = \frac{4 - 3,682165}{15}$$

ou bien $\log. (1 + r) = \dfrac{0,317835}{15} = 0,021189$

d'où $1 + r = 1,05$ ou r (intérêt d'un franc) $= 0,05$.

Le capital primitif a donc été placé au 5 0/0.

285. *Remarque.* Dans les problèmes qui précèdent, la quantité n représente un nombre entier d'années ; il peut arriver cependant que la durée du placement soit fractionnaire, il faut alors remplacer,

dans la formule, n par $\dfrac{m}{12}$ si le temps est exprimé

en mois, et par $\dfrac{j}{360}$ s'il est exprimé en jours.

Exemple.—*Un cultivateur achète une propriété au prix de 6500 fr., payable dans 4 ans 7 mois, à la condition de tenir compte des intérêts composés à 5 0/0. Quelle somme devra-t-il à l'expiration du délai ?*

La formule [1] donne

$$C' = 6500\ (1,05)^{\frac{55}{12}}$$

$$\log. C' = \log. 6500 + \tfrac{55}{12} \log. 1,05$$

$$\log. 6500 = 3,812913$$

$$\tfrac{55}{12} \log. 1,05 = 0,097116$$

$$\text{total.} \ldots\ldots\ 3,910029$$

d'où $C' = 8128$ fr. 85.

On doit remarquer ici que, pour les intérêts composés, le temps entrant comme exposant dans la formule, les fractions de temps ne sont pas proportionnelles aux mêmes fractions du taux, comme cela a lieu pour les intérêts simples.

QUESTIONNAIRE.

Qu'appelle-t-on intérêt composé ? (278)
Quelle est la formule de l'intérêt composé ? (278)
Donnez des exemples, 1° quand C′ est inconnu (280); 2° quand C est inconnu (281) ; 3° quand n est inconnue (282) ; 4° quand r est inconnue. (284)

§ I. DES COMBINAISONS.

286. Quand on a un certain nombre d'objets, tels que des boules de diverses couleurs, des lettres, des cartes, des chiffres, etc., il est utile de connaître les divers groupes qu'on obtiendrait en les disposant de toutes les manières possibles. Ces divers groupes se réduisent à trois classes que l'on désigne sous les noms de *permutations*, *arrangements* et *combinaisons*.

1° *Permutations.*

287. On appelle *permutations* toutes les dispositions relatives que prend un nombre n d'objets alignés ou réunis en cercle.

288. Ainsi, deux lettres a et b donnent les deux permutations ab, ba.

Si nous prenons une troisième lettre c et que nous l'écrivions successivement à toutes les places possibles dans les deux permutations précédentes, nous formerons les six permutations de trois lettres, qui suivent :

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

De même, l'introduction d'une quatrième lettre d dans ces six permutations de 3 lettres donnera $6 \times 4 = 24$ permutations de 4 lettres, parce que *d* pourra occuper quatre places successives dans chaque groupe de trois lettres.

En continuant ainsi, on trouvera que le nombre des permutations de 5 lettres s'obtient en multipliant par 5 le nombre des permutations de 4 lettres, et ainsi de suite. On a donc en général

1×2 pour le nombre des permutations de 2 objets,
$1 \times 2 \times 3$ pour les permutations de 3
$1 \times 2 \times 3 \times 4$ . . . . pour 4
. . . .
et pour *n* objets

$$1.\,2.\,3.\,4.\,5 \ldots\ldots\ldots\ldots n; \qquad [1]$$

c'est-à-dire que, pour avoir le nombre total des permutations dont *n* objets sont susceptibles, *il faut faire le produit de tous les nombres entiers depuis* 1 *jusqu'à ce nombre* n.

2° *Arrangements.*

289. Quand on a sous la main un tas *m* d'objets et qu'on le subdivise en groupes de 2, de 3, de 4. . . . . . . de *n* objets, et cela de toutes les manières possibles, on forme les assemblages appelés *arrangements* 2 à 2, arrangements 3 à 3. . . . . arrangements *n* à *n*.

290. Prenons les 25 lettres de l'alphabet et, à la suite de chacune d'elles, écrivons alternativement chacune des 24 autres pour obtenir les arrangements suivants :

ab, *ac*, *ad*, *ae*. . . . . . . *az*;
ba, *bc*, *bd*, *be*. . . . . . . *bz*;
ca, *cb*, *cd*, *ce*. . . . . . . *cz*;
. . . .

Nous obtiendrons ainsi 25 lignes horizontales contenant chacune 24 groupes de 2 lettres et nous aurons formé les $25 \times 24 = 600$ arrangements 2 à 2 que peuvent fournir ces 25 lettres ; nous en conclurons que m objets groupés 2 à 2 donnent un nombre d'arrangements exprimé par le produit $m(m-1)$.

Pour obtenir les arrangements 3 à 3 de 25 lettres données, il faudrait écrire alternativement à la suite des arrangements 2 à 2 chacune des 23 lettres restantes, ce qui fournirait le nombre $25 \times 24 \times 23 = 13800$ arrangements 3 à 3 ; ainsi, le produit $m(m-1)(m-2)$ exprime en général le nombre d'arrangements 3 à 3 que peuvent donner m objets.

Nous trouverions de même la formule $m(m-1)(m-2)(m-3)$ pour le nombre des arrangements 4 à 4 que fournit un nombre m d'objets, et ainsi de suite.

Enfin nous aurons la formule générale

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1) \qquad [2]$$

pour calculer le nombre d'arrangements n à n dont m objets sont susceptibles.

291. *Arrangements avec répétition.* Il est quelquefois utile de considérer les arrangements faits avec *répétition*, c'est-à-dire, en réunissant chaque objet à lui-même, comme on le réunit aux autres ; dans ce cas, la formule n'est plus la même.

Reprenons les 25 lettres de l'alphabet et assemblons-les 2 à 2, comme on le voit ci-après :

$$\begin{array}{llll} aa, & ab, & ac, & ad\ldots\ldots\ldots \\ ba, & bb, & bc, & bd\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

chaque ligne horizontale comprendra 25 arrangements 2 à 2, à cause des répétitions aa, bb....... et nous aurons en tout $25 \times 25 = 625$. Ainsi m objets forment m^2 arrangements 2 à 2 avec répétition.

Pour les arrangements 3 à 3, nous aurons des groupes tels que

$$\begin{array}{l} aaa, \quad aab, \quad aac \ldots\ldots\ldots \\ bba, \quad bbb, \quad bbc \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

c'est-à-dire que chaque arrangement 2 à 2 nous donnera 25 arrangements 3 à 3, à cause de la répétition *aaa*, *bbb*....... et le total s'élèvera au cube de 25 ou à $25 \times 25 \times 25 = 15625$. Ainsi, m objets forment un nombre d'arrangements 3 à 3 avec répétition exprimée par la 3me puissance de m ou m^3 ; et, en général, m^n exprime le nombre d'arrangements n à n que peuvent fournir m objets groupés avec répétition.

3° *Combinaisons.*

292. Parmi les divers arrangements qu'on peut former avec m objets, groupés n à n, on nomme spécialement *combinaisons* ceux de ces assemblages qui diffèrent les uns des autres par un, au moins, de ces objets.

293. Si nous voulons former les combinaisons 2 à 2 des lettres de l'alphabet, nous prendrons d'abord la première lettre a et nous écrirons alternativement à la suite les autres 24 lettres

ab, *ac*, *ad*, *ae*. *az*,

ce qui nous donnera 24 combinaisons 2 à 2. Ensuite, nous prendrons la seconde lettre b et nous placerons alternativement à la suite les 23 lettres restantes, pour obtenir les 23 combinaisons *bc*, *bd*, *be*....... *bz*.

Nous prendrons de même la 3me lettre c et nous écrirons, alternativement après, chacune des 22 lettres qui la suivent, pour obtenir les 22 combinaisons

cd, *ce*, *cf*. . . . . *cz* ;

et ainsi de suite, en ayant soin de ne placer auprès de chaque lettre que celles qui sont après elle dans l'ordre alphabétique, sans revenir jamais en arrière. Par ce moyen, on évite la formation des groupes qui constituent les permutations de deux mêmes lettres, et, par cela même, on obtient un nombre de combinaisons 2 à 2 deux fois moindre que le nombre des arrangements.

Ainsi, 25 lettres donnent $\frac{25 \times 24}{2} = 300$ combinaisons 2 à 2 ; et, en général, le nombre de combinaisons binaires qu'on peut obtenir avec m objets est exprimé par la formule

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

294. Passons aux combinaisons 3 à 3 ou ternaires. Pour les former, il faut prendre les combinaisons binaires, et écrire à leur suite, alternativement, chacune des 23 lettres qui, dans l'ordre alphabétique, occupent les rangs inférieurs à celui de la dernière lettre du groupe binaire dont on s'occupe ; on évite ainsi de comprendre les permutations qu'on ne manquerait pas de former si l'on revenait en arrière. Mais 3 lettres donnent (nº 288) six permutations ; donc le nombre des combinaisons 3 à 3 est six fois moindre que celui des arrangements, et nous aurons $\frac{25 \times 24 \times 23}{2 \,.\, 3} = 2300$ pour le nombre des combinaisons ternaires que donnent les 25 lettres,

Ainsi, la formule $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{2\ .\ 3}$ exprime le nombre de combinaisons 3 à 3 dont m objets sont succeptibles.

295. Sans aller plus loin et par induction, nous voyons que la formule générale donnant le nombre des combinaisons n à n qu'on peut former avec m objets est

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ldots\ n}.\quad [3]$$

En d'autres termes, le nombre des combinaisons de m objets, pris n à n, est égal au quotient qu'on obtient en divisant le nombre des arrangements n à n par le nombre des permutations que comporte l'un de ces arrangements n à n.

296. Nous devons faire observer que le facteur 1 écrit au dénominateur n'est là que pour donner une forme symétrique à la formule et que les lettres, employées dans les démonstrations précédentes, représentant indifféremment des chances, des événements, des données quelconques, la seule importance de ces formules consiste dans les nombres et les rapports qu'elles fournissent.

Appliquons cette théorie à quelques exemples.

297. Problème I. *De combien de manières différentes huit personnes peuvent-elles se placer autour d'une table ?*

Cette question revient à demander quelles sont les permutations dont 8 objets sont susceptibles. Il faut donc employer la formule [1] dans laquelle on fera $n = 8$, et l'on aura

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8 = 40320;$$

donc 8 personnes pourront dîner ensemble 40320 fois pour épuiser toutes les positions diverses qu'elles peuvent prendre les unes relativement aux autres.

298. Problème II. *Au jeu de whist ou de boston, on donne à chaque joueur* 13 *cartes sur* 52 ; *combien a-t-on de combinaisons ?*

Chaque joueur aura une des combinaisons 13 à 13 des 52 cartes ; la formule [3] donne

$$\frac{52 \,.\, 51 \,.\, 50 \ldots\ldots 41 \,.\, 40}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots 12 \,.\, 13} = 635\,013\,559\,600.$$

299. Problème III. *Un coffre-fort est fermé par une serrure à combinaisons à deux ou trois boutons. On demande combien de mots on peut former avec l'un ou avec l'autre système.*

On nomme *serrure à combinaisons* une serrure dont le mécanisme est en rapport avec deux ou trois boutons extérieurs, mobiles sur leur axe, ayant chacun sur la circonférence les 25 lettres de l'alphabet. Or, pour que la clé fonctionne, il faut que la lettre choisie à chaque bouton soit amenée sur un point de repère ; les lettres ainsi disposées forment alors un mot qu'on appelle *le secret* de la serrure Ce mot, composé de 2 ou 3 lettres, peut être changé à volonté au moyen d'une opération très-simple.

Cela posé, la solution du problème n'est plus qu'une application du nº 293, dans lequel nous avons donné la formule des arrangements avec répétition.

En effet, les deux boutons fournissent $(25)^2 = 625$ groupes de 2 lettres ; avec 3 boutons on aura $(25)^3 = 15625$ groupes de 3 lettres. Parmi ces groupes, il est facile de trouver un grand nombre de mots ou d'initiales de noms propres.

300. Problème IV. *Au jeu de piquet, on a* 32 *cartes ; on en donne* 12 *à chaque joueur et on en laisse*

8 au talon ; on demande les jeux différents que l'on peut ainsi obtenir.

La distribution indiquée fournit en réalité 3 tas ; le premier tas, de 12 cartes, est une des combinaisons 12 à 12 des 32 cartes ; il reste 20 cartes. Les deux autres tas appartiennent à l'une des combinaisons 12 à 12 ou 8 à 8 (ce qui revient au même) des 20 cartes restantes ; or, chacune de ces dernières combinaisons peut se combiner avec toutes les combinaisons du premier tas, d'où il suit que pour avoir les jeux différents demandés, il faut multiplier le nombre des combinaisons du premier groupe par le nombre des combinaisons du second ; on posera donc

$$\frac{32.31.30.29\ldots23.22.21}{1.2.3.4\ldots10.11.12}\times\frac{20.19.18\ldots14.13}{1.2.3\ldots7.8};$$

ce qui donne le nombre 28443124054800.

QUESTIONNAIRE.

Qu'entend-on par « Combinaisons » ? (287)
Qu'appelle-t-on « Permutations » ? (288)
Donnez la formule générale ? (288)
Qu'appelle-t-on « Arrangements » ? 289—291)
Donnez la formule générale. (292)
Qu'appelle-t-on spécialement « Combinaisons » ? (294)
Quelle est la formule générale ? (297)
Donnez quelques exemples. (299... 301)

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUR LES COMBINAISONS.

146. De combien de manières peut-on distribuer 21 objets en tas de 6 et de 15 ?

147. On demande le nombre total des combinaisons 2 à 2, 3 à 3, etc..., 6 à 6 qu'on peut former avec les 7 couleurs primitives du spectre solaire (sans avoir égard aux nuances infinies qu'on obtient, en faisant varier les proportions relatives de ces couleurs).

148. Calculer le nombre de coups différents qu'on peut amener au jeu de dés : 1° avec un dé ; 2° avec deux dés ; 3° avec trois dés, etc..., et, en général, avec n dés.

149. Quels sont les mots français qu'on peut former avec les cinq lettres qui composent le nom de **MARIE** ?

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGÈBRE.

ADDITION.

13. $(7a - 6b) + (5a^2 - b^3 + c)$.

14. $13am^2 - 9a^2m + a^3 + 7a^2m^2 + 5am^2 - a^2b$.

Puis faisant la réduction des termes semblables $18am^2 - 9a^2m + a^3 + 7a^2m^2 - a^2b$.

15. Disposant les termes semblables les uns au-dessous des autres : (nº 35).

$$\begin{array}{lr} & 4y + 3ab + 4c + x + x^2 + d \\ & -2y + 5ab - 3c + x \\ & -2y \\ & -y \\ \hline \text{Somme} & -y + 8ab + c + 2x + x^2 + d. \end{array}$$

16. $(a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b})$ ou bien $2a$.

17. La *somme algébrique* de ce qui reste dans la bourse est $a + b - c$.

18. $x + 5a - b + 3c$.

SOUSTRACTION.

19. On change les signes de la quantité à soustraire ; la quantité $7a - 5b$ devient $-7a + 5b$ et l'on a

$$\begin{array}{lr} & 9a + 3b - c \\ & -7a + 5b \\ \hline \text{Différence algébrique} & 2a + 8b - c \end{array}$$

20. $5a^2 - 2a - 3a^2 + 8a + 4$, et après réduction des termes semblables, l'on a $2a^2 + 6a + 4$.

21. $6m^3 - 12n^2 + 7n + 5\frac{3}{4}$.

22. $x - 13$

23. $s - x$

24. $4x^2 - 7x + 6$

25. $6a^2 - 4a + 3b - 4$

26. $-y^2 - 0 + 4a$

MULTIPLICATION.

27. $126a^4\ b^3\ c\ d\ m$

28. $56a^3\ b^3\ c\ x\ y$

29. $60a^2\ b^2\ m\ x^3$.

30. $-105\ a^2\ b^2\ c\ d$

31. $-91\ a^4\ b^2$

32. $56a^2 - 21ab + 35ac$.

33. $2a^4 - 10a^3\ b + 6a^2\ b^2 - 2a\ b^3$

34. $a^6 - a^4b + a^2\ b^2 - a^4 + a^2b - b^2$.

$6a^4 + 10a^4b + a^3b - 14a^3b^2 + 9a^3b + 3\frac{1}{2}a^2b^3 + 3a^2b^3 + \frac{1}{2}\ ab^4$.

$a^6b + a^5б^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^4 + ab^6$

35. $(x - y)\ (x + y)$.

36. $(10 - 4)\ (10 + 4.)$

DIVISION.

37. $8a^2b^2$.

38. $-5ab^2$ ou $-5ab^2c^0$.

39. $-4a^3b^2c^3$ ou $4a^3b^2c^3x^0$.

40. $7a^4b^4x^2$ ou $7a^4b^4c^0x^2$.

41.
$$\begin{array}{l|l}
12x^5-13x^4-34x^3+39x^2 & 4x^2-7x \\
\underline{12x^5-21x^4} & \overline{3x^3+2x^2-5x+\frac{4x^2}{4x^2-7x}} \\
\quad 0+8x^4-34x^3 & \\
\quad \underline{+8x^4-14x^3} & \\
\qquad 0-20x^3+39x^2 & \\
\qquad \underline{-20x^3+35x^2} & \\
\qquad\quad 0+4x^2 &
\end{array}$$

42.
$$\begin{array}{l|l}
x^4-\frac{4}{3}x^3+1\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x & x^2-\frac{1}{2}x \\
\underline{x^4-\frac{1}{2}x^3} & \overline{x^2-\frac{4}{3}x+1} \\
0-\frac{4}{3}x^3+1\frac{1}{6}x^2 & \\
\underline{-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{6}x^2} & \\
0 \quad +x^2-\frac{1}{2}x & \\
\quad \underline{+x^2-\frac{1}{2}x} & \\
\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

43. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

44. — à l'unité, $a^0=1, b^0=1$.

45. $\dfrac{2+x^2}{3}$

46. $\frac{1}{8}$

FRACTIONS.

47. $\dfrac{anp}{bnp}$ $\dfrac{bmp}{bnp}$ $\dfrac{bnx}{bnp}$.

48. Réduire $\dfrac{2x}{3}$ $\dfrac{5x}{b}$ et $\dfrac{4a}{5}$ à un dénominateur commun.

$$\left.\begin{array}{l} 2x\times b\times 5=10bx \\ 5x\times 9\times 5=75x \\ 4a\times 3\times b=12ab \end{array}\right\}$$ nouveaux numérateurs ;

$3\times 5\times 5=15b$ com. dénominateur ;

D'où les fractions demandées sont $\dfrac{10bx}{15b}$, $\dfrac{75x}{15b}$, $\dfrac{12ab}{15b}$.

49. Soit $\frac{2x + 1}{5}$ et $\frac{3x}{4}$, à réduire à un com. dénominateur.

Ici $\left.\begin{array}{r} (2x + 1) \times 4 = 8x + 4 \\ 3x \times 5 = 15x \end{array}\right\}$ nouveaux numérateurs ;

$5 \times 4 = 20$ com. dénominateur ;

D'où $\frac{8x + 4}{20}$ et $\frac{15x}{20}$.

50. Soit $\frac{14x^3 + 7ax + 21x^2}{35x^2}$ à réduire à sa plus simple expression.

Le coefficient de chaque terme du numérateur et du dénominateur de cette fraction est divisible par 7, et la lettre x se rencontre aussi dans chaque terme ; donc $7x$ divisera le numérateur et le dénominateur sans reste.

D'où la fraction réduite à sa plus simple expression est $\frac{2x^2 + a + 3x}{5x}$.

51. Ajouter les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{3b}$, $\frac{5b}{4a}$.

$$\left.\begin{array}{r} a \times 3b \times 4a = 12a^2b \\ 2a \times b \times 4a = 8a^2b \\ 5b \times b \times 3b = 15b^3 \\ \hline b \times 3b \times 4a = 12ab^2 \end{array}\right\} \therefore \frac{12a^2b + 8a^2b + 15b^3}{12ab^2} = \frac{20a^2b + 15b^3}{12ab^2}$$

$= \text{(divisant par } b) \; \frac{20a^2 + 15b^3}{12ab}$ la somme demandée.

52. $\frac{a + bx}{b}$

53. $\frac{7c}{d}$

54. $\frac{a\,c}{b\,c\,d}$

55. $\frac{3ax - 5a}{4x^2 - 6}$

56. $\dfrac{5a^4d - 25d - 5a^4c + 25c}{5a^3c + 25c - 5a^3d + 25d}$

Ou $\dfrac{(d - c)(5a^4 - 25)}{(c - d)(5a^3 + 25)}$

ÉQUATIONS (1er DEGRÉ).

57. En transposant les termes -7 et $3x$, on obtient d'abord

$$5x - 3x = 9 + 7,$$

et en simplifiant cette dernière, on aura

$$2x = 16, \text{ d'où } x = \frac{16}{2} = 8.$$

Vérification. En substituant à la place de x sa valeur 8 dans l'équation proposée, on obtient

$$5.8 - 7 = 3.8 + 9, \text{ ou } 40 - 7 = 24 + 9$$

ou enfin, $33 = 33$, identité qui prouve la vérité de la solution trouvée $x = 8$.

58. $x = 5$.
59. $x = 6$.
60. $x = 12$.
61. $x = 6$.
62. $x = 24$.
63. $x = 60$.

MISE EN ÉQUATION.

64. Il convient de représenter par x le nombre des cavaliers, et alors le nombre des artilleurs sera $3x$, et celui des fantassins, etc. (Rép. 200 cav , 600 art., 1800 fant.)

65. x représentant le prix de l'habit, $200 + x$ sont les gages de l'année ou de 12 mois, $160 + x$

ceux de 10 mois; on aura donc, etc. (Rép. 40 piastres.)

66. (404, 424, 472 piastres).

67. Dans x années le père aura $49 + x$, et le fils $11 + x$; donc, etc. (Rép. 8 ans.)

68. 8100 piastres et 9 enfants.

GÉNÉRALISATION.

69.	37.	**72.**	372.
70.	13,5.	**73.**	12.
71.	165.	**74.**	32 et 45.

75. On représente par n le nombre proposé, par a et b les diviseurs et par c la somme des quotients; alors, en désignant par x l'une des parties, l'autre sera $n - x$, et l'on posera l'équation du problème. Cette équation résolue donnera, pour les parties demandées, les expressions suivantes :

$$\text{Rép.}\quad \frac{a\,(bc - n)}{b - a} \quad \text{et} \quad \frac{b\,(n - ac)}{b - a}.$$

76. Remarquons ici que la vitesse du premier courrier est $\frac{23}{2}$, celle du second $\frac{42}{3}$, et que le premier est en avance de $\frac{23}{2} \times 9 = 103\,\frac{1}{2}$ milles. (Rép. 349 m. $\frac{3}{4}$.)

77. Dans ce genre de problèmes il y a deux espèces d'unités, et les nombres qui s'y rapportent ne peuvent entrer dans une équation qu'après avoir été ramenés à une même espèce. En conséquence nous représenterons par x les sauts du lévrier demandés, nous chercherons le nombre de sauts du renard, et nous comparerons ensuite ces deux nombres à leur valeur respective. Or, puisque le renard fait neuf sauts pendant que le lévrier en fait six, lorsque ce dernier en fait x le renard en fera un nombre marqué par

$$\frac{9}{6}x, \text{ ou bien } \frac{3}{2}x;$$

mais le renard avait 60 sauts d'avance, ainsi il fera en tout $60 + \frac{3}{2}x$ sauts pour parcourir l'espace que le lévrier fait en x sauts. Ces deux nombres de sauts, bien que mesurant la même distance, sont rapportés à des unités différentes et ne peuvent ainsi fournir une équation ; mais si l'on se rappelle que 3 sauts du lévrier valent 7 sauts du renard, on verra que le nombre x doit être les $\frac{3}{7}$ du nombre $60 + \frac{3}{2}x$, et l'on en déduira l'équation du problème. (Rép. $x = 72$.)

CAS D'IMPOSSIBILITÉ, ... ETC.

88. (Absurde) **89.** (Absurde)

90. De -1, c'est-à-dire qu'il faut diminuer chaque terme de 1.

91. C'était il y a cinq ans.

92. Le père avait 23 ans et le fils devait naître dans un an, (1801).

93. (Absurde).

DISCUSSION DES FORMULES ALGÉBRIQUES.

94. Pour la discussion de cette formule, on prend pour modèle la *discussion* du chapitre IV (134...) et on développe la formule...

ANALYSE INDÉTERMINÉE (1er DEGRÉ)

95. De deux manières : pièces de 20 francs,, 34 ou 8 ; pièces de 40 fr., 11 ou 32.

96. De 20 manières.

$x =$	12,	15,	18,	21,	1,	4,	7,	10,	13,	16.
$y =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
$z =$	23,	17,	11,	5,	36,	30,	24,	18,	12,	6.
$x =$	2,	5,	8,	11,	14,	3,	6,	9,	1,	4.
$y =$	13,	14,	15,	16,	17,	21,	22,	23,	28,	29.
$z =$	25,	19,	13,	7,	1,	14,	8,	2,	9,	3.

97. Il y avait 30 Rhétoriciens et 5 Philosophes, ou 22 R. et 12 P., ou 14 R. et 19 P. ou enfin 6 R. et 26 P.

98. Nombre des œufs de la 1ère : 63, ‖ 23
" " " " " 2de : 37, ‖ 79.

EQUATIONS A DEUX TERMES

101. $x = \pm 7$.

102. $x^2 = 13{,}5\ldots$ et $x = \pm 3.6722$.

103. $x = \pm 2.309$

104. $x = \pm \sqrt{6 - a^2}$.

105. $x = \pm \dfrac{a}{b}$

EQUATIONS DU 2e DEGRÉ.

106. $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

107. $x = \pm \sqrt{\dfrac{a}{b(m-n)}}$

108. $x' = 8$; $x'' = -2{,}25$.

109. $x' = 5$; $x'' = -4\frac{1}{3}$.

110. $x' = 2$; $x'' = -\dfrac{4}{3}$

111. 18. 112. 3m, 48.

113. 5 secondes, 2 tierces.

114. 207 mètres.

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

115. $x = \sqrt{a}$ 116. $x = a$

117. $\dfrac{a}{2} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{4}$

118. Le carré inscrit.

PROGRESSIONS.

119. 46. 120. $7\frac{1}{2}$.

121. $\div$ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20.

122. $\div$ 3 . 4,4 . 5,8 . 7,2 . 8,6 . 10,0 . 11,4 . 12,8 . 14,2 . 15,6 . 17,0... etc.

123. 36.

124. $\because\div$ 3 . 15 . 75 . 375.

125. 155. 126. 510.

127. La raison est 1,011,

128. Le 15^{me} mètre 11 fr. 15, le tout 104 fr. 25.

129. 42949672 fr. 95.

130. 10 ou bien — 11.

131. Voici le sens que l'on doit attacher à la valeur négative — 11 : comme pour obtenir le nombre 55, il faut prendre, en allant, *vers la droite*, 10 termes (dont le premier est + 1) ainsi, pour obtenir cette même somme absolue 55 en allant *vers la gauche*, il faut prendre, non plus 10, mais 11 termes de la progression. Le premier de ces 11 termes sera 0.

$$-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1 \ldots 0 \ldots 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.$$

132. Il suffit de calculer la raison qui sera la même partout et qui est

$$q = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = 1,08\ldots$$

SUR L'USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES.

133. 4,681241 ; 4,497704 ; 6,680294 ; 10,477700.

134. 1,725912 ; 2,576860 ; 5,410674 ; 0,000029.

135. $\bar{1},795880$; $\bar{2},475802$; $\bar{2},431798$; $\bar{2},045366$.

136. $\log. \dfrac{11}{7} = 0,196295$; $\log. \dfrac{156}{36} = 0,636822$.

$$\log \frac{7}{11} = \bar{1},803704 \; ; \; \log. \frac{12}{52} - \bar{1},363177.$$

CALCULS LOGARITHMIQUES.

137. On trouvera le nombre 236608 suivi de 19 zéros.

138. 62.02.

139. 2461.

140. 332974600000000.

141. On trouvera le nombre 296942 suivi de 80 zéros.

142. 19,838.

143. On trouvera le nombre 979957 suivi de 27 zéros.

144. 0.000000000003[illegible]765.

145. ~~[illegible]~~ 0.98756

COMBINAISONS.

146. de 54 264 manières.

147. 126.

148. En général le nombre de coups possibles est exprimé par le nombre 6 des faces de chaque dé, él[illegible] puissance marquée par le nombre de dés [illegible]vés. Ainsi on aura, avec 1 dé ... 6 chances, [illegible] dés ... 6^2 ... avec 3 dés ... 6^3 ... avec *n* dés ... 6^n.

149. On fera tous les arrangements 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3 ... de ces cinq lettres, et l'on trouvera dans le nombre les mots suivants *a*, *ai*, *mi*, *me*, *ri*, *rie*, *mai*, *mer*, *mie*, *ami*, *ame*, *air*, *are*, *ire*, *ira*, *aire*, *mare*, *mari*, *mai*, *mire*, *amie*, *aime*. *arme*, *mira*, *rame*, *raie*, *rime*, *Remi*, *émir*, *maire*, *aimer*.

N. B. On voit par cet exemple que la théorie des combinaisons sert encore à la formation des *anagrammes* et des *logogriphes*.

TABLES DE LOGARITHMES.

LOGARITHMES DES NOMBRES ENTIERS DEPUIS 1 JUSQU'A 10,000, AVEC DIFFÉRENCES TABULAIRES ET PARTIES PROPORTIONNELLES.

Nombres de 1 à 100.

No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.
1	0·000000	21	1·322219	41	1·612784	61	1·785330	81	1·908485
2	0·301030	22	1·342423	42	1·623249	62	1·792392	82	1·913814
3	0·477121	23	1·361728	43	1·633468	63	1·799341	83	1·919078
4	0·602060	24	1·380211	44	1·643453	64	1·806180	84	1·924279
5	0·698970	25	1·397940	45	1·653213	65	1·812913	85	1·929419
6	0·778151	26	1·414973	46	1·662758	66	1·819544	86	1·934498
7	0·845098	27	1·431364	47	1·672098	67	1·826075	87	1·939519
8	0·903090	28	1·447158	48	1·681241	68	1·832509	88	1·944483
9	0·954243	29	1·462398	49	1·690196	69	1·838849	89	1·949390
10	1·000000	30	1·477121	50	1·698970	70	1·845098	90	1·954243
11	1·041393	31	1·491362	51	1·707570	71	1·851258	91	1·959041
12	1·079181	32	1·505150	52	1·716003	72	1·857332	92	1·963788
13	1·113943	33	1·518514	53	1·724276	73	1·863323	93	1·968483
14	1·146128	34	1·531479	54	1·732394	74	1·869232	94	1·973128
15	1·176091	35	1·544068	55	1·740363	75	1·875061	95	1·977724
16	1·204120	36	1·556303	56	1·748188	76	1·880814	96	1·982271
17	1·230449	37	1·568202	57	1·755875	77	1·886491	97	1·986772
18	1·255273	38	1·579784	58	1·763428	78	1·892095	98	1·991226
19	1·278754	39	1·591065	59	1·770852	79	1·897627	99	1·995635
20	1·301030	40	1·602060	60	1·778151	80	1·903090	100	2·000000

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	100	000000	000434	000868	001301	001734	002166	002598	003029	003461	003891	432
41	1	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
83	2	8600	9026	9451	9876	010300	010724	011147	011570	011993	012415	424
124	3	012837	013259	013680	014100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	420
166	4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	020361	020775	416
207	5	021189	021603	022016	022428	022841	023252	023664	024075	4486	4896	412
248	6	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	408
290	7	9384	9789	030195	030600	031004	031408	031812	032216	032619	033021	404
331	8	033424	033826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	400
373	9	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	040207	040602	040998	397
	110	041393	041787	042182	042576	042069	043362	043755	044148	044540	044932	393
38	1	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	390
76	2	9218	9606	9993	050380	050766	051153	051538	051924	052309	052694	386
113	3	053078	053463	053846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	383
151	4	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	060320	379
189	5	060698	061075	061452	061829	062206	062582	062958	063333	063709	4083	376
227	6	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	373
265	7	8186	8557	8928	9298	9668	070038	070407	070776	071145	071514	370
302	8	071882	072250	072617	072985	073352	3718	4085	4451	4816	5182	366
340	9	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363
	120	079181	079543	079904	080266	080626	080987	081347	081707	082067	082426	360
35	1	082785	083144	083503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004	357
70	2	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	355
104	3	9905	090258	090611	090963	091315	091667	092018	092370	092721	093071	352
139	4	093422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	349
174	5	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	100026	346
209	6	100371	100715	101059	101403	101747	102091	102434	102777	103119	3462	343
244	7	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	341
278	8	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	110253	338
313	9	110590	110926	111263	111599	111934	112270	112605	112940	113275	3609	335
	130	113943	114277	114611	114944	115278	115611	115943	116276	116608	116940	333
32	1	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	120245	330
64	2	120574	120903	121231	121560	121888	122216	122544	122871	123198	3525	328
97	3	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781	325
129	4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	130012	323
161	5	130334	130655	130977	131298	131619	131939	132260	132580	132900	3219	321
193	6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403	318
225	7	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	316
258	8	9879	140194	140508	140822	141136	141450	141763	142076	142389	142702	314
290	9	143015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
	140	146128	146438	146748	147058	147367	147676	147985	148294	148603	148911	309
30	1	9219	9527	9835	150142	150449	150756	151063	151370	151676	151982	307
60	2	152288	152594	152900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
90	3	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
120	4	8362	8664	8965	9266	9567	9868	160168	160469	160769	161068	301
150	5	161368	161667	161967	162266	162564	162863	3161	3460	3758	4055	299
180	6	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
210	7	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
240	8	170262	170555	170848	171141	171434	171726	172019	172311	172603	172895	293
270	9	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
	150	176091	176381	176670	176959	177248	177536	177825	178113	178401	178689	289
28	1	8977	9264	9552	9839	180126	180413	180699	180986	181272	181558	287
56	2	181844	182129	182415	182700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
84	3	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
112	4	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	190051	281
140	5	190332	190612	190892	191171	191451	191730	192010	192289	192567	2846	279
168	6	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
196	7	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
224	8	8657	8932	9206	9481	9755	200029	200303	200577	200850	201124	274
252	9	201397	201670	201943	202216	202488	2761	3033	3305	3577	3848	272

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	160	204120	204391	204663	204934	205204	205475	205746	206016	206286	206556	271
26	1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
53	2	9515	9783	210051	210319	210586	210853	211121	211388	211654	211921	267
79	3	212188	212454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
105	4	4811	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
132	5	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
158	6	220108	220370	220631	220892	221153	221414	221675	221936	222196	222456	261
184	7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
210	8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
237	9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	230193	256
	170	230449	230704	230960	231215	231470	231724	231979	232234	232488	232742	254
25	1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
50	2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
71	3	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	240050	240300	250
99	4	240519	240799	241048	241297	241546	241795	242044	242293	2541	2790	249
124	5	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
149	6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
171	7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	250176	245
198	8	250420	250664	250908	251151	251395	251638	251881	252125	252368	2610	243
223	9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
	180	255273	255514	255755	255996	256237	256477	256718	256958	257198	257439	241
24	1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
47	2	260071	260310	260548	260787	261025	261263	261501	261739	261976	262214	238
71	3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
94	4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
118	5	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
141	6	9513	9746	9980	270213	270446	270679	270912	271144	271377	271609	233
165	7	271842	272074	272306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
188	8	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
212	9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
	190	278754	278982	279211	279439	279667	279895	280123	280351	280578	280806	228
22	1	281033	281261	281488	281715	281942	282169	2396	2622	2849	3075	227
45	2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
67	3	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
89	4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223
112	5	290035	290257	290480	290702	290925	291147	291369	291591	291813	292034	222
134	6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
156	7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
178	8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
201	9	8853	9071	9289	9507	9725	9943	300161	300378	300595	300813	218
	200	301030	301247	301464	301681	301898	302114	302331	302547	302764	302980	217
21	1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
42	2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
64	3	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
85	4	9630	9843	310056	310268	310481	310693	310906	311118	311330	311542	212
106	5	311754	311966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	241
127	6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
148	7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
170	8	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
191	9	320146	320354	320562	320769	320977	321184	321391	321598	321805	322012	207
	210	322219	322426	322633	322839	323046	323252	323458	323665	323871	324077	206
20	1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
40	2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
61	3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	330008	330211	203
81	4	330414	330617	330819	331022	331225	331427	331630	331832	2034	2236	202
101	5	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
121	6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
141	7	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
162	8	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	340047	340246	199
182	9	340444	340642	340841	341039	341237	341435	341632	341830	2028	2225	198

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	220	342423	342620	342817	343014	343212	343409	343606	343802	343999	344196	197
19	1	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
39	2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
58	3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	350054	194
77	4	350248	350442	350636	350829	351023	351216	351410	351603	351796	1989	193
97	5	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
116	6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
135	7	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
154	8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
174	9	9835	360025	360215	360404	360593	360783	360972	361161	361350	361539	189
	230	361728	361917	362105	362294	362482	362671	362859	363048	363236	363424	189
19	1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
37	2	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
56	3	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
74	4	9216	9401	9587	9772	9958	370143	370328	370513	370698	370883	185
93	5	371068	371253	371437	371622	371806	1991	2175	2360	2544	2728	184
1,11	6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
130	7	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
148	8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
167	9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	380030	181
	240	380211	380392	380573	380754	380934	381115	381296	381476	381656	381837	181
18	1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
35	2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
53	3	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
71	4	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
89	5	9166	9343	9520	9698	9875	390051	390228	390405	390582	390759	177
106	6	390935	391112	391288	391464	391641	1817	1993	2169	2345	2521	176
124	7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
142	8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
159	9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
	250	397940	398114	398287	398461	398634	398808	398981	399154	399328	399501	173
17	1	9674	9847	400020	400192	400365	400538	400711	400883	401056	401228	173
34	2	401401	401573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
51	3	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
68	4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
85	5	6540	6710	6881	7051	7221	7392	7561	7731	7901	8070	170
102	6	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
119	7	9933	410102	410271	410440	410609	410777	410946	411114	411283	411451	169
136	8	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
153	9	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
	260	414973	415140	415307	415474	415641	415808	415974	416141	416308	416474	167
16	1	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
33	2	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791	165
49	3	9956	420121	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	165
66	4	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
82	5	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
98	6	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
115	7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
131	8	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
148	9	9752	9914	430075	430236	430398	430559	430720	430881	431042	431203	161
	270	431364	431525	431685	431846	432007	432167	432328	432488	432649	432809	161
16	1	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
32	2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
47	3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	159
63	4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
79	5	9333	9491	9648	9806	9964	440122	440279	440437	440594	440752	158
95	6	440909	441066	441224	441381	441538	1695	1852	2009	2166	2323	157
111	7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
126	8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
142	9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	280	447158	447313	447468	447623	447778	447933	448088	448242	448397	448552	155
15	1	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	450095	154
31	2	450249	450403	450557	450711	450865	451018	451172	451326	451479	1633	154
46	3	1786	1940	2093	2247	2406	2553	2706	2859	3012	3165	153
61	4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	153
77	5	4845	4997	5150	5302	5454	5608	5758	5910	6062	6214	152
92	6	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
107	7	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
122	8	9392	9543	9694	9845	9995	460148	460296	460447	460597	460748	151
138	9	460898	461048	461198	461348	461499	1649	1799	1948	2098	2248	150
	290	462398	462548	462697	462847	462997	463146	463296	463445	463594	463744	150
15	1	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	149
29	2	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	149
44	3	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	148
59	4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
74	5	9822	9969	470116	470263	470410	470557	470704	470851	470998	471145	147
88	6	471292	471438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	146
103	7	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
118	8	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	146
132	9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
	300	477121	477266	477411	477555	477700	477844	477989	478133	478278	478422	145
14	1	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
29	2	480007	480151	480294	480438	480582	480725	480869	481012	481156	481299	144
43	3	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
57	4	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	143
72	5	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
86	6	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	142
100	7	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
114	8	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	141
129	9	9958	490099	490239	490380	490520	490661	490801	490941	491081	491222	140
	310	491362	491502	491642	491782	491922	492062	492201	492341	492481	492621	140
14	1	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
28	2	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	139
41	3	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	139
55	4	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138
69	5	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	138
83	6	9687	9824	9962	500099	500236	500374	500511	500648	500785	500922	137
97	7	501059	501196	501333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	137
110	8	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	136
124	9	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	136
	320	505150	505286	505421	505557	505693	505828	505964	506099	506234	506370	136
13	1	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
27	2	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
40	3	9203	9337	9471	9606	9740	9874	510009	510143	510277	510411	134
54	4	510545	510679	510813	510947	511081	511215	1349	1482	1616	1750	134
67	5	1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
80	6	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	133
94	7	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	133
107	8	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
121	9	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	132
	330	518514	518646	518777	518909	519040	519171	519303	519434	519566	519697	131
13	1	9828	9959	520090	520221	520353	520484	520615	520745	520876	521007	131
26	2	521138	521269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	131
39	3	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
52	4	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	130
65	5	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
78	6	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	129
91	7	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788	129
104	8	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	530072	128
117	9	530200	530328	530456	530584	530712	530840	530968	531096	531223	1351	128

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	340	531479	531607	531734	531862	531990	532117	532245	532372	532500	532627	128
13	1	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	127
25	2	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	127
38	3	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
50	4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
63	5	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	126
76	6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	540079	540204	125
88	7	540329	540455	540580	540705	540830	540955	541080	541205	1330	1454	125
101	8	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	125
113	9	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124
	350	544068	544192	544316	544440	544564	544688	544812	544936	545060	545183	124
12	1	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	124
24	2	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
37	3	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	123
49	4	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	550106	123
61	5	550228	550351	550473	550595	550717	550840	550962	551084	551206	1328	122
73	6	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	122
85	7	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	121
98	8	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
110	9	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121
	360	556303	556423	556544	556664	556785	556905	557026	557146	557267	557387	120
12	1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	120
24	2	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	120
36	3	9907	560026	560146	560265	560385	560504	560624	560743	560863	560982	119
48	4	561101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	119
60	5	2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	119
71	6	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	119
83	7	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
95	8	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
107	9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
	370	568202	568319	568436	568554	568671	568788	568905	569023	569140	569257	117
12	1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	570076	570193	570309	570426	117
23	2	570543	570660	570776	570893	571010	571126	1243	1359	1476	1592	117
35	3	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
46	4	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	116
58	5	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	116
70	6	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
81	7	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	115
93	8	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	115
104	9	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
	380	579784	579898	580012	580126	580241	580355	580469	580583	530697	580811	114
11	1	580925	581039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	114
23	2	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
34	3	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
45	4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
57	5	5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	113
68	6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
79	7	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
90	8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
102	9	9950	590061	590173	590284	590396	590507	590619	590730	590842	590953	112
	390	591065	591176	591287	591399	591510	591621	591732	591843	591955	592066	111
11	1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
22	2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
33	3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	110
44	4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
55	5	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	110
66	6	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	110
77	7	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
88	8	9883	9992	600101	600210	600319	600428	600537	600646	600755	600864	109
99	9	600973	601082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	108

6	7	8	9	D.
532245	532372	532500	532627	128
3518	3645	3772	3899	127
4787	4914	5041	5167	127
6053	6180	6306	6432	126
7315	7441	7567	7693	126
8574	8699	8825	8951	126
9829	9954	540079	540204	125
541080	541205	1330	1454	125
2327	2452	2576	2701	125
3571	3696	3820	3944	124
544812	544936	545060	545183	124
6049	6172	6296	6419	124
7282	7405	7529	[illegible]	123
8512	8635	8758	8881	123
9739	9861	9984	[illegible]	123
550962	551084	551206	[illegible]	122
2181	2303	2425	2547	122
3398	3519	3640	[illegible]	121
4610	4731	4852	4973	121
5820	5940	6061	[illegible]	121
557026	557146	557267	[illegible]	120
8228	8349	8469	[illegible]	120
9428	9548	9667	[illegible]	120
560624	560743	560863	[illegible]	119
1817	1936	2055	[illegible]	119
3006	3125	3244	[illegible]	119
4192	4311	4429	[illegible]	119
5376	5494	5612	[illegible]	118
6555	6673	6791	[illegible]	118
7732	7849	7967	8084	118
568905	569023	569140	[illegible]	117
570076	570193	570309	[illegible]	117
1243	1359	1476	[illegible]	117
2407	2523	2639	[illegible]	116
3568	3684	3800	[illegible]	116
4726	4841	4957	[illegible]	116
5880	5996	6111	[illegible]	115
7032	7147	7262	[illegible]	115
8181	8295	8410	[illegible]	115
9326	9441	9555	[illegible]	114
580469	580583	530697	580811	114
1608	1722	1836	[illegible]	114
2745	2858	2972	[illegible]	114
3879	3992	4105	[illegible]	113
5009	5122	5235	[illegible]	113
6137	6250	6362	6475	113
7262	7374	7486	[illegible]	112
8384	8496	8608	8720	112
9503	9615	9726	[illegible]	112
590619	590730	590842	590953	112
591732	591843	591955	592066	111
2843	2954	3064	3175	111
3950	4061	4171	4282	111
5055	5165	5276	[illegible]	110
6157	6267	6377	6487	110
7256	7366	7476	[illegible]	110
8353	8462	8572	8681	110
9446	9556	9665	[illegible]	109
600537	600646	600755	600864	109
[illegible]	1734	1843	1951	[illegible]

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	400	602060	602169	602277	602386	602494	602603	602711	602819	602928	603036	108
11	1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
21	2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	108
32	3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	108
43	4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
54	5	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
64	6	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	107
75	7	9594	9701	9808	9914	610021	610128	610234	610341	610447	610554	107
86	8	610660	610767	610873	610979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
96	9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
	410	612784	612890	612996	613102	613207	613313	613419	613525	613630	613736	106
11	1	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	105
21	2	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
32	3	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895	105
42	4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	105
53	5	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	0884	8989	105
63	6	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	620032	104
74	7	620136	620240	620344	620448	620552	620656	620760	620864	620968	1072	104
84	8	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	104
95	9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3043	3146	104
	420	623249	623353	623456	623559	623663	623766	623869	623973	624076	624179	103
10	1	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	103
20	2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	103
31	3	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	103
41	4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
51	5	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
61	6	9410	9513	9613	9715	9817	9919	630021	630123	630224	630326	102
71	7	630428	630530	630631	630733	630835	630936	1038	1139	1241	1342	102
82	8	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
92	9	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	101
	430	633468	633569	633670	633771	633872	633973	634074	634175	634276	634376	101
10	1	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	101
20	2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	100
30	3	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	100
40	4	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389	100
50	5	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	100
60	6	9486	9586	9686	9785	9885	9984	640084	640183	640283	640382	99
70	7	640481	640581	640680	640779	640879	640978	1077	1177	1276	1375	99
80	8	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	99
90	9	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	99
	440	643453	643551	643650	643749	643847	643946	644044	644143	644242	644340	98
10	1	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
20	2	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306	98
29	3	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	98
39	4	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	98
49	5	8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	97
59	6	9335	9432	9530	9627	9724	9821	659919	650016	650113	650210	97
69	7	650308	650405	650502	650599	650696	650793	0890	0987	1084	1181	97
78	8	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	97
88	9	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	97
	450	653213	653309	653405	653502	653598	653695	653791	653888	653984	654080	96
10	1	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4856	4946	5042	96
19	2	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	96
29	3	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	96
38	4	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	96
48	5	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	95
58	6	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	95
67	7	9916	660011	660106	660201	660296	660391	660486	660581	660676	660771	95
77	8	660865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718	95
86	9	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	[illegible]	95

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	460	662758	662852	662947	663041	663135	663230	663324	663418	663512	663607	94
9	1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
19	2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
28	3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
38	4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	[illegible]	94
47	5	7453	7546	7610	7733	7826	7920	8043	8106	8199	8293	93
56	6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8915	9038	9131	9224	93
66	7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	670060	670153	93
75	8	670246	670339	670131	670524	670617	670710	670802	670895	0988	1080	93
85	9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	93
	470	672098	672190	672283	672375	672467	672560	672652	672744	672836	672929	92
9	1	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
18	2	3912	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	92
28	3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
37	4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
46	5	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
55	6	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	91
64	7	8518	8609	8700	8794	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
74	8	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	680063	680154	680215	91
83	9	680336	680426	680517	680607	680698	680789	680879	0970	1060	1151	91
	480	681241	681332	681422	681513	681603	681693	681784	681874	681964	682055	90
9	1	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	90
18	2	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	90
27	3	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	90
36	4	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	90
45	5	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
54	6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7410	89
63	7	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8212	8331	89
72	8	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	89
81	9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	690019	690107	89
	490	690196	690285	690373	690462	690550	690639	690728	690816	690905	690993	89
9	1	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
18	2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	88
26	3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	88
35	4	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	88
44	5	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
53	6	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	87
62	7	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	87
70	8	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	87
79	9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	87
	500	698970	699057	699144	699231	699317	699404	699491	599578	699661	699751	87
9	1	9838	9924	700011	700098	700184	700271	700358	700444	700531	700617	87
17	2	700704	700790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
26	3	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	86
34	4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	86
43	5	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	86
52	6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	86
60	7	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	86
69	8	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	85
77	9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	85
	510	707570	707655	707740	707826	707911	707996	708081	708166	708251	708336	85
8	1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	85
17	2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	710033	85
25	3	710117	710202	710287	710371	710456	710540	710625	710710	710794	0879	85
34	4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	84
42	5	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
50	6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	84
59	7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	84
67	8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	84
76	9	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	84

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	520	716003	716087	716170	716254	716337	716421	716504	716588	716671	716754	83
8	1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7501	7587	83
17	2	7671	7751	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	83
25	3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9218	83
33	4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	720077	83
41	5	720159	720242	720325	720407	720490	720573	720655	720738	720821	0903	83
50	6	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
58	7	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	82
66	8	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	82
75	9	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	82
	530	724276	724358	724440	724522	724604	724685	724767	724849	724931	725013	82
8	1	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	82
16	2	5912	5998	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	82
24	3	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	81
32	4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	81
41	5	8354	8135	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	81
49	6	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	81
57	7	9974	730055	730136	730217	730298	730378	730459	730540	730621	730702	81
65	8	730782	0863	0944	1021	1105	1186	1266	1347	1428	1508	81
73	9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	81
	540	732394	732474	732555	732635	732715	732796	732876	732956	733037	733117	80
8	1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	80
16	2	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	80
24	3	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	80
32	4	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	80
40	5	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	80
48	6	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	79
56	7	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	79
64	8	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	79
72	9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	740047	740126	740205	740284	79
	550	740363	740442	740521	740600	740678	740757	740836	740915	740994	741073	79
8	1	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	79
16	2	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	79
23	3	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
31	4	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	78
39	5	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
47	6	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	78
55	7	5855	5932	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	78
62	8	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	78
70	9	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	78
	560	748188	748266	748343	748421	748498	748576	748653	748731	748808	748885	77
8	1	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	77
15	2	9736	9814	9891	9968	750045	750123	750200	750277	750354	750431	77
23	3	750508	750586	750663	750740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	77
31	4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	77
39	5	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	77
46	6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	77
54	7	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	77
62	8	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036	76
69	9	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	76
	570	755875	755951	756027	756103	756180	756256	756332	756408	756484	756560	76
8	1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	76
15	2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	76
23	3	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	76
30	4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	76
38	5	9668	9743	9819	9894	9970	760045	760121	760196	760272	760347	76
46	6	760422	760498	760573	760649	760724	0799	0875	0950	1025	1101	75
53	7	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	75
61	8	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	75
68	9	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	75

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	580	763428	763503	763578	763653	763727	763802	763877	763952	764027	764101	75
7	1	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	75
15	2	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	75
22	3	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
30	4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	74
37	5	7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	74
44	6	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	74
52	7	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	74
59	8	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	770042	74
67	9	770115	770189	770263	770336	770410	770484	770557	[illegible]	770705	[illegible]	74
	590	770852	770926	770999	771073	771146	771220	771293	[illegible]	[illegible]	771514	74
7	1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	[illegible]	[illegible]	2248	73
15	2	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	[illegible]	2908	2981	73
22	3	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	73
29	4	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	73
37	5	4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	73
44	6	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902	73
51	7	5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	73
58	8	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	73
66	9	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
	600	778151	778224	778296	778368	778441	778513	778585	778658	778730	778802	72
7	1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	72
14	2	9596	9669	9741	9813	9885	9957	780029	780101	780173	780245	72
22	3	780317	780389	780461	780523	780605	780677	0749	0821	0893	0965	72
29	4	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684	72
36	5	1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401	72
43	6	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117	72
50	7	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832	71
58	8	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546	71
65	9	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259	71
	610	785330	785401	785472	785543	785615	785686	785757	785828	785899	785970	71
7	1	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	71
14	2	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390	71
21	3	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098	71
28	4	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804	71
36	5	8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510	71
43	6	9581	9651	9722	9792	9863	9933	790004	790074	790144	790215	70
50	7	790285	790356	790426	790496	790567	790637	0707	0778	0848	0918	70
57	8	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620	70
64	9	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	70
	620	792392	792462	792532	792602	792672	792742	792812	792882	792952	793022	70
7	1	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721	70
14	2	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418	70
21	3	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115	70
28	4	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811	70
35	5	5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505	69
42	6	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198	69
49	7	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890	69
56	8	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582	69
63	9	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272	69
	630	799341	799409	799478	799547	799616	799685	799754	799823	799892	799961	69
7	1	800029	800098	800167	800236	800305	800373	800442	800511	800580	800648	69
14	2	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335	69
21	3	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	69
28	4	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	69
35	5	2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	68
41	6	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	68
48	7	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753	68
55	8	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433	68
62	9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	68

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	640	806180	806248	806316	806384	806451	806519	806587	806655	806723	806790	68
7	1	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	68
13	2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	68
20	3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
27	4	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	67
34	5	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	810031	810098	810165	67
40	6	810233	810300	810367	810434	810501	810569	810636	0703	0770	0837	67
47	7	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	67
54	8	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	67
60	9	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	67
	650	812913	812980	813047	813114	813181	813247	813314	813381	813448	813514	67
7	1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	67
13	2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	67
20	3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	66
26	4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	66
33	5	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	66
40	6	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	66
46	7	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160	66
53	8	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	66
59	9	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	66
	660	819544	819610	819676	819741	819807	819873	819939	820004	820070	820136	66
7	1	820201	820267	820333	820399	820464	820530	820595	0661	0727	0792	66
13	2	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448	66
20	3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	65
26	4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	65
33	5	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	65
39	6	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061	65
46	7	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	65
52	8	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	65
59	9	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	65
	670	826075	826140	826204	826269	826334	826399	826464	826528	826593	826658	65
6	1	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	65
13	2	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951	65
19	3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	64
26	4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	64
32	5	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	64
38	6	9947	830011	830075	830139	830204	830268	830332	830396	830460	830525	64
45	7	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	64
51	8	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	64
58	9	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	64
	680	832509	832573	832637	832700	832764	832828	832892	832956	833020	833083	64
6	1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	64
13	2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	64
19	3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	64
25	4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	63
32	5	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	63
38	6	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	63
44	7	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	63
50	8	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	63
57	9	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	63
	690	838849	838912	838975	839038	839101	839164	839227	839289	839352	839415	63
6	1	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	840043	63
13	2	840106	840169	840232	840294	840357	840420	840482	840545	840608	0671	63
19	3	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	63
25	4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	63
32	5	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
38	6	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	62
44	7	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	62
50	8	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	62
57	9	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	62

6	7	8	9	D.
63877	763952	764027	764101	75
4624	4699	4774	4848	75
5370	5445	5520	5594	75
6115	6190	6264	6338	74
6859	6933	7007	7082	74
7601	7675	7749	7823	74
8342	8416	8490	8564	74
9082	9156	9230	9303	74
9820	9894	9968	770042	74
70557	[illegible]	770705	[illegible]	74
71293	[illegible]	[illegible]	771514	74
2028	[illegible]	[illegible]	2248	73
2762	[illegible]	2908	2981	73
3494	3567	3640	3713	73
4225	4298	4371	4444	73
4955	5028	5100	5173	73
5683	5756	5829	5902	73
6411	6483	6556	6629	73
7137	7209	7282	7354	73
7862	7934	8006	8079	72
78585	778658	778730	778802	72
9308	9380	9452	9524	72
80029	780101	780173	780245	72
0749	0821	0893	0965	72
1468	1540	1612	1684	72
2186	2258	2329	2401	72
2902	2974	3046	3117	72
3618	3689	3761	3832	71
4332	4403	4475	4546	71
5045	5116	5187	5259	71
85757	785828	785899	785970	71
6467	6538	6609	6680	71
7177	7248	7319	7390	71
7885	7956	8027	8098	71
8593	8663	8734	8804	71
9299	9369	9440	9510	71
90004	790074	790144	790215	70
0707	0778	0848	0918	70
1410	1480	1550	1620	70
2111	2181	2252	2322	70
92812	792882	792952	793022	70
3511	3581	3651	3721	70
4209	4279	4349	4418	70
4906	4976	5045	5115	70
5602	5672	5741	5811	70
6297	6366	6436	6505	69
6990	7060	7129	7198	69
7683	7752	7821	7890	69
8374	8443	8513	8582	69
9065	9134	9203	9272	69
99754	799823	799892	799961	69
00442	800511	800580	800648	69
1129	1198	1266	1335	69
1815	1884	1952	2021	69
2500	2568	2637	2705	69
3184	3252	3321	3389	68
3867	3935	4003	4071	68
4548	4616	4685	4753	68
5229	5297	5365	5433	68
5908	5976	6044	6112	68

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	700	845098	845160	845222	845284	845346	845408	845470	845532	845594	845656	62
6	1	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	62
12	2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	62
19	3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	62
25	4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	62
31	5	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	62
37	6	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
43	7	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	61
50	8	850033	850095	850156	850217	850279	850340	850401	850462	850524	850585	61
56	9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	61
	710	851258	851320	851381	851442	851503	851564	851625	851686	851747	851809	61
6	1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	61
12	2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	61
18	3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	61
24	4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	61
31	5	4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	61
37	6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	61
43	7	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	61
49	8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	60
55	9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
	720	857332	857393	857453	857513	857574	857634	857694	857755	857815	857875	60
6	1	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	60
12	2	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	60
18	3	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	60
24	4	9739	9799	9859	9918	9978	860038	860098	860158	860218	860278	60
30	5	860338	860398	860458	860518	860578	0637	0697	0757	0817	0877	60
36	6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
42	7	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	60
48	8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	60
54	9	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	60
	730	863323	863382	863442	863501	863561	863620	863680	863739	863799	863868	59
6	1	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	59
12	2	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	59
18	3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	59
24	4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	59
30	5	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	59
35	6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	59
41	7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	59
47	8	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	59
53	9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	59
	740	869232	869290	869349	869408	869466	869525	869584	869642	869701	869760	59
6	1	9818	9877	9935	9994	870053	870111	870170	870228	870287	870345	59
12	2	870404	870462	870521	870579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	59
17	3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	58
23	4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	58
29	5	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	58
35	6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	58
41	7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	58
46	8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	58
52	9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	58
	750	875061	875119	875177	875235	875293	875351	875409	875466	875524	875582	58
6	1	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	58
12	2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	58
17	3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	58
23	4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	58
29	5	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
35	6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	57
41	7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	57
46	8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	880013	880070	880127	880185	57
52	9	880242	880299	880356	880413	880471	880528	0585	0642	0699	0756	57

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	760	880814	880871	880928	880985	881042	881099	881156	881213	881271	881328	57
6	1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	57
11	2	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	57
17	3	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	57
23	4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	57
29	5	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	57
34	6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	57
40	7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	57
46	8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	57
51	9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
	770	886491	886547	886604	886660	886716	886773	886829	886885	886942	886998	56
6	1	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	56
11	2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	56
17	3	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	56
22	4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	56
28	5	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	56
34	6	9862	9918	9974	890030	890086	890141	890197	890253	890309	890365	56
39	7	890421	890477	890533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	56
45	8	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	56
50	9	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	56
	780	892095	892150	892206	892262	892317	892373	892429	892484	892540	892595	56
6	1	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	56
11	2	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	56
17	3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	55
22	4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	55
27	5	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	55
33	6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	55
38	7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	55
44	8	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	55
49	9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	55
	790	897627	897682	897737	897792	897847	897902	897957	898012	898067	898122	55
5	1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	55
11	2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	55
17	3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	55
22	4	9821	9875	9930	9985	900039	900094	900149	900203	900258	900312	55
27	5	900367	900422	900476	900531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	55
33	6	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	55
38	7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
44	8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	54
49	9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	54
	800	903090	903144	903199	903253	903307	903361	903416	903470	903524	903578	54
5	1	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	54
11	2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	54
16	3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	54
22	4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	54
27	5	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	54
32	6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	54
38	7	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	54
43	8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	54
49	9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	54
	810	908485	908539	908592	908646	908699	908753	908807	908860	908914	908967	54
5	1	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	54
11	2	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	910037	53
16	3	910091	910144	910197	910251	910304	910358	910411	910464	910518	0571	53
21	4	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	53
27	5	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	53
32	6	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	53
37	7	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	53
42	8	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	53
48	9	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	53

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	820	913814	913867	913920	913973	914026	914079	914132	914184	914237	914290	53
5	1	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819	53
11	2	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	53
16	3	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	53
21	4	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	53
27	5	6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	53
32	6	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	53
37	7	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	52
42	8	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	52
48	9	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	52
	830	919078	919130	919183	919235	919287	919340	919392	919444	919496	919549	52
5	1	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	920019	920071	52
10	2	920123	920176	920228	920280	920332	920384	920436	920489	0541	0593	52
16	3	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	52
21	4	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	52
26	5	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	52
31	6	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	52
36	7	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	52
42	8	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	52
47	9	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	52
	840	924279	924331	924383	924434	924486	924538	924589	924641	924693	924744	52
5	1	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	52
10	2	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776	52
15	3	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291	51
20	4	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805	51
26	5	6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319	51
31	6	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832	51
36	7	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345	51
41	8	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857	51
46	9	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368	51
	850	929419	929470	929521	929572	929623	929674	929725	929776	929827	929879	51
5	1	9930	9981	930032	930083	930134	930185	930236	930287	930338	930389	51
10	2	930440	930491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	51
15	3	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	51
20	4	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	51
26	5	1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	51
31	6	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	51
36	7	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	51
41	8	3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	51
46	9	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448	51
	860	934498	934549	934599	934650	934700	934751	934801	934852	934902	934953	50
5	1	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	50
10	2	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	50
15	3	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	50
20	4	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	50
25	5	7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	50
30	6	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	50
35	7	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	50
40	8	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	50
45	9	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	50
	870	939519	939569	939619	939669	939719	939769	939819	939869	939918	939968	50
5	1	940018	940068	940118	940168	940218	940267	940317	940367	940417	940467	50
10	2	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	50
15	3	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	50
20	4	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	50
25	5	2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455	50
30	6	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950	50
35	7	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	49
40	8	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3792	3841	3890	3939	49
45	9	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433	49

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	880	944483	944532	944581	944631	944680	944729	944779	944828	944877	944927	49
5	1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	49
10	2	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	49
15	3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	49
20	4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	49
25	5	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	49
29	6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	49
34	7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	49
39	8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	49
44	9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	49
	890	949390	949439	949488	949536	949585	949634	949683	949731	949780	949829	49
5	1	9878	9926	9975	950024	950073	950121	950170	950219	950267	950316	49
10	2	950365	950414	950462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	49
15	3	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	49
20	4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	49
24	5	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
29	6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	48
34	7	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	48
39	8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	48
44	9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	48
	900	954243	954291	954339	954387	954435	954484	954532	954580	954628	954677	48
5	1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	48
10	2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
14	3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	48
19	4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	48
24	5	6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	48
29	6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	48
34	7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	48
38	8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	48
43	9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	48
	910	959041	959089	959137	959185	959232	959280	959328	959375	959423	959471	48
5	1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	48
9	2	9995	960042	960090	960138	960185	960233	960281	960323	960376	960423	48
14	3	960471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	48
19	4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	47
24	5	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	47
28	6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	47
33	7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	47
38	8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	47
42	9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	47
	920	963788	963835	963882	963929	963977	964024	964071	964118	964165	964212	47
5	1	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	47
9	2	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	47
14	3	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	47
19	4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	47
23	5	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	47
28	6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	47
33	7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	47
38	8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	47
42	9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	47
	930	968483	968530	968576	968623	968670	968716	968763	968810	968856	968903	47
5	1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	47
9	2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	47
14	3	9882	9928	9975	970021	970068	970114	970161	970207	970254	970300	47
18	4	970347	970393	970440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	46
23	5	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	46
28	6	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	46
32	7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	46
37	8	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	46
41	9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	46

PP	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
	940	973128	973174	973220	973266	973313	973359	973405	973451	973497	973543	46
5	1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	46
9	2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	46
14	3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	46
18	4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	46
23	5	5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	46
28	6	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304	46
32	7	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763	46
37	8	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	46
41	9	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	46
	950	977724	977769	977815	977861	977906	977952	977998	978043	978089	978135	46
5	1	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	46
9	2	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	46
14	3	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	46
18	4	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	46
23	5	980003	980049	980094	980140	980185	980231	980276	980322	980367	980412	45
27	6	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	45
32	7	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	45
36	8	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	45
41	9	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	45
	960	982271	982316	982362	982407	982452	982497	982543	982588	982633	982678	45
5	1	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	45
9	2	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	45
14	3	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	45
18	4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	45
23	5	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	45
27	6	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	45
32	7	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	45
36	8	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	45
41	9	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	45
	970	986772	986817	986861	986906	986951	986996	987040	987085	987130	987175	45
5	1	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	45
9	2	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	45
14	3	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	45
18	4	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	45
23	5	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	45
27	6	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	44
32	7	9895	9939	9983	990028	990072	990117	990161	990206	990250	990294	44
36	8	990339	990383	990428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	44
41	9	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	44
	980	991226	991270	991315	991359	991403	991448	991492	991536	991580	991625	44
4	1	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	44
9	2	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	44
13	3	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	44
18	4	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	44
22	5	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	44
26	6	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	44
31	7	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	44
35	8	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	44
40	9	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	44
	990	995635	995679	995723	995767	995811	995854	995898	995942	995986	996030	44
4	1	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	44
9	2	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	44
13	3	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	44
18	4	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	44
22	5	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	44
26	6	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	44
31	7	8695	8739	8782	8825	8869	8913	8956	9000	9043	9087	44
35	8	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	44
40	9	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	44

TABLE DES MATIÈRES.

N. B. Les chiffres qui ne sont pas entre parenthèses, renvoient au paragraphe et non à la page.

Chapitre premier Addition Soustraction.

(page 16)

Réduction des termes semblables

(page 21)

Multiplication

(page 26)

Soustraction.

mblables

Quelques formules fréquemment employées

(page 32)

Division algébrique

(page 34)

De l'exposant zéro et de l'exposani négatif

(page 40)

Fractions Algébriques.

(page 42)

Chapitre II — Des équations — Equation du premier degré á une seule inconnue.

(page 49)

Résolution des équations du 1er degré à une seule inconnue.

(page 53)

Mise en équation.

(page 57)

Généralisation d'un problème.

Chapitre III.—Résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

(page 67)

Problèmes déterminés à plus de deux inconnues.

(page 72)

Formules générales pour les problèmes du 1er degré à deux inconnues.

(page 76.)

Chapitre IV — Interprétation des divers résultats auxquels peut conduire la résolution des équations.—Discussion des problèmes.

(page 81)

Discussion des problèmes et des formules algébriques

(page 88)

Chapitre V, — Alanyse indéterminée du premier degré

(page 94)

Chapitre VI, — Carré et racine carrée des quantités algébriques

(page 110)

Extraction de la racine carrée

(page 111)

Chapitre VII. — Résolution des équations et des problèmes du deuxième degré à une seule inconnue.

Résolution des équations complètes du second degré.

Problèmes du 2d degré.

Des équations bi-carrées.

Questions de Maximum et Minimum.

Chapitre VIII.—Rapports, proportions, progressions.

(page 141)

Des progressions.

(page 146)

Propriétés des progressions arithmétiques.

(page 147)

Propriétés des progressions géométriques.

(page 151)

Chapitre IX.—Des Logarithmes.

Propriétés des logarithmes.

(page 160)

Des logarithmes vulgaires

(page 162)

Disposition des tables

(page 167)

Usage des tables

(page 171)

Approximation dans les calculs des logarithmes

(page 183)

Emploi des logarithmes.

(page 184)

Chapitre X.—Intérêts composés.

(page 193)

Chapitre XI.—Des Combinaisons.

(page 200)

Solution des exercices et problèmes.

composés.

inaisons.

t problèmes.