Technical and Bibliographic Notes / Notes techniques et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming are checked below.

- [ ] Coloured covers / Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged / Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated / Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing / Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps / Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black) / Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations / Planches et/ou illustrations en couleur
- [ ] Bound with other material / Relié avec d'autres documents
- [ ] Only edition available / Seule édition disponible
- [ ] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin / La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure.
- [ ] Blank leaves added during restorations may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming / Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.
- [ ] Additional comments / Commentaires supplémentaires:

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modification dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

- [ ] Coloured pages / Pages de couleur
- [ ] Pages damaged / Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated / Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed / Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached / Pages détachées
- [x] Showthrough / Transparence
- [x] Quality of print varies / Qualité inégale de l'impression
- [ ] Includes supplementary material / Comprend du matériel supplémentaire
- [ ] Pages wholly or partially obscured by errata slips, tissues, etc., have been refilmed to ensure the best possible image / Les pages totalement ou partiellement obscurcies par un feuillet d'errata, une pelure, etc., ont été filmées à nouveau de façon à obtenir la meilleure image possible.
- [ ] Opposing pages with varying colouration or discolourations are filmed twice to ensure the best possible image / Les pages s'opposant ayant des colorations variables ou des décolorations sont filmées deux fois afin d'obtenir la meilleure image possible.

This item is filmed at the reduction ratio checked below /
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10x		14x		18x		22x		26x		30x	
	12x		16x		20x ✓		24x		28x		32x

toriques

1	2	3

1	2	
4	5	

ced thanks

quality
legibility
n the

are filmed
ing on
d impres-
te. All
ng on the
npres-
a printed

iche
"CON-
END"),

d at
ge to be
ned
left to
s as
te the

L'exemplaire filmé fut reproduit grâce à la générosité de:

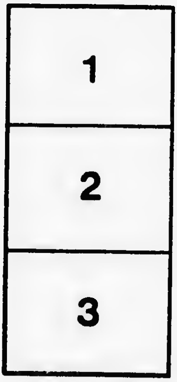
Bibliothèque générale,
Université Laval,
Québec, Québec.

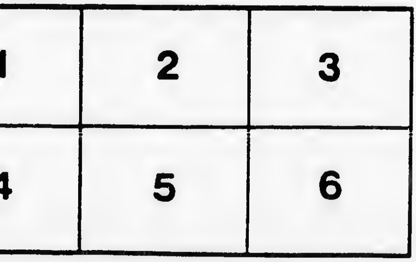
Les images suivantes ont été reproduites avec le plus grand soin, compte tenu de la condition et de la netteté de l'exemplaire filmé, et en conformité avec les conditions du contrat de filmage.

Les exemplaires originaux dont la couverture en papier est imprimée sont filmés en commençant par le premier plat et en terminant soit par la dernière page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration, soit par le second plat, selon le cas. Tous les autres exemplaires originaux sont filmés en commençant par la première page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration et en terminant par la dernière page qui comporte une telle empreinte.

Un des symboles suivants apparaîtra sur la dernière image de chaque microfiche, selon le cas: le symbole —► signifie "A SUIVRE", le symbole ▼ signifie "FIN".

Les cartes, planches, tableaux, etc., peuvent être filmés à des taux de réduction différents. Lorsque le document est trop grand pour être reproduit en un seul cliché, il est filmé à partir de l'angle supérieur gauche, de gauche à droite, et de haut en bas, en prenant le nombre d'images nécessaire. Les diagrammes suivants illustrent la méthode.





MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART

(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

1.0 2.8 2.5 4.5 5.0 3.2 2.2 5.6 6.3 3.6 7.1 2.0 8.0 4.0 9.0 1.1 1.8 1.25 1.4 1.6

ÉL

PREMIER LIVRE

DES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

D'EUCLIDE,

A L'USAGE DES ÉTUDIANTS AU

COLLÉGE NAUTIQUE DU CANADA.

TYPOGRAPHIE DE E. R. FRÉCHETTE,
18, RUE LA MONTAGNE, BASSE-VILLE.

1853.

LE

Un

Le

La
poin

U

L

S
ma
la s

da

LES ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

I.

Le point est ce qui n'a aucune partie.

II.

Une ligne est une longueur sans largeur.

III.

Les extrémités d'une ligne sont des points.

IV.

La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

V.

Une surface est ce qui a longueur et largeur seulement.

VI.

Les extrémités d'une surface sont des lignes.

VII.

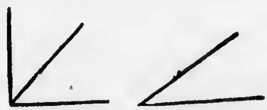
Si la droite qui joint deux points dans une surface, de quelque manière qu'ils soient pris, s'applique exactement sur cette surface, la surface s'appelle surface plane.

VIII.

Un angle plan est l'inclinaison de deux lignes qui se rencontrent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

IX.

Lorsque les lignes qui comprennent un angle sont des lignes droites, l'angle s'appelle RECTILIGNE.



X.

Lorsqu'une droite tombant sur une droite, fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est DROIT ; la droite qui tombe est dite PERPENDICULAIRE à l'égard de celle sur laquelle elle tombe.

XI.

L'angle OBTUS est celui qui est plus grand qu'un angle droit.

XII.

L'angle AIGU est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

XIII.

On appelle LIMITE ce qui est l'extrémité de quelque chose.

XIV.

On appelle FIGURE ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

XV.

Un CERCLE est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on appelle CIRCONFERENCE, et qui est telle que toutes les droites menées à la circonférence d'un certain point placé dans cette figure, sont égales entr'elles.

XVI.

Ce point se nomme le CENTRE du cercle.

XVII.

Le DIAMETRE du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de l'un et de l'autre côté par la circonférence.

XVIII.

Un DEMI-CERCLE est la figure comprise entre le diamètre et la portion de la circonférence qui est sous-tendue par le diamètre.

XIX.

Le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

XX.

Les FIGURES RECTILIGNES sont celles qui sont terminées par des droites.

XXI.

On appelle TRILATÈRES ou TRIANGLES les figures terminées par *trois* droites.

XXII.

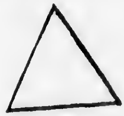
On appelle QUADRILATÈRES celles qui sont terminées par *quatre* droites.

XXIII.

On appelle MULTILATÈRES celles qui sont terminées par *plus de quatre* droites.

XXIV.

Parmi les figures trilatères, celle qui est terminée par *trois côtés égaux* se nomme TRIANGLE ÉQUILATÈRAL.



XXV.

Celle qui a seulement *deux côtés égaux* se nomme TRIANGLE ISOCÈLE.

XXVI.

Celle dont tous les côtés sont *inégaux* se nomme TRIANGLE SCALÈNE.

XXVII.

Parmi les triangles celle qui a un angle *droit* se nomme TRIANGLE RECTANGLE.

XXVIII.

Celle qui a un angle *obtus* se TRIANGLE OBTUS-ANGLE.

XXIX.

Celle qui a ses *trois angles aigus* se nomme TRIANGLE ACUTANGLE.

XXX.

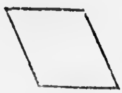
Parmi les figures quadrilatères, celle qui a ses côtés égaux et ses angles droits se nomme QUARRÉ.

XXXI.

Celle qui a ses angles droits se nomme RECTANGLE.

XXXII.

Celle qui a ses côtés égaux, mais qui n'a pas ses angles droits, se nomme RHOMBE.



XXXIII.

Celle dont les côtés opposés sont égaux, mais dont tous les côtés ne sont pas égaux, et dont les angles ne sont pas droits, se nomme RHOMBOÏDE.

XXXIV.

Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment TRAPÈZES.

XXXV.

Les PARALLÈLES sont des droites qui, étant placées dans un même plan, et prolongées à l'infini de l'un et de l'autre côté, ne se rencontrent nulle part.

A.

Une quadrilatère dont les côtés sont parallèles, se nomme PARALLÉLOGRAMME.

DEMANDES.

I.

On demande qu'on puisse conduire une droite d'un point quelconque à un autre point quelconque.

II.

On demande qu'on puisse prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie.

III.

On demande que d'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, on puisse décrire une circonférence de cercle.

AXIOMES.

I.

Les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entr'elles.

II.

Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.

III.

Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

IV.

Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.

V.

Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

VI.

Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entr'elles.

VII.

Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entr'elles.

VIII.

Les grandeurs qui s'ajustent entr'elles, sont égales entr'elles.

IX.

Le tout est plus grand que sa partie.

X.

Deux droites ne renferment point un espace.

XI.

Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

XII.

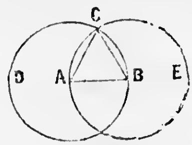
Si une droite tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces deux droites prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

PROPOSITION I.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et finie construire un triangle équilatéral.

Soit AB une droite donnée et finie :
Il faut construire sur AB un triangle équilatéral.



Du centre A, et avec un intervalle AB,décrivez la circonférence BD (D. 3) ;
ensuite du centre B, et avec un intervalle BA, décrivez la circonférence ACE (D. 3) ;
du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez les droites CA, CB aux points A, B (D. 1) ;
Je dis que le triangle ABC est équilatéral.

Car puisque le point A est le centre du cercle CDB,
AC est égal à AB (déf. 15) ;
de plus, puisque le point B est le centre du cercle ACE,
BC est égal à BA (Déf. 15) ;
mais on a démontré que AC est égal à AB ;
donc chacune des droites AC, BC, est égale à AB ;
or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles (Ax. 1) ;
donc AC est égal à BC ;
donc AC, BC, AB sont égaux entr'eux.

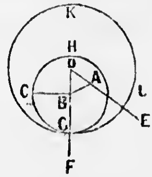
Donc le triangle ABC est équilatéral (Déf. 24) ;
et de plus, il est construit sur la droite donnée et finie AB.
Q. E. F.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Par un point donné conduire une droite égale à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BC la droite donnée :
Il faut conduire par A une droite égale à BC.



Conduisez du point A au point B la droite AB (D. 1) ;
sur AB construisez le triangle équilatéral ABD (I. 1) ;
prolongez DA, DB aux points E et F (D. 2) ;
du centre B et avec l'intervalle BC, décrivez la circonférence CGH (D. 3) ;
du centre D et avec l'intervalle DG, décrivez la circonférence GKL (D. 3) qui coupe la droite DE au point L.
Je dis que la droite AL sera égale à la droite BC.

Puisque B est le centre du cercle CGH,
BC est égal à BG (Déf. 15) ;
de plus, puisque D est le centre du cercle GKL,
DL est égal à DG (Déf. 15) ;
mais DA est égal à DB (Constr.) ;
donc la droite restante AL est égale à la droite restante BG (Ax. 3) ;
mais on a démontré que BC est égal à BG ;
donc chacune des droites AL, BC est égale à BG ;
mais les quantités qui sont égales à la même quantité sont égales entr'elles (Ax. 1) ;
donc AL est égal à BC.

Donc par le point donné A on a conduit une droite AL égale à la droite donnée BC.

Q. E. F.

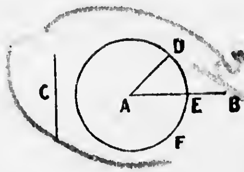
PROPOSITION III.

PROBLEME.

Deux droites inégales étant données, retranchez de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soit AB et C les deux droites inégales données, dont la plus grande soit AB.

Il faut de la plus grande AB retrancher une droite qui soit égale à la plus petite C.



Par le point A conduisez une droite AD égale à la droite C (I. 2), et du centre A et avec un intervalle AD décrivez la circonférence DEF coupant AB au point E (D. 3).

Je dis que AE sera égal à C.

Puisque A est le centre du cercle DEF,
AE est égal à AD (Déf. 15);
mais la droite C est égale à AD (Hyp.):
donc les deux droites AE et C sont égales chacune à la droite AD;
donc AE est égal à C (Ax. 1).

Donc les deux droites inégales AB et C ayant été données, il a été retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite.

Q. E. F.

us grande

lus grande

t égale à la

e C (I. 2),
irconférence

a droite AD;

nées, il a été
gale à la plus

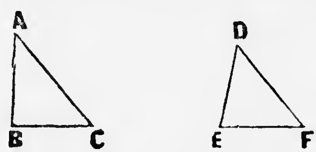
PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

Si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, et aussi les angles compris entre ces côtés égaux entr'eux, ces triangles auront leurs BASES *égales ; les deux* TRIANGLES *seront égaux entr'eux, et les* ANGLES RESTANS *opposés aux côtés égaux seront égaux entr'eux.*

Soient ABC, DEF deux triangles ayant les deux côtés AB, AC égaux
aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun,
savoir : AB égal à DE,
AC égal à DF,
et ayant aussi l'angle compris BAC sgal à l'angle compris EDF.

Je dis que la base BC sera égale à la base EF ;
que le triangle ABC au triangle DEF,
et que les angles restans opposés aux côtés égaux seront égaux entre eux,
savoir : l'angle ABC égal à l'angle DEF,
et l'angle ACB égal à l'angle DFF.



Car le triangle ABC étant apppliqué sur le triangle DEF, le point A
étant posé sur le point D, et la droite AB sur la droite DE,
le point B tombera sur le point E,
parce que AB est égale à DE ;
mais AB s'appliquant sur DE, AC tombera sur DF,
parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF ;
le point C tombera donc sur F,
parce que AC est égal à DF.
Mais nous avons démontré que le point B tombe sur E :
donc la base BC s'applique exactement à la base EF ;
car si le point B tombant sur E, et le point C sur F, la base BC ne
s'appliquait pas exactement sur la base EF,

il faudrait nécessairement que deux droites comprissent un espace, ce qui est impossible (Ax. 10).

Donc la base BC s'applique exactement sur la base EF, et lui est égale.

Donc le triangle entier ABC s'applique exactement sur le triangle entier DEF, et lui est égal.

Donc les autres angles du triangle ABC s'appliquent exactement sur les autres angles du triangle DEF, et leur sont égaux,

savoir: l'angle ABC égal à l'angle DEF,

et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Donc si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux, etc.

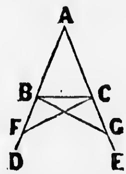
Q. E. D.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Dans les triangles isocèles les angles placés au dessus de la base sont égaux entr'eux ; et les côtés égaux étant prolongés, les angles au dessous de la base seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle isocèle ABC ayant le côté AB égal au côté AC ;
prolongez les droites AB, AC aux points D, E (D. 2).
Je dis que l'angle ABC est égal à l'angle ACB,
et que l'angle DBC est égal à l'angle ECB.



Prenez sur BD un point quelconque F,
et de la droite AE, qui est la plus grande, retranchez une droite AG
égale à AF, qui est la plus petite (I. 3).
Joignez FC et BG.

Puisque AB est égal à AC, et AG à AF,
les deux côtés AB, AG du triangle ABG sont égaux aux deux côtés AC,
AF du triangle ACF, chacun à chacun ;
et ces côtés comprennent un angle commun FAG ;
donc la base BG est égale à la base CF (I. 4) ;
et les angles restans du triangle ABG sont égaux aux angles restans
du triangle ACF, chacun à chacun (I. 4),
savoir : l'angle ABG à l'angle ACF,
et l'angle AGB à l'angle AFC.

Mais puisque la droite entière AF est égale à la droite entière AG,
et que la droite AB est égale à la droite AC,
la droite restante BF est égale à la droite restante CG (Ax. 3).
Mais on a démontré que FC est égal à BG :
donc les deux côtés BF, FC du triangle BFC sont égaux aux deux
CG, GB du triangle CGB ;

et nous avons démontré que l'angle compris BFC est égal à l'angle compris CGB :
donc les angles restans opposés aux côtés égaux de ces denx triangles sont égaux entr'eux (I. 4),
savoir : l'angle FBC à l'angle GCB,
et l'angle FCB à l'angle GBC.
Mais on a démontré que l'angle ACF est égal à l'angle ABG,
et que l'angle FCB est égal à l'angle GBC ;
donc l'angle restant ACB est égal à l'angle restant ABC (Ax. 3),
et ces angles sont placés au dessus de la base.
On a démontré aussi que l'angle FBC est égal à l'angle GCB,
et ces angles sont placés au dessous de la base.

Donc dans les triangles isocèles, les angles placés, etc.
Q. E. D.

COROLLAIRE.

De là il suit que les trois angles de tout triangle équilatéral sont égaux entr'eux.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entr'eux, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle ABC égal à l'angle ACB ;
je dis que le côté AC est égal au côté AB.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté AC,
l'un d'eux sera plus grand que l'autre.
Soit AB le plus grand ;
retranchez du plus grand côté AB la droite BD égal au plus petit côté AC (I. 3), et joignez DC (D. 2).

Puisque DB est égal à AC,
et que BC est commun aux deux triangles DBC, ABC,
les deux côtés DB, BC sont égaux aux deux côtés AC, CB chacun à chacun ;
et l'angle compris DBC est égal à l'angle compris ACB ;
donc la base DC est égal à la base AB (I. 4),
et le triangle DBC est égal au triangle ABC (I. 4),
c'est à dire le plus petit triangle est égal au plus grand :
ce qui est absurde.
Donc le côté AB n'est pas plus grand que le côté AC ;
on peut démontrer de la même manière qu'il ne lui est pas plus petit :
donc AB est égal à AC.

Donc si deux angles d'un triangle, etc.
Q. E. D.

COROLLAIRE.

De là il suit que si les trois angles d'un triangle sont égaux, le triangle sera équilatéral.

s côtés opposés
'eux.

ngle ACB;
3.

C,

1 plus petit côté

C, ABC,
C, CB chacun à

pris ACB;
. 4),
(I. 4),
us grand:

côté AC;
st pas plus petit:

etc.

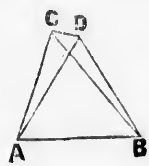
e sont égaux, le

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Lorsque deux triangles ayant la même base, ont leurs sommets du même côté de la base, les deux côtés qui partent de l'une des extrémités de la base ne peuvent pas être égaux entr'eux, et aussi les deux côtés qui partent de l'autre extrémité de la base.

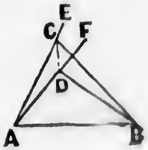
Car si cela est possible, soient les deux triangles ACB, ADB au dessus de la même base AB, et ayant les sommets C,D du même côté de la base : supposons que les deux côtés CA, DA qui partent de l'extrémité A sont égaux entr'eux, et que les deux côtés CB, DB qui partent de l'autre extrémité de la base sont aussi égaux entr'eux.



Joignez CD.

1° Dans le cas où le sommet de chaque triangle n'est pas compris par l'autre triangle.

Puisque AC est égale à AD,
l'angle ACD est égal à l'angle ADC (I. 5) ;
mais l'angte ACD est plus grand que l'angle BCD :
donc l'angle ADC est aussi plus grand que l'angle BCD ;
à plus forte raison l'angle BDC est plus grand que l'angle BCD.
De plus, puisque BD est égale à BC,
l'angle BDC est égal à l'angle BCD ;
mais on a démontré qu'il lui est plus grand :
ce qui est impossible.



2° Si le sommet D du triangle ADB est compris par l'autre triangle ACB, prolongez les deux droites AC, AD aux points E, F.

Puisque les deux côtés égaux du triangle ACD sont prolongés, les deux angles ECD, FDC au-dessous de la basse sont égaux entre eux (I. 5).

Mais l'angle ECD est plus grand que l'angle BCD:
donc l'anglo FDC est aussi plus grand que l'angle BCD ;
a plus forte raison l'angle BDC est plus grand que l'angle BCD.
De plus, puisque BC est égal à BD,
l'angle BDC est égal à l'anglo BCD ;
mais on a démontré qu'il lui est plus grand:
ce qui est impossible.

Donc, dans les deux cas, lorsque deux triangles ayant la même base, etc.

Q. E. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, et si la base de l'un est égale à la base de l'autre, les deux angles compris entre les côtés égaux seront aussi égaux.

Soient les deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux côtés DE, DF chacun à chacun,

savoir : AB égal à DE,

AC égal à DF,

et aussi la base BC égal à la base EF.

je dis que l'angle BAC sera égal à l'angle EDF :

Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF,

le point B sur E et la droite BC sur EF,

le point C tombera sur F,

parce que BC est égal à EF.

La base BC s'appliquant exactement sur EF,

BA, AC s'appliqueront exactement sur ED, DF ;

car si BC s'appliquant exactement sur EF, les droites BA, AC ne s'appliquaient pas exactement sur ED, DF, et avaient quelque autre position comme EG, GF,

il serait possible d'avoir deux triangles sur la même base et avec leur sommet du même côté de la base, de telle manière que les deux côtés qui partent de l'une des extrémités de la base soient égaux entr'eux, et aussi les deux côtés qui partent de l'autre extrémité :

ce qui est impossible (I. 7).

Donc la base BC s'appliquant exactement sur la base EF,

il est impossible que les côtés AB, AC ne s'appliquent pas exactement sur les côtés ED, DF:

donc ils s'appliquent exactement les uns sur les autres ;
donc l'angle BAC s'applique exactement sur l'angle EDF ;
donc il lui est égal.

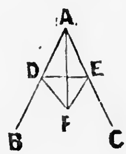
Donc si deux triangles, etc.
Q. E. D.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit BAC l'angle rectiligne donné :
il faut le partager en deux parties égales.



Prenez sur la droite AB un point quelconque D ;
retranchez de la droite AC la droite AE égale à AD (I. 3) ;
joignez DE (D. 1).
Sur le côté de la droite DE opposé au point A construisez le triangle équilatéral DFE (I. 1) ;
joignez AF (D. 1).
Je dis que la droite AF partagera l'angle BAC en deux parties égales.

Puisque AD est égal à AE (Constr.),
et AF commun aux deux triangles DAF, EAF,
les deux côtés DA, AF sont égaux aux deux côtés EA, AF chacun à chacun ;
mais la base DF est égale à la base EF :
donc l'angle DAF est égal à l'angle AEF (I. 8).

Donc l'angle BAC est partagé en deux parties égales par la droite AF.

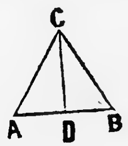
Q. E. F.

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit AB la droite donnée et finie :
il faut partager AB en deux parties égales.



Construisez sur AB le triangle équilatéral ACB (I. 1),
et partagez l'angle ACB en deux parties égales par la droite CD qui coupe AB au point D (I. 9) :
je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point D.

Car puisque AC est égal à BC (Constr.),
et que CD est commun aux deux triangles ACD, BCD (Constr.),
les deux côtés AC, CD sont égaux aux deux côtés BC, CD chacun à chacun ;
mais l'angle compris ACD est égal à l'angle compris BCD ;
donc la base AD est égale à la base BD (I. 4)

Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point D.

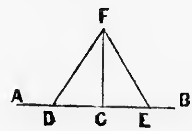
Q. E. F.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

Sur une droite donnée et d'un point donné dans cette droite, conduire une droite qui fasse deux angles droits avec la droite donnée.

Soit AB la dioite donnée, et C le point donné dans cette droite : il faut par le point C conduire une droite qui fasse deux angles droits avec AB.



Prenez dans la ligne AC un point quelconque D ;
faites CE égal à CD (I. 3);
construisez sur DE le triangle équilatéral DFE (I. 1), et joignez FC :
je dis que FC fait deux angles droits avec AB.

Car puisque DC est égal à EC (Constr.),
et que CF est commun aux deux triangles DCF, ECF,
les deux côtés DC, CF sont égaux aux deux côtés EC, CF chacun à chacun,
mais la base DF est égale à la base EF :
donc l'angle DCF est égal à l'angle ECF (I. 8).
Or ces deux angles sont de suite ;
mais quand une droite fait avec une autre droite les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit (Déf. 10) :
donc chacun des angles DCF, ECF est droit.

Donc la droite FC, conduite par le point C sur la droite AB, fait deux angles droits avec AB.

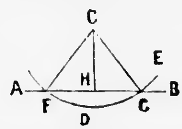
Q. E. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et indéfinie, et d'un point placé hors d'elle. mener une perpendiculaire.

Soit AB la droite donnée et indéfinie, et C le point donné placé hors de cette droite :
il faut sur AB conduire du point C une droite perpendiculaire.



Prenez de l'autre côté de la droite AB un point quelconque D,
et du centre C et avec un intervalle CD décrivez une circonférence FDE coupant AB aux points F, G (D. 3);
partagez FG en deux parties égales au point H (I. 10),
et joignez CH :
je dis que CH est perpendiculaire à AB.

Joignez CF, CG.

Puisque GH est égal à FH,
et que CH est commun aux deux triangles CHG, CHF,
les deux côtés CH, HG sont égaux aux deux côtés CH, HF chacun à chacun ;
mais la base CG est égale à la base CF (Déf. 15) :
donc l'angle CHG est égal à l'angle CHF (I. 8).
Or ces angles sont de suite :
mais lorsqu'une droite tombant sur une droite fait avec elle les angles de suite égaux entr'eux, chacun de ces angles est droit, et la droite tombante est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle tombe.

Donc du point donné C on a conduit une perpendiculaire CH sur la droite donnée AB.

Q. E. F.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

Les deux angles faits du même côté d'une droite par une autre droite qui la rencontre sont ou deux angles droits, ou égaux à deux angles droits.

Soient ABC, ABD les angles faits du même côté de la droite DC par la droite AB qui rencontre CD au point B :
je dis que les angles ABC, ABD ou seront deux angles droits, ou ils seront égaux à deux angles droits.

Car si l'angle ABC est égal à l'angle ABD,
ces deux angles seront droits (Déf. 10).

Mais si l'angle ABC n'est pas égal à l'angle ABD,
conduisez BE de manière qu'elle fasse deux angles droits avec CD (I. 11).

Puisque l'angle ABD est égal aux deux angles ABE, EBD,
si on ajoute l'angle commun ABC,
les deux angles ABC, ABD seront égaux aux trois angles ABC, ABE, EBD.
De plus, puisque l'angle EBC est égal aux deux angles ABC, ABE,
si on ajoute l'angle commun EBD,
les deux angles EBC, EBD seront égaux aux trois angles ABC, ABE, EBD.
Mais on a démontré que les angles ABC, ABD sont aussi égaux à à ces trois angles :
donc les angles ABC, ABD sont égaux aux angles EBC, EBD (Ax. 1) ;
mais les angles EBC, EBD sont deux angles droits (Constr) :
donc les angles ABC, ABD sont égaux à deux angles droits.

Donc les deux angles faits du même côté d'une droite, etc.
Q. E. D.

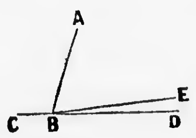
PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

Si d'un point quelconque dans une droite, deux autres droites placées de différents côtés font avec elle deux angles de suite égaux à deux angles droits, ces deux droites seront dans la même direction, c'est à dire qu'elles ne formeront qu'une seule et même droite.

Que d'un point B dans la droite AB, les deux droites BC, BD placées de différents côtés fassent avec elle les angles de suite ABC, ABD égaux à deux angles droits :

je dis que les droites BC, BD ne forment qu'une seule et même droite.



Car si BD n'est pas dans la direction de BC,

Supposons que BE soit dans la direction de BC (D. 2).

Donc puisque ABC, ABE sont les angles faits du même côté de la droite CBE par la droite AB qui la rencontre,

ces deux angles ABC, ABE sont égaux à deux angles droits (I. 13) ;

mais les angles ABC, ABD sont aussi égaux à deux angles droits (Hyp) :

donc les angles ABC, ABE sont égaux aux angles ABC, ABD ;

ôtez l'angle commun ABC,

et l'angle restant ABE sera égal à l'angle restant ABD,

c'est à dire que le plus petit sera égal au plus grand :

ce qui est impossible.

La droite BE n'est donc pas dans la direction de BC.

Nous démontrerons de la même manière qu'il n'y en a point d'autre qui soit dans la direction de BC, si ce n'est BD.

Donc BD est dans la direction de BC.

Donc si dans un point, etc.

Q. E. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles opposés au sommet égaux entr'eux.

Que les deux droites AB, CD se coupent mutuellement au point E :
je dis que l'angle AEC est égal à l'angle opposé DEB,
et l'angle BEC égal à l'angle opposé AED.

Car puisque AEC, AED sont les angles faits du même côté de CD par la droite AE qui la rencontre au point E,
ces deux angles AEC, AED sont égaux à deux angles droits (I. 13) ;
de plus, puisque BED, AED sont les angles faits du même côté de la droite AB par la droite DE qui la rencontre au point E,
les deux angles BED, AED sont aussi égaux à deux angles droits (I. 13) ;
mais il a été démontré que les angles AEC, AED sont égaux à deux angles droits :
donc les angles AEC, AED sont égaux aux angles BED, AED ;
ôtez l'angle commun AED,
et l'angle restant AEC est égal à l'angle restant BED.
On démontrera de la même manière que l'angle BEC est égal à l'angle AED.

Donc si deux droites se coupent mutuellement, etc.
Q. E. D.

COROLLAIRE I.

De là il suit que les quatre angles faits par deux droites qui se coupent mutuellement sont égaux à quatre angles droits.

COROLLAIRE II.

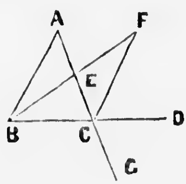
Et par conséquence, que quelque soit le nombre des lignes qui se rencontrent en un point, les angles au point sont égaux à quatre angles droits.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Un côté d'un triangle quelconque étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABC, prolongez le côté BC jusqu'en D :
je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ABC, BAC.



Partagez AC en deux parties égales au point E (I. 10) :
joignez BE, prolongez BE jusqu'en F, et faites EF égal à BE (I. 3) ;
joignez FC.

Puisque EC est égal à AE,
et EF égal à BE,
les deux côtés EC, EF du triangle FEC sont égaux aux deux cotés AE, BE du triangle AEB, chacun à chacun ;
mais l'angle compris FEC est égal à l'angle compris opposé au sommet AEB (I. 15) :
donc la base FC est égale à la base AB (I. 4),
et l'angle ECF est égal à l'angle BAE ;
mais l'angle ACD est plus grand que l'angle ECF :
donc l'angle ACD est aussi plus grand que l'angle BAE.

Si l'on prolonge AC à G on démontrera de la même manière que l'angle BCG, c'est à dire l'angle ACD (I. 15) est plus grand que l'angle ABC.
Donc l'angle ACD est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ABC et BAC.

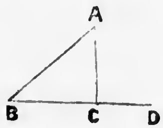
Donc un côte d'un triangle quelconque étant prolongé, l'angle, etc.
Q. E. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux angles droits.

Soit le triangle ABC :
je dis que deux angles du triangle ABC, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux angles droits.



Prolongez BC jusqu'en D (D. 2).
L'angle extérieur ACD est plus grand que l'angle intérieur et opposé ABC (I. 16) ;
donc si l'on ajoute un angle commun ACB,
les angles ACD, ACB seront plus grands que les angles ABC, ACB ;
mais les angles ACD, ACB sont égaux à deux angles droits (I. 13) :
donc les angles ABC, ACB sont moindres que deux angles droits.

On démontrera de la même manière que les angles ABC, BAC son aussi moindres que deux angles droits, et que les angles BAC, ACB sont moindres que deux angles droits.

Donc deux angles d'un triangle quelconque, etc

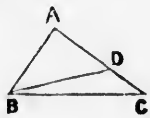
Q. E. D.

PROPOSITION X VIII.

THÉORÊME.

Dans tout triangle. un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ABC ayant le côté AC plus grand que le côté AB : je dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.



Puisque le côté AC est plus grand que le côté AB,
faites AD égal à AC (I. 4), et joignez BD.

Puisque AD est égal à AB,
l'angle ABD est égal à l'angle ADB ;
mais l'angle ADB est un angle extérieur du triangle BDC :
donc l'angle ADB est plus grand que l'angle intérieur et opposé BCD ou ACB (I. 16) ;
mais on a démontré que l'angle ABD est égal à l'angle ADB :
donc l'angle ABD est aussi plus grand que l'angle ACB ;
donc l'angle ABC est beaucoup plus grand que l'angle ACB.

Donc dans tout triangle, etc.

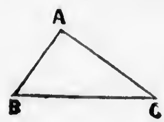
Q. E. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.

Soit le triangle ABC ayant l'angle ABC plus grand que l'angle ACB :
je dis que le côté AC est plus grand que le côté AB.



Car si AC n'est pas plus grand que AB,
AC est égal à AB, ou bien il est plus petit.
Or, si AC était égal à AB,
l'angle ABC serait égal à l'angle ABC (I. 5) ;
mais l'angle ABC n'est point égal à l'angle ACB :
donc AC n'est pas égal à AB.

De plus, si AC était plus petit que AB,
l'angle ABC serait plus petit que l'angle ACB (I. 18) ;
mais l'angle ABC n'est pas plus petit que l'angle ACB :
donc AC n'est pas plus petit que AB.
Mais il a été démontré que AC n'est pas égal à AB :
donc AC est plus grand que AB.

Donc dans un triangle quelconque, etc.

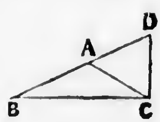
Q. E. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ABC :
je dis que deux côtés du triangle ABC, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant,
c'est à dire : BA, AC plus grands que BC,
BC, CA plus grands que AB,
AB, BC plus grands que AC.



Prolongez BA jusqu'au point D,
faites AD égal à AC (I. 5),
joignez DC.

Puisque AD est égal à AC,
l'angle ACD est égal à l'angle ADC (I. 5) ;
mais l'angle BCD est plus grand que l'angle ACD :
donc l'angle BCD est aussi plus grand que l'angle ADC ;
mais puisque dans le triangle BDC,
l'angle BCD est plus grand que l'angle BDC,
et qu'un plus grand côté est opposé à un plus grand angle (I. 19),
le côté BD est plus grand que le côté BC ;
mais BD est égal aux deux côtés BA, AC du triangle ABC (Constr.):
donc BA, AC sont plus grands que BC.

On peut démontrer de la même manière que
BC, CA sont plus grands que AB,
et que AB, BC sont plus grands que AC.

Donc deux côtés d'un triangle, etc.

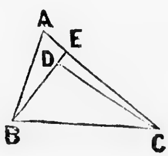
Q. E. D.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Si des extrémités d'un côté d'un triangle on mène deux droites qui se rencontrent dans ce triangle, ces deux droites seront plus courtes que les deux autres côtés du triangles, mais elles comprendront un angle plus grand.

Des extrémités B, C du côté BC du triangle ABC, menez les deux droites BD, CD au point D en dedans du triangle :
je dis que BD, CD seront plus petites que les deux autres côtés BA, CA du triangle ABC,
et que cependant elles comprendront un angle BDC plus grand que l'angle BAC.



Prolongez la droite BD et qu'elle coupe AC au point E.
Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant (I. 20),
les deux côtés BA, EA du triangle ABE sont plus grands que BE.
Donc si on ajoute une droite commune EC,
les côtés BA, AC seront plus grands que BE, EC.
De plus, puisque les deux côtés DE, EC du triangle DEC sont plus grands que DC (I. 20),
si on ajoute la droite commune BD,
les côtés BE, EC seront plus grands que BD, DC ;
mais on a démontré que BA, AC sont plus grands que BE, EC :
donc BA, AC sont beaucoup plus grands que BD, DC.

De plus, comme un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (I. 16),
l'angle BDC, qui est un angle extérieur du triangle DEC, est plus grand que l'angle intérieur DEC.
Par la même raison l'angle CEB, qui est un angle extérieur du triangle ABE, est plus grand que l'angle intérieur BAC (I. 16) ;

mais on a démontré que l'angle BDC est plus grand que l'angle BEC : donc l'angle BDC est beaucoup plus grand que l'angle BAC.

Donc si des extrémités d'un côté, etc.

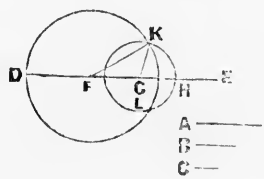
Q. E. D.

PROPOSITION XXII.

PROBLÈME.

Construire un triangle dont les côtés seront égaux à trois droites données ; deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, étant plus grandes que la troisième.

Soient données les trois droites A, B, C, dont deux, de quelque manière qu'on les prenne, soient plus grandes que la troisième ;
c'est à dire : A, B plus grandes que C,
A, C plus grandes que B,
B, C plus grandes que A.
Il faut construire un triangle dont les côtés seront égaux aux droites A, B, C.



Supposons la droite DE terminée en D et indéfinie vers E :
faites DF égal à A, FG égal à B et GH égal à C (I. 3) ;
ensuite du centre F et avec l'intervalle FD décrivez la circonférence DKL (D. 3),
et du centre G et avec l'intervalle GH décrivez la circonférence HKL, coupant la circonférence DKL au point K ;
joignez FK et KG :
je dis que le triangle FKG a ses côtés égaux aux trois droites A, B, C.

Car puisque le point F est le centre du cercle DKL,
FK est égal à FD (Déf. 15) ;
mais A est égal à FD (Constr.) :
donc FK est égal à A.
De plus, puisque G est le centre du cercle HKL,
GK est égal à GH ;
mais C est égal à GH (Constr.) :
donc GK est égal à C.
Or FG est égal à B :

donc les trois droites FK, FG, GK égalent les trois droites A, B, C.

Donc le triangle **KFG** *a été construit dont les côtés,* **FK, FG, GK** *égalent les trois droites données* **A, B, C.**

Q. E. F.

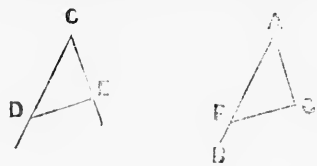
PROPOSITION XXIII.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et à un point donné dans cette droite, construire un angle égal à un angle donné.

Soit AB la droite donnée et A le point donné dans cette droite ; que DCE soit l'angle donné :

il faut sur la droite donnée AB et au point donné A construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné DCE.



Soient pris dans l'une et l'autre ligne CD, CE deux points quelconques D, E ;

joignez DE,

Construisez le triangle AFG dont les côtés AF, FG, GA seront égaux chacun à chacun aux trois droites CD, DE, EC (I. 22) :

je dis que l'angle FAG sera égal à l'angle donné DCE.

Puisque AF, AG égalent CD, CE chacun à chacun.

et que la base FG égale la base DE :

donc l'angle FAG est égal à l'angle DCE (I. 8).

Donc au point donné A dans la droite donnée AB un angle FAG a été construit égal à l'angle donné DCE.

Q. E. F.

e droite, con-
.

te droite; que

construire un
CE.

points quel-

seront égaux
22):
DCE.

acun.

8).

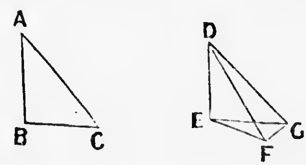
angle *FAG* a

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

Si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre chacun à chacun, mais l'angle compris entre les deux côtés de l'un de ces triangles plus grand que l'angle compris entre les deux côtés de l'autre triangle, la base du triangle dont l'angle compris est plus grand sera plus grande que la base de l'autre.

Soient les deux triangles ABC, DEF dont les deux côtés AB, AC sont égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun,
c'est à dire AB égal à DE, et AC à DF ;
mais que l'angle BAC soit plus grand que l'angle EDF ;
je dis que la base BC sera plus grande que la base EF.



Des deux côtés DE, DF que DE soit celui qui n'est pas plus grand que l'autre DF ;
alors, au point D, dans la dite droite DE, construisez l'angle EDG égal à l'angle BAC (I. 23),
et faites DG égal à DF ou à AC (I. 3),
joignez EG et FG.

Puisque DE est égal à AB, et DG à AC,
les deux côtés DE, DG sont égaux aux deux côtés AB, AC, chacun à chacun ;
mais l'angle compris EDG est égal à l'angle compris BAC (Constr.):
donc la base EG est égale à la base BC (I. 4).
De plus, puisque DG est égal à DF,
l'angle DFG est égal à l'angle DGF (I. 5) ;
mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF :
donc l'angle DFG est aussi plus grand que l'angle EGF ;
donc l'angle EFG est beaucoup plus grand que l'angle EGF.
Mais puisque l'angle EFG du triangle EFG est plus grand que l'angle EGF,

et que dans tout triangle un angle plus grand est opposé à un côté plus grand (I. 19),

le côté EG est plus grand que le côté EF ;

mais EG est égal à BC (Constr.) :

donc BC est plus grand que EF.

Donc si deux triangles ont deux côtés, etc.

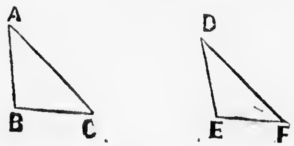
Q. E. D.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, mais la base de l'un plus grande que la base de l'autre ; l'angle compris entre les deux côtés du triangle dont la base est plus grande sera plus grand que l'angle compris entre les deux côtés de l'autre.

Soient ABC, DEF deux triangles qui aient les deux côtés AB, AC
égaux à deux côtés DE, DF, chacun à chacun,
c'est à dire AB égal à DE, et AC égal à DF ;
mais la base BC plus grande que la base EF :
je dis que l'angle BAC sera plus grand que l'angle EDF.



Car si l'angle BAC n'est pas plus grand que l'angle EDF,
il lui est égal ou il est plus petit.
Si l'angle BAC était égal à l'angle EDF,
la base BC serait égale à la base EF (I. 4) ;
mais elle ne lui est pas égale (Hyp.) :
donc l'angle BAC n'est pas égal à l'angle EDF.

De plus, si l'angle BAC était plus petit que l'angle EDF,
la base BC serait plus petite que la base EF (I. 24) ;
or elle ne lui est pas plus petite (Hyp.) :
donc l'angle BAC n'est pas plus petit que l'angle EDF.

Mais il a été démontré qu'il ne lui est pas égal :
donc l'angle BAC est plus grand que l'angle EDF.

Donc si deux triangles, etc.

Q. E. D.

leux côtés de
rande que la
du triangle
ngle compris

ôtés AB, AC

;
:
EDF.

e EDF,

.

F.

EDF,
24);

EDF.

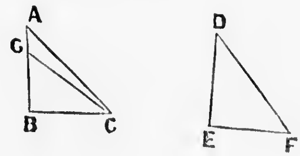
l:
DF.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

Si deux triangles ont deux angles de l'un égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, et s'ils ont de plus un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et le troisième angle de l'un sera encore égal au troisième angle de l'autre.

Soient ABC, DEF deux triangles qui aient les deux angles ABC, ACB égaux aux deux angles DEF, DFE, chacun à chacun, c'est à dire ABC à DEF, et ACB à DFE; et que ces triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, c'est à dire le côté BC égal au côté EF: je dis que les autres côtés seront égaux chacun à chacun, c'est à dire AB égal à DE, et AC à AF; et de plus, que le troisième angle BAC sera égal au troisième angle EDF.

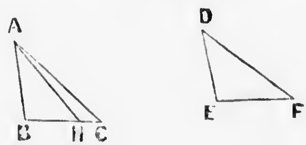


Car si AB n'est pas égal à DE, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit AB plus grand que DE; faites BG égal à DE (I. 3) et joignez CG.

Puisque BG est égal à ED, et BC à EF (Constr.), les deux côtés BG, BC du triangle GBC sont égaux aux deux côtés ED, EF dutriangle DEF, chacun à chacun, mais l'angle compris GBC est égal à l'angle compris DEF (Hyp.): donc les autres angles du triangle GBC sont égaux aux autres angles du triangle DEF, chacun a chacun, c'est à dire ceux qui sont opposés aux côtés égaux (I. 4); donc l'angle GCB est égal à l'angle DFE; mais l'angle ACB est égal à l'angle DFE (Hyp.):

donc l'angle GCB est égal à l'angle ACB,
c'est à dire que le plus petit est égal au plus grand,
ce qui est impossible :
donc les côtés AB, DE ne sont pas inégaux ;
donc ils sont égaux.
Et puisque AB est égal à DE, et que BC est égal à EF (Hyp.),
les deux côtés AB, BC du triangle ABC sont égaux aux deux côtés DE, EF du triangle DEF ;
mais l'angle compris ABC est égal à l'angle compris DEF (Hyp.) :
donc la base AC est égale à la base DF (I. 4),
et le troisième angle BAC au troisième angle EDF (I. 4).

Supposons maintenant que les côtés qui sont opposés aux angles égaux soient égaux, c'est à dire AB à DE :
je dis que dans ce cas aussi les autres côtés de l'un de ces triangles seront encore égaux aux autres côtés de l'autre triangle ;
c'est à dire que le côté BC sera égal au côté EF,
et le côté AC égal au côté DF,
et le troisième angle BAC égal au troisième angle EDF.



Car si BC n'est pas égal à EF,
l'un d'eux sera plus grand que l'autre.
Supposons que BC soit plus grand que EF ;
faites BH égal à EF (I. 3), et joignez AH.

Puisque AB est égal à DE, et BH à EF,
les deux côtés AB, BH du triangle ABH sont égaux aux deux côtés DE, EF du triangle DEF, chacun à chacun ;
mais l'angle compris ABH est égal à l'angle compris DEF (Hyp.) :
donc les autres angles du triangle ABH sont égaux aux autres angles du triangle DEF, chacun à chacun, c'est à dire ceux qui sont opposés aux angles égaux (I. 4) :
donc l'angle AHB est égal à l'angle DFE ;
mais l'angle ACB est aussi égal à l'angle DFE (Hyp.) :
donc l'angle AHB est égal à l'angle ACB,

c'est à dire que l'angle extérieur AHB du triangle AHC est égal à
à l'angle intérieur et opposé ACH ;
ce qui est impossible (I. 16) :
donc les côtés BC, EF ne sont pas inégaux,
donc ils sont égaux.
Or, puisque BC est égal à EF,
et que le côté AB est égal au côté DE (Hyp.),
les deux côtés AB, BC du triang'e ABC sont égaux aux deux côtés
DE, EF du triangle DEF, chacun à chacun ;
mais l'angle compris ABC est égal à l'angle compris DEF (Hyp.) :
donc la base AC est égale à la base DF (I. 4),
et le troisième angle BAC est égal au troisième angle EDF.

Donc si deux triangles ont deux angles de l'un égaux, etc
Q. E. D.

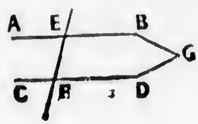
PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

Si une droite tombant sur deux autres droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EF tombant sur les deux droites AB, CD fasse les angles alternes AEF, EFD égaux entr'eux :

je dis que AB sera parallèle à CD.



Car si AB n'est pas parallèle à CD,

AB, CD étant prolongés se rencontreront ou du côté B,D ou du côté A,C.

Prolongez ces droites, et supposons qu'elles se rencontrent du côté BD au point G.

Puisque le côté GBE du triangle EGF est prolongé,

l'angle extérieur AEF est plus grand que l'angle intérieur et opposé EFG (I. 16) ;

mais l'angle AEF est aussi égal à l'angle EFD (Hyp.);

ce qui est impossible :

donc AB, CD étant prolongés du côté B, D ne se rencontreront point.

On démontrerait de la même manière qu'elles ne se rencontreront pas non plus du côté A, C ;

Or les droites qui, étant placées dans le même plan et prolongées à l'infini de l'un et l'autre côté, ne se rencontrent nulle part, sont parallèles (Déf. 25) :

donc AB est parallèle à CD.

Donc si une droite tombant sur deux autres droites, etc.

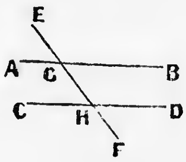
Q. E. D.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

Si une droite tombant sur deux autres droites fait un angle extérieur égal à un angle intérieur opposé et placé du même côté de la droite, ou bien si elle fait les deux angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux angles droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EF tombant sur les deux droites AB, CD fasse l'angle extérieur EGB égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté de la droite, savoir l'angle GHD,
ou bien qu'elle fasse les deux angles intérieurs BGH, GHD du même côté égaux à deux angles droits :
je dis que AB sera parallèle à CD.



Car puisque l'angle EGB est égal à l'angle GHD (Hyp.),
et que l'angle EGB est égal à l'angle AGH (I. 15),
l'angle AGH est égal à l'angle GHD ;
mais ces angles sont alternes :
donc AB est parallèle à CD (I. 27).

De plus, puisque les angles BGH, GHD sont égaux à deux angles droits (Hyp.),
et que les angles BGH, AGH sont aussi égaux à deux droits (I. 15),
les angles BGH et AGH sont égaux aux angles BGH, GHD (Ax. 1) ;
retranchez l'angle commun BGH :
donc l'angle restant AGH est égal à l'angle restant GHD ;
mais ces angles sont alternes :
donc AB est parallèle à CD (I. 27).

Donc si une droite tombant sur deux autres droites, etc.

Q. E. D.

un angle ex-
même côté de
rs et placés du
droites seront

) fasse l'angle
lacé du même

HD du même

(Hyp.),
15),

deux angles

droits (I. 15),
HD (Ax. 1) ;

t GHD ;

ites, etc.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

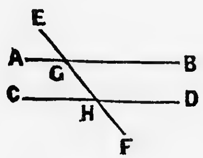
Si une droite tombe sur deux parallèles, les angles alternes sont égaux entr'eux, l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les deux angles intérieurs placés du même côté sont égaux à deux angles droits.

Que la droite EF tombe sur les parallèles AB, CD :

je dis que les angles alternes AGH, GHD seront égaux entr'eux ;

l'angle extérieur EGB sera égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté GHD,

et les angles intérieurs et placés du même côté BGH, GHD seront égaux à deux angles droits.



Car si l'angle AGH n'est pas égal à l'angle GHD,

l'un de ces angles sera plus grand que l'autre.

Que AGH soit le plus grand ;

Puisque l'angle AGH est plus grand que l'angle GHD,

si on leur ajoute un angle commun BGH,

les angles AGH, BGH seront plus grands que les angles BGH, GHD ;

mais les angles AGH, BGH sont égaux à deux droits (I. 13) :

donc les angles BGH, GHD sont moindres que deux droits ;

mais si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté moindres que deux droits, ces deux droites étant prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont moindres que deux droits (Ax. 12) :

donc les droites AB, CD prolongées à l'infini se rencontreront ;

mais elles ne se rencontreront pas puisqu'elles sont parallèles (Hyp.);

donc les angles AGH, GHD ne sont pas inégaux,

c'est à dire l'angle AGH est égal à l'angle GHD.

De plus, puisque l'angle AGH est égal à l'angle alterne GHD,

et que l'angle AGH est égal à l'angle opposé au sommet EGB (I. 15),
l'angle EGB est égal à l'angle GHD.

De plus, puisque l'angle EGB est égal à l'angle GHD
si on ajoute l'angle commun BGH,
les angles EGB et BGH sont égaux aux angles BGH, GHD;
mais les angles EGB et BGH sont égaux à deux angles droits (I. 13):
donc les angles BGH. GHD sont égaux à deux angles droits.

Donc si une droite tombe sur deux parallèles, etc.

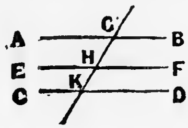
Q. E. D.

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

Les droites qui sont parallèles à la même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des parallèles AB, CD soit parallèle à la droite EF : je dis que AB est parallèle à CD.



Que la droite GHK coupe les trois lignes aux points G, H, K.

Puisque GK tombe sur les parallèles AB, EF,
l'angle AGH est égal à l'angle GHF (I. 29),
De plus, puisque GK tombe sur les parallèles EF, CD,
l'angle extérieur GHF est égal à l'angle HKD (I. 29).
Or on a démontré que l'angle GHF est égal à l'angle AGH :
donc l'angle AGH est égal à l'angle HKD ;
mais ce sont les angles alternes :
donc AB est parallèle à CD.

Donc les droites qui sont parallèles, etc.

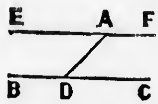
Q. E. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÈME.

Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BC la droite donnée :
il faut par le point A mener une droite parallèle à BC.



Prenez sur la droite BC un point quelconque D,
et joignez AD ;
construisez sur la droite AD et au point A un angle EAD égal à l'angle ADC (I. 23),
et prolongez EA dans la directon EA jusqu'en F.
Je dis que EF est parallèle à BC.

Puisque AD tombant sur les droites EF, BC fait les angles alternes EAD, ADC égaux entr'eux,
la droite EF est parallèle à la droite BC (I. 27).

Donc par le point donné A la droite EF a été menée parallèle à la droite donnée BC.

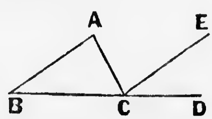
Q. E. F.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Un côté d'un triangle quelconque étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés ; et, de plus, les trois angles intérieurs de tout triangle sont égaux à deux angles droits.

Soit le triangle ABC, et que le côté BC soit prolongé au point D :
je dis que l'angle extérieur ACD est égal aux deux angles intérieurs et opposés CAB, ABC ;
et, de plus, que les trois angles intérieurs ABC, BCA, CAB sont égaux à deux angles droits.



Menez par le point C la droite CE parallèle à BA (I. 31).

Puisque CE est parallèle à BA (Constr.),
et que AC tombe sur elles,
l'angle ACE est égal à l'angle alterne CAB (I. 29).
De plus, puisque BD tombe sur les parallèles CE, BA,
l'angle extérieur ECD est égal à l'angle intérieur et opposé ABC (I. 29).
Or il a été démontré que l'angle ACE est égal à l'angle CAB :
donc l'angle extérieur total ACD est égal aux deux angles intérieurs et opposés CAB, ABC.

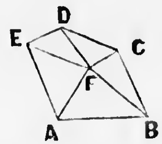
Donc si on ajoute un angle commun BCA,
les angles ACD et ACB seront égaux aux trois angles ABC, BCA, CAB;
mais les angles ACD, ACB sont égaux à deux angles droits (I. 13):
donc les trois angles intérieurs ABC, BCA, CAB sont égaux à deux angles droits (Ax. 1).

Donc si on prolonge un côté d'un triangle quelconque, etc.

Q. E. D.

COROLLAIRE I.

Tous les angles intérieurs d'une figure rectiligne quelconque et quatre angles droits égalent autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans la figure.



Car le nombre des triangles formés par les lignes menées des angles A, B, C, D, E, d'une figure rectiligne quelconque ABCDE à un point quelconque F dans la figure, est égal au nombre de ses côtés.

Or, puisque les trois angles intérieurs de tout triangle sont égaux à deux angles droits (I. 32),

et que le nombre des triangles est égal au nombre des côtés,

tous les angles de ces triangles égalent autant de fois deux angles droits que la figure a de côtés.

Mais les angles de ces triangles égalent les angles intérieurs de la figure et les angles au point F,

et les angles au point F sont égaux à quatre droits (I. 15. Cor.) :

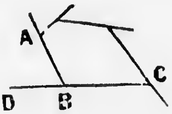
donc les angles de ces triangles égalent tous les angles intérieurs de la figure et quatre droits.

Mais on a démontré que les angles de ces triangles égalent autant de fois deux angles droits que la figure a de côtés :

donc tous les angles intérieurs de la figure et quatre angles droits égalent autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans la figure.

COROLLAIRE II.

Tous les angles extérieurs d'une figure rectiligne quelcouque faits par la prolongation des côtés dans le même sens, sont égaux à quatre angles droits.



Puisque l'angle extérieur ABD et l'angle adjacent intérieur ABC égalent deux angles droits (I. 13),

tous les angles intérieurs et extérieurs égaleront autant de fois deux angles droits que la figure a de côtés;

mais on a démontré que tous les angles intérieurs et quatre droites égalent autant de fois deux angles droits que la figure a de côtés :

donc tous les angles intérieurs et tous les angles extérieurs sont égaux à tous les angles intérieurs et quatre angles droits;

ôtez tous les angles intérieurs.

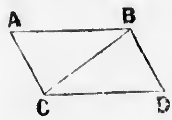
Donc tous les angles extérieurs sont égaux à quatre angles droits (Ax. 3).

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

Les droites qui joignent des mêmes côtés les extrémités des droites égales et parallèles sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient AB, CD deux droites égales et parallèles ;
joignez-les des mêmes côtés par les droites AC, BD :
je dis que les droites AC, BD sont aussi égales et parallèles.



Joignez BC.

Puisque AB est parallèle à CD, et que BC tombe sur ces deux parallèles,
les angles ABC, BCD sont égaux (I. 29).
De plus, puisque AB est égal à CD (Hyp.),
et que BC est commun aux deux triangles ABC, DCB,
les deux côtés AB, BC du triangle ABC sont égaux aux deux côtés DC, CB du triangle DCB, chacun à chacun ;
mais l'angle compris ABC est égal à l'angle compris DCB :
donc la base AC est égale à la base BD (I. 4),
et les autres angles de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun,
c'est à dire ceux qui sont opposés aux angles égaux (I. 4) :
donc l'angle ACB est égal à l'angle DBC.

Mais, puisque BC tombant sur les deux droites AC, BD fait le angles alternes ACB, DBC égaux entr'eux,
la droite AC est parallèle à la droite BD (I. 27) ;
et il a été démontré qu'elle lui est égale.

Donc les droites qui joignent des mêmes côtés, etc.

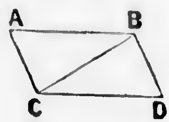
Q. E. D.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit ABDC un parallélogramme et BC sa diagonale :
je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ABDC sont égaux,
et que sa diagonale BC le partage en deux parties égales.



Car puisque AB est parallèle à CD, et que BC tombe sur eux,
les angles alternes ABC, BCD sont égaux entr'eux (I. 29).
De plus, puisque AC est parallèle à BD, et que CB tombe sur eux,
les angles ACB, CBD sont égaux entr'eux (I. 29) :
donc les deux triangles ABC, DCB ont deux angles ABC, ACB égaux aux deux anples BCD, CBD, chacun à chacun ;
ils ont de plus un côté commun BC adjacent à des angles égaux :
donc ils auront les autres côtés de l'un égaux aux autres côtés de l'autre, chacun à chacun, et le troisième angle de l'un égal au troisième angle de l'autre (I. 26),
c'est à dire AB sera égal à CD, AC égal à BD et l'angle BAC à l'angle CDB.
De plus, puisque l'angle ABC est égal à l'angle BCD,
et que l'angle DBC est égal à l'angle ACB,
l'angle total ABD est égal à l'angle total ACD.
Mais il a été démontré que l'angle BAC est égal à l'angle BDC :
donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

je dis, de plus, que la diagonale BC partage le parallélogramme en deux parties égales.

Car puisque AB est égal à CD, et que BC est commun aux deux triangles ABC, DBC,

les deux côtés AB, BC sont égaux aux deux côtés DC, CB, chacun
à chacun ;
mais l'angle compris ABC est égal à l'angle compris DCB :
donc le triangle ABC est égal au triangle DCB (I. 4).

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes, etc.
Q. E. D.

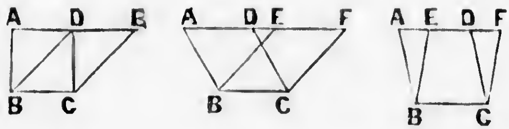
PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

Les parallélogrammes qui sont construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Soient les parallélogrammes ABCD, EBCF construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AF, BC :

je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF.



Si les côtés AD, EF des parallélogrammes ABCD, EBCF, opposés à la base BC sont terminés au même point D, c'est à dire si les deux points D, E se confondent,

il est évident que chacun des parallélogrammes est double du triangle DBC (I. 34),

et par conséquence que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF (Ax. 6).

Mais si les côtés AD, EF opposés à la base BC ne sont pas terminés au même point,

puisque ABCD est un parallélogramme,

AD est égal à BC (I. 34) ;

et par la même raison EF est aussi égal à BC :

donc AD est égal à EF ;

donc si on ajoute ou bien si on ôte la droite commune DE,

la droite totale ou la droite restante AE sera égale à la droite totale ou à la droite restante DF (Ax. 1 et 2) ;

mais AB est égal à DC (I. 34) :

donc les deux côtés AE, AB du triangle ABE sont égaux aux deux côtés DF, DC du triangle DCF, chacun à chacun ;

mais l'angle intérieur EAB est égal à l'angle exterieur FDC (I. 29) :

donc le triangle ABE est égal au triangle DCF (I. 4).

Retranchez le triangle ABE du trapèze ABCF,

et du même trapèze retranchez le triangle DCF :
donc, puisque le triangle ABE est egal au triangle DCF,
le parallélogramme restant EBCF est égal au parallélogramme restant ABCD.

Donc les parallélogrammes construits, etc.

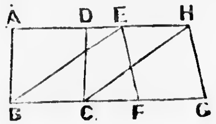
Q. E. D.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Soient les parallélogrammes ABCD, EFGH construits sur des bases égales BC, FG et entre les mèmes parallèles AH, BG:
je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EFGH.



Joignez EB, CH.

Puisque BC est égal à FG (Hyp.)
et que EH est aussi égal à FG (I. 34),
EH est égal à BC ;
mais EH est parallèle à BC (Hyp.),
et BE, CH joignent des mèmes côtés les extrémités des droites EH, BC :
or les droites qui joignent des mêmes côtés les extrémités des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles (I. 33):
donc BE est parallèle à CH ;
donc la figure EBCH est un parallélogramme ;
mais les parallélogrammes EBCH, ABCD sont construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AH, BC :
donc ABCD est égal à EBCH (I. 35).
Par la même raison EFGH est égal à EBCH (I. 35) :
donc le parallélogramme ABCD est égal au parallélogrammme EFGH (Ax. 1).

Donc les parallélogrammes construits sur des bases égales, etc

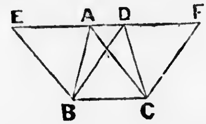
Q. E. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Soient les triangles ABC, DBC construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AD, BC :
je dis que le triangle ABC est égal au triangle DBC.



Prolongez de part et d'autre la droite AD vers les points E, F,
et par le point B menez BE parallèle à CA,
et par le point C menez CF parallèle à BD.

Les figures EBCA, DBCF sont des parallélogrammes,
et ils sont égaux entr'eux, car ils sont construits l'un et l'autre sur la même base BC et entre les mêmes parallèles EF, BC (I. 35) ;
mais le triangle ABC est la moitié du parallélogramme EBCA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (I. 34) ;
et le triangle DBC est la moitié du parallélogramme DBCF, car la diagonale DC le partage en deux parties égales ;
mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles :
donc le triangle ABC est égal au triangle DBC.

Donc les triangles construits sur la même base, etc.

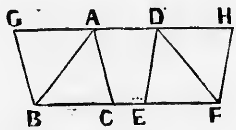
Q. E. D.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÊME.

Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Soient les triangles ABC, DEF construits sur des bases égales BC, EF et entre les mêmes parallèles BF, AD :
je dis que le triangle ABC est égal au triangle DEF.



Prolongez de part et d'autre la droite AD vers les points G, H ;
par le point B menez BG parallèle à CA,
et par le point F menez FH parallèle à ED.

Les figures GBCA, DEFH sont des parallélogrammes,
et ils sont égaux entr'eux, car ils sont construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles (I. 36).
Or le triangle ABC est la moitié du parallélogramme GBCA,
car la diagonale AB le partage en deux parties égales (I. 34) :
le triangle DEF est aussi la moitié du parallélogramme DEFH,
car la diagonale DF le partage en deux parties égales ;
mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles :
donc le triangle ABC est égal au triangle DEF.

Donc les triangles construits sur des bases égales, etc.

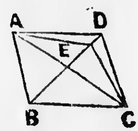
Q. E. D.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÈME.

Les triangles qui sont construits sur la même base et qui sont placés du même côté de la base, sont compris entre les mêmes parallèles.

Soient les deux triangles égaux ABC, DBC construits sur la même base BC et placés du même côté de BC :
je dis que les triangles ABC, DBC sont compris entre les mêmes parallèles.



Joignez AD :
je dis que AD est parallèle à BC.

Car si AD n'est pas parallèle à BC,
menez par le point A une droite AE parallèle à BC (I. 31),
et joignez EC.

Le triangle ABC est égal au triangle EBC,
car ces triangles sont construits sur la même base BC, et compris entre les mêmes parallèles BC, AE (I. 37).
Mais le triangle ABC est aussi égal au triangle DBC (Hyp) :
donc le triangle DBC est égal au triangle EBC,
c'est à dire que le plus grand est égal au plus petit,
ce qui est impossible :
donc la droite AE n'est point parallèle à la droite BC.
Nous démontrerons de la même manière que toute autre droite, excepté AD, ne peut être parallèle à la droite BC :
donc AD est parallèle à BC.

Donc les triangles égaux qui sont construits, etc.

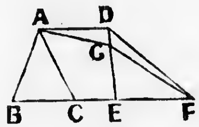
Q. E. D.

PROPOSITION XL.

THÉORÊME.

Les triangles égaux construits sur des bases égales qui forment une seule droite, et placés du même côté de cette droite, sont compris entre les mêmes parallèles.

Soient les triangles égaux ABC, DEF construits sur des bases égales BC, EF qui forment la seule droite BF, et placés du même côté de la droite BF :
je dis qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles.



Joignez AD :
je dis que AD est parallèle à BF.

Car si AD n'est pas parallèle à BF,
menez par le point A une droite AG parallèle à BF (I. 31),
et joignez GF.

Le triangle ABC est égal au triangle GEF,
car ces triangles sont construits sur des bases égales et compris entre les mêmes parallèles AG, BF (I. 38) ;
mais le triangle ABC est égal au triangle DEF (Hyp.) :
donc le triangle GEF est égal au triangle DEF,
c'est à dire que le plus petit est égal au plus grand,
ce qui est impossible :
donc AG n'est point parallèle à BF.

Nous démontrerons de la même manière que toute autre droite, excepté AD, ne peut être parallèle à BF :
donc AD est parallè à BF.

Donc les triangles égaux qui sont construits sur des bases égales, etc.

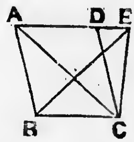
Q. E. D.

PROPOSITION XLI.

THÉORÊME.

Si un parallélogramme et un triangle ont la même base et sont compris entre les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

Soient le parallélogramme ABCD et le triangle EBC construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AE, BC :
je dis qne le parallélogramme ABCD est double du triangle EBC.



Joignez AC.

Puisque les triangles ABC, EBC sont construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AE, BC,
le triangle ABC est égal au triangle EBC (I. 37) :
mais le parallélogramme ABCD est double du triangle ABC (I. 34), car la diagonale AC le partage en deux parties égales :
donc le parallélogramme ABCD est aussi double du triangle EBC (Ax. 6).

Donc si un parallélogramme et un triangle ont la même base, etc.

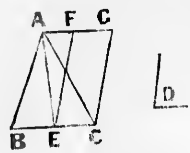
Q. E. D.

PROPOSITION XLII.

PROBLÈME.

Construire un parallélogramme qui soit égal à un triangle donné et qui ait un de ses angles égal à un angle donné.

Soit ABC le triangle donné, et D l'angle donné :
il faut construire un parallélogramme qui soit égal au triangle ABC et qui ait un de ses angles égal à l'angle donné D.



Partagez BC en deux parties égales au point E (I. 10) ;
au point E et sur la droite EC contruisez l'angle CEF égal à l'angle donné D (I. 23) ;
par le point C menez la droite CG parallèle à EF (I. 31),
et par le point A menez la droite AFG parallèle à BC, coupant EF, CG aux points F, G (I. 31) :
je dis que le parallélogramme FECG ainsi formé est égal au triangle ABC, et de plus qu'il a un angle égal à l'angle D.

Joignez AE.

Puisque les triangles AEB, AEC sont construits sur des bases égales BE, EC (Constr.), et entre les mêmes parallèles,
ces triangles sont éganx entr'eux (I. 38) :
donc le triangle ABC est double du triangle AEC ;
mais le parallélogramme FECG est aussi double du triangle AEC, car ils sont construits sur la même base EC et entre les mêmes parallèles AG, EC (I. 41) :
donc le parallélogramme FECG est égal au triangle ABC (Ax. 6) ;
et, de plus, il a un angle CEF égal à l'angle donné D.

Donc le parallélogramme FECG a été construit égal au triangle ABC et avec un de ses angles CEF égal à l'angle donné D.

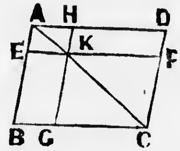
Q. E. F.

PROPOSITION XLIII.

THÉORÈME.

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ABCD dont AC est la diagonale autour de laquelle soient les parallélogrammes EH, GF :
je dis que les parallélogrammes BK, KD qu'on appelle compléments sont égaux entr'eux.



Car, puisque ABCD est un parallélogramme dont AC est la diagonale,
le triangle ABC est égal au triangle ADC (I. 34).
De plus, puisque EH est un parallélogramme dont AK est la diagonale,
le triangle AEK est égal au triangle AHK (I. 34) ;
par la même raison le triangle KGC est égal au triangle KFC :
donc le triangle AEK réuni avec le triangle KGC est égal au triangle AHK réuni avec le triangle KFC (Ax. 2) :
mais le triangle total ABC est égal au triangle total ADC :
donc les restes BK, KD qu'on appelle compléments, sont égaux entr'eux (Ax. 3).

Donc, dans tout parallélogramme, les compléments, etc.

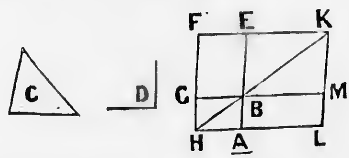
Q. E. D.

PROPOSITION XLIV.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée construire un parallélogramme qui soit égal à un triangle donné et qui ait un angle égal à un angle donné.

Soient donnés la droite AB, le triangle C et l'angle D :
il faut sur AB construire un parallélogramme égal au triangle C et qui ait un angle égal à l'angle D.



Construisez le parallélogramme BGFE qui soit égal au triangle C et qui ait l'angle EBG égal à l'angle D (I. 42), de manière que les droites AB, BE forment une seule droite AE ;
prolongez FG vers H ;
par A menez la droite AH parallèle à la droite BG ou à la droite EF (I. 31), et joignez BH.

Puisque la droite HF tombe sur les parallèles AH, EF, les angles AHF, HFE sont égaux à deux angles droits (I. 29) :
donc les angles BHF, HFE sont moindres que deux angles droits ;
mais les droites qui sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se rencontrent (Ax. 12) :
donc HB, FE étant prolongés se rencontreront ;
que ces deux droites soient prolongées (D. 2),
et supposons qu'elles se rencontrent en K ;
par le point K menez la droite KL parallèle à EA ou à FH (I. 31)
et prolongez GB, HA aux points M, L où ils coupent la droite KL
je dis que le parallélogramme AM ainsi formé est égal au triangle donné C, et de plus qu'il a un angle égal à l'angle donné D.

Puisque HFKL est un parallélogramme dont HK est la diagonale, et que AG, EM sont des parallélogrammes autour de la diagonale,

le complément AM est égal au complément EG (I. 43) ;
mais le triangle C est aussi égal à la figure EG (Constr) :
donc le parallélogramme AM est égal au triangle C.
De plus, puisque l'angle ABM est égal à l'angle opposé GBE (I. 15),
et que l'angle D est aussi égal à l'angle GBE (Constr.),
l'angle ABM est égal à l'angle D (Ax. 1).

Donc sur la droite AB un parallélogramme AM a été construit égal au triangle donné C et ayant un angle ABM égal à l'angle donné D.

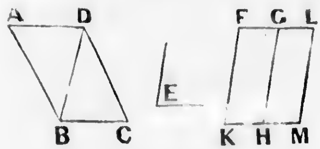
Q. E. F.

PROPOSITION XLV.

PROBLÈME.

Construire un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée et qui ait un angle égal à un angle donné.

Soit ABCD la figure rectiligne donnée et E l'angle donné :
il faut construire un parallélogramme qui soit égal à la figure ABCD et qui ait un angle égal à l'angle E.



Joignez DB.
Construisez le parallélogramme FH égal au triangle ABD et faites un de ses angles FKH égal à l'angle E (I. 42) ;
alors sur la droite GH construisez le parallélogramme GM égal au triangle DBC faisant l'angle GHM égal à l'angle E (I. 44).

Puisque l'angle E est égal à chacun des angles HKF, GHM,
l'angle GHM sera égal à l'angle HKF :
donc si nous leur ajoutons l'angle commun GHK,
les angles GHM et GHK seront égaux aux angles HKF, KHG ;
mais les angles HKF, KHG sont égaux à deux angles droits (I. 29) :
donc les angles GHM, GHK sont aussi égaux à deux angles droits.
Mais, puisque les deux droites HK, HM, placées de différents côtés, font sur la droite GH et au point H de cette droite deux angles de suite égaux à deux angles droits,
les droites HK, HM forment une seule droite KM (I. 14).

De plus, puisque GH tombe sur les parallèles FG, KM,
les angles alternes FGH, GHM seront égaux entr'eux (I. 29) :
donc, si nous leur ajoutons l'angle commun HGL,
les angles FGH, HGL seront égaux aux angles GHM, HGL ;
mais les angles GHM, HGL sont égaux à deux angles droits (I. 29) :
donc les angles FGH, LGH sont aussi égaux à deux angles droits ;
donc les droites FG, GL forment une seule droite (I. 14).

Et puisque KF est égal et parallèle à GH (Constr.),
et que ML est aussi égal et parallèle à GH,
KF sera égal et parallèle à ML (Ax. 1 et I. 30).
Mais ces droites sont jointes par les droites KM, FL :
donc la figure KM, FL sont égaux et parallèles (I. 33) ;
donc la figure KFLM est un parallélogramme ;
mais, comme la figure FH est égale au triangle ABD,
et que la figure GM est egale au triangle DBC,
le parallélogramme entier KFLM est égal à la figure entière ABCD ;
mais l'angle FKM a été construit égal à l'angle donné E.

Donc *le parallélogramme* **KFLM** *a été construit égal à la figure rectiligne donnée* **ABCD** *ayant de plus un angle* **FKM** *égal à l'angle donné* **E**.

Q. E. F.

COROLLAIRE.

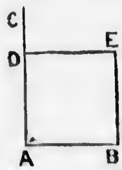
Par le moyen des propositions 44, 45 il sera facile de construire sur une droite donnée un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée et avec un de ses angles égal à un angle donné.

PROPOSITION XLVI.

PROBLÈME.

Décrire un quarré sur une droite donnée.

Soit AB la droite donnée :



il faut décrire un quarré sur AB.

Du point A menez la droite AC perpendiculaire à AB (I. 11) ;
faites AD égal à AB (I. 3) ;
par le point D menez DE parallèle à AB (I. 31),
et par le point B menez BE parallèle à AD :
je dis que la figure ABED est un quarré décrit sur AB.

Puisque DE est parallèle à AB, et BE à AD,
la figure ABED est un parallélogramme (Déf. A) :
donc la droite DE est égale à AB (I. 34),
et la droite BE est égale à AD ;
mais AD est égal à AB (Constr.) :
donc les quatre droites AB, BE, ED, DA sont égales entr'elles ;
donc le parallélogramme ABED est équilatéral.

De plus, puisque AC tombe sur les parallèles DE, AB,
les angles DAB, ADE sont égaux à deux angles droits (I. 29) ;
mais l'angle DAB est droit par construction :
donc l'angle ADE est aussi droit.
Mais les angles opposés des parallélogrammes sont égaux (I. 34) :
donc chacun des angles opposés ABE, BED est droit ;
donc le parallélogramme ABED a tous ses angles droits ;
mais nous avons démontré qu'il était équilatéral.

Donc la figure ABED est un quarré (Déf. 3), *et il a été construit sur la droite donnée AB.*

Q. E. F.

B (I. 11) ;

1),
:
r AB.

),
A) :

entr'elles ;
ral.

E, AB,
ts (I. 29) ;
:

gaux (I. 34) :
droit ;
droits ;
ral.

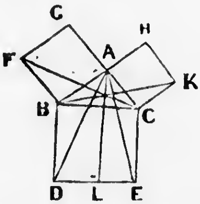
été construit

PROPOSITION XLVII.

THÉORÈME.

Dans les triangles rectangles, le quarré construit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABC un triangle rectangle dont l'angle droit est BAC :
je dis que que le quarré construit sur le côté BC est égal aux quarrés construits sur les côtés BA, AC.



Construisez le quarré BDEC sur le côté BC (I. 46);
construisez aussi les deux quarrés GB, HC sur les côtés BA, AC (I. 46);
par A menez la droite AL parallèle à BD ou à CE;
joignez FC, AD.

Puisque chacun des angles BAC, BAG est droit (Hyp. et Déf. 30),
et que les deux droites AC, AG placées de part et d'autre de la droite BA, font au point A deux angles de suite égaux à deux angles droits,
AC, AG font une seule droite GC (I. 14).
Par la même raison AB, AH forment une seule droite BH.

Puisque l'angle DBC est égal à l'angle FBA,
car chacun d'eux est un angle droit (Ax. 11),
si on leur ajoute un angle commun ABC,
l'angle entier ABD est égal à l'angle entier FBC (Ax. 2).

Et puisque AB est égal à FB, et BD à BC,
les deux côtés AB, BD sont égaux aux deux côtés FB, BC, chacun à chacun;

mais l'angle ABD compris est égal à l'angle compris FBC :
donc le triangle ABD est égal au triangle FBC (I. 4).

Or le parallélogramme BL est double du triangle ABD,
car ils sont construits sur la même base BD et entre les mêmes parallèles AL, BD (I. 41).

Le quarré BG est aussi double du triangle FBC,
car ils ont la même base FB et sont compris entre les mêmes parallèles GC, FB (I. 41);

mais les quantités qui sont doubles de quantités égales sont égales entr'elles :

donc le parallélogramme BL est égal au quarré BG.

Ayant conduit les droites AE, BK,
nous démontrerons de la même manière que le parallélogramme CL est égal au quarré HC :

donc le quarré total BDEC est égal aux deux quarrés BG, HC :
mais le quarré BDEC est construit sur le côté BC,
et les quarrés BG, HC sont construits sur les deux côtés AB, AC :
donc le quarre construit sur BC est égal aux quarrés construits sur les côtés AB, AC.

Donc dans les triangles rectangles, le quarré construit sur le côté opposé, etc.

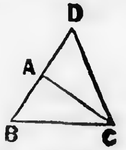
Q. E. D.

PROPOSITION XLVIII.

THÉORÈME.

Si le quarré qui est construit sur un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés construits sur les autres côtés du triangle, l'angle compris entre ces deux derniers côtés est un angle droit.

Que le quarré construit sur un côté BC d'un triangle ABC soit égal aux quarrés construits sur les deux autres côtés BA, AC :
je dis que l'angle BAC est un angle droit.



Conduisez du point A une droite AD perpendiculaire à AC (I. 11) ;
faites la droite AD égale à AB (I. 3),
et joignez DC.

Car, puisque AD est égal à AB,
le quarré construit sur AD sera égal au quarré construit sur AB.
Donc si nous ajoutons un quarré commun, celui qui est construit sur AC,
les quarrés construits sur AD, AC seront égaux aux quarrés construits sur AB, AC.
Or les quarrés construits sur AD, AC sont égaux au quarré construit sur DC (I. 47),
car l'angle DAC est un angle droit (Constr.),
et les quarrés construits sur AB, AC sont égaux au quarré construit sur BC (Hyp.) :
donc le quarré construit sur DC est égal au quarré construit sur BC ;
donc la droite DC est égale à la droite BC.
Et puisque les côtés BA, AC sont égaux aux côtés DA, AC, chacun à chacun,
et que la base BC est égale à la base DC,
l'angle BAC sera égal à l'angle DAC (I. 8) ;
mais l'angle DAC est un angle droit (Const.) :
donc l'angle BAC est un angle droit ((Ax. 11).

Donc si le quarré construit sur un des côtés d'un triangle, etc.

Q. E. D.

FIN DU PREMIER LIVRE.