Technical and Bibliographic Notes/Notes techniques et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming, are checked below.

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modification dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

- [ ] Coloured covers/ Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged/ Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated/ Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing/ Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps/ Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black)/ Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations/ Planches et/ou illustrations en couleur
- [ ] Bound with other material/ Relié avec d'autres documents
- [ ] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin/ La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure
- [ ] Blank leaves added during restoration may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming/ Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.
- [ ] Additional comments:/ Commentaires supplémentaires:

- [ ] Coloured pages/ Pages de couleur
- [ ] Pages damaged/ Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated/ Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed/ Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached/ Pages détachées
- [x] Showthrough/ Transparence
- [ ] Quality of print varies/ Qualité inégale de l'impression
- [ ] Includes supplementary material/ Comprend du matériel supplémentaire
- [ ] Only edition available/ Seule édition disponible
- [ ] Pages wholly or partially obscured by errata slips, tissues, etc., have been refilmed to ensure the best possible image/ Les pages totalement ou partiellement obscurcies par un feuillet d'errata, une pelure, etc., ont été filmées à nouveau de façon à obtenir la meilleure image possible.

This item is filmed at the reduction ratio checked below/
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10X 14X 18X 22X 26X ✓ 30X

12X 16X 20X 24X 28X 32X

The copy filmed here has been reproduced thanks to the generosity of:

Seminary of Quebec
Library

The images appearing here are the best quality possible considering the condition and legibility of the original copy and in keeping with the filming contract specifications.

Original copies in printed paper covers are filmed beginning with the front cover and ending on the last page with a printed or illustrated impression, or the back cover when appropriate. All other original copies are filmed beginning on the first page with a printed or illustrated impression, and ending on the last page with a printed or illustrated impression.

The last recorded frame on each microfiche shall contain the symbol —► (meaning "CONTINUED"), or the symbol ▼ (meaning "END"), whichever applies.

Maps, plates, charts, etc., may be filmed at different reduction ratios. Those too large to be entirely included in one exposure are filmed beginning in the upper left hand corner, left to right and top to bottom, as many frames as required. The following diagrams illustrate the method:

L'exemplaire filmé fut reproduit grâce à la générosité de:

Séminaire de Québec
Bibliothèque

Les images suivantes ont été reproduites avec le plus grand soin, compte tenu de la condition et de la netteté de l'exemplaire filmé, et en conformité avec les conditions du contrat de filmage.

Les exemplaires originaux dont la couverture en papier est imprimée sont filmés en commençant par le premier plat et en terminant soit par la dernière page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration, soit par le second plat, selon le cas. Tous les autres exemplaires originaux sont filmés en commençant par la première page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration et en terminant par la dernière page qui comporte une telle empreinte.

Un des symboles suivants apparaîtra sur la dernière image de chaque microfiche, selon le cas: le symbole —► signifie "A SUIVRE", le symbole ▼ signifie "FIN".

Les cartes, planches, tableaux, etc., peuvent être filmés à des taux de réduction différents. Lorsque le document est trop grand pour être reproduit en un seul cliché, il est filmé à partir de l'angle supérieur gauche, de gauche à droite, et de haut en bas, en prenant le nombre d'images nécessaire. Les diagrammes suivants illustrent la méthode.

1	2	3

1
2
3

1	2	3
4	5	6

182 Carton [illegible]

Mémoire lu par l'auteur, C. Baillairgé, devant la Société Royale du Canada, durant sa séance de mai 1888.

En 1383 je lisais devant cette section de la Société, un mémoire ayant pour en-tête " Suggestions aux Géomètres à l'endroit d'une nouvelle édition d'Euclide," et je viens de nouveau insister auprès des géomètres anglais (puisque c'est surtout en Angleterre que l'on persiste dans l'enseignement des Eléments sous leur forme primitive d'il y a 2000 ans) sur la nécessité, l'apropos au moins, l'avantage pour l'éducation primaire, où l'économie de temps est essentielle en ces jours de tant de nouvelles sciences, d'une refoute des Eléments d'Euclide : synonime aujourd'hui d'Eléments de de Géométrie.

Il faut enfin s'émanciper de cette étreinte à la quelle les anciens géomètres ont voulu se soumettre et avec eux leurs successeurs et commentateurs, en n'osant point se soustraire à la nécessité, purement imaginaire, de prouver comme théorêmes, par des démonstrations fort logiques, si vous voulez, mais longues et ennuyeuses, une foule de propositions des plus élémentaires, et qui se conçoivent réellement mieux sur leur simple énonciation, ou comme axiomes, ou encore comme corrollaires de définitions qu'il est facile de modifier au besoin à cet effet, tout en restant absolument dans le vrai.

Les autres sciences ont fait d'immenses progrès et toujours dans le sens de la simplification des démonstrations et des procédés. Pourquoi la géométrie dans ses propositions élémentaires et à l'étude des quelles il faut dévouer aujourd'hui beaucoup trop de temps dans l'instruction publique, resterait-elle en arrière du siècle où nous vivons.

Que de définitions ne donne-t-on point de la ligne droite : Euclide la définit *celle qui existe ou repose uniment ou également* (*ex equo* ou *equaliter* suivant Gregory et Commandine, *evenly* suivant Playfair ou *equally*) *entre ses points extrêmes.* Mais, cette définition est fautive en ce que le mot *uniment, egalement* a lui même besoin d'être défini pour que l'on sache de quelle manière il faut l'entendre.

Simpson, grand admirateur de l'auteur grec, le traduit littéralement et lui fait dire : " *A straight line is that which lies evenly between its extreme points.*" Un autre auteur, c'est Elrington, je crois, qui, après le mot *evenly* de Simson, introduit, pour expliquer ce mot, la parenthèse (c. à d. *dans la même direction*). Plusieurs auteurs définissent la ligne droite celle *dont tous les points sont dans la même direction.*

Playfair la définit " *If there be two lines which cannot coincide in two points without coinciding altogether, each of them is called a straight line,* et il tire cette définition de Boscovich, philosophe italien, qui dit " Rectam lineam rectae congruere totam toti in infinitum productum si " bina puncta unius binis alterius congruant, patet ex ipsa admodum clara rectitudinis idea quam " habemus."

Nous avons encore : " *Une ligne droite est celle qui ne peut rencontrer une autre ligne droite en plus d'un seul point,*" puis : *Une ligne droite est telle que deux de ses points étant déterminés, la position de la ligne entière l'est également* ; puis aussi : *Une ligne droite est la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre,* et une foule d'autres ; mais pas une de ces définitions ne rend la chose définie plus claire. Il faut même un raisonnement mental pour se rendre compte de la vérité de l'énoncé de Playfair, qui pour définir ce que c'est qu'une ligne droite, introduit une seconde ligne, ce qui complique encore et rend moins immédiate la perception qu'on se fait de la ligne droite comme d'une seule et même ligne dont tous les points sont dans la même direction et dont un fil tendu donne la meilleure idée.

Après avoir défini ce qu'est un angle rectiligne : *l'ouverture ou l'écartement de deux lignes droites qui se rencontrent en un point ; l'inclinaison l'une sur l'autre ou l'une à l'autre de deux lignes droites qui se rencontrent ;* le mot inclinaison n'indique-t-il point de suite que l'on doit entendre par *angles égaux ceux dont les côtés respectifs sont également inclinés.*

Après avoir dit ce que c'est qu'un *angle droit,* une *perpendiculaire,* une *oblique,* un *angle aigu, obtus,* etc., ne voit on pas que *si dans chacun de deux angles droits une ligne droite menée au sommet de l'angle et du même côté et qui divise l'angle en deux parties, fait avec l'une des deux perpendiculaires qui constitue l'angle droit, des angles égaux, cette même ligne fera aussi avec l'autre perpendiculaire dans chacun, des angles égaux,* c'est-à-dire que *si l'un de deux angles aigus composants d'un angle droit est égal à l'un des angles aigus composants d'un autre angle droit, les deux autres angles aigus seront égaux.*

Ne voit on pas aussi que ces définitions là mêmes ont évidemment pour conséquences ou corollaires, et sans en faire comme Euclide des propositions démontrables, (les théorêmes XIII, XIV et XV de son premier livre) que *les angles que fait une ligne droite avec une autre ligne et du même côté, sont ou deux angles droits, ou valent ensemble deux angles droits* ; que *la somme de tous les angles autour d'un point et du même côté d'une ligne, valent ensemble deux angles droits* ; que *les angles opposés au sommet sont égaux* ; que *les angles que forment deux lignes droites qui s'intersectent, valent ensemble quatre angles droits* ; que *tous les angles que l'on peut former autour d'un point, ne valent ensemble que quatre angles droits* ; et que *si deux lignes droites rencontrant de côtés opposés une troisième ligne, font avec cette dernière deux angles valant ensemble deux angles droits, ces deux lignes sont dans une seule et même ligne droite.*

Pour ce qui est des *lignes parallèles,* le Dr Playfair nous dit que " leur étude, leur discussion est une des plus difficiles dans les éléments de la géométrie ; " mais pourquoi cela ? uniquement parce que l'on persiste dans une preuve qui n'a aucunement sa raison d'être ; on veut prouver, démontrer ce qui par la définition même de la chose est plus saisissable, plus évidente que ne peut la rendre aucune autre explication possible ; l'on se plait comme Don Quichote à ériger des obstacles pour aller ensuite à leur rencontre. En effet n'est-ce pas admettre ce que je dis ici, lorsque Playfair après avoir démontré, comme le fait Euclide par un théorème en règle, que la somme de deux quelconques des côtés d'un triangle est plus grande que le troisième côté, vient ensuite avec un scolie où il admet que la chose est évidente parce que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ; et en quoi donc Clairaut pêchait-il en concluant à ce que la ligne menée d'un point à un autre dans une circonférence de cercle est évidemment toute entière dans le cercle (Prop. II du troisième livre) puisque l'analogie des deux énoncés est frappante, tous les points du plus long trajet par l'arc de cercle étant nécessairement en dehors de la corde qui en réunit les extrémités.

Clairaut n'a-t-il point raison de dire, qu'après avoir défini par exemple ce que c'est qu'un *cercle*, une *corde*, il fallait qu'Euclide de son temps eut affaire aux sophistes les plus obstinés pour trouver nécessaire de démontrer cette proposition. D'ailleurs le diamètre d'un cercle n'est qu'une corde passant par le centre, et ce diamètre n'est autre chose que deux rayons du cercle bout à bout, et puisque la circonférence du cercle, c'est-à-dire le cercle est partout à l'extrémité du rayon servant à le décrire, comment donc ce rayon, ce diamètre, cette corde ne serait-elle point entièrement dans le cercle.

Et bien c'est là ce qui rend difficile l'étude des lignes parallèles, essayer de les concevoir autres qu'on ne les définit : *lignes qui situées dans un même plan sont partout à la même distance, également éloignées l'une de l'autre ; lignes qui prolongées à l'infini ne peuvent jamais se rencontrer*, et c'est cette première peut-être qui des deux est la meilleure définition, car elle entraine nécessairement la conséquence ou condition exprimée dans la seconde, puisque de fait, si les deux lignes sont dans un même plan et à une distance quelconque l'une de l'autre, mais à une distance partout uniforme ou égale, elles ne peuvent se rencontrer.

Mais qui dit lignes parallèles dit aussi lignes qui sont ou qui vont ou se dirigent dans la même direction, c'est-à-dire dans la même direction par rapport à une troisième ligne qui dans le même plan se dirigerait dans un autre sens quelconque et si cette troisième intersecte ces deux lignes dites parallèles, elle sera également inclinée par rapport à chacune d'elles et formera avec chacune d'elles des angles égaux, puisque d'après la définition d'un angle rectiligne, les angles égaux sont ceux, ne peuvent être définis autres que ceux dont les côtés sont également inclinés l'un à l'autre. La définition que semble préférer d'Alembert est que *deux lignes droites sont parallèles lorsqu'il y a deux points dans l'une d'elles d'où les perpendiculaires menées à l'autre, sont égales.*

Playfair dans ses notes dit que le Duc de Candalle dans sa traduction des Elements d'Euclide en 1566 est le seul qui ait fait attention à une inexactitude de la part d'Euclide en n'ajoutant point dans les énoncés de ses Prop. XXVII, XXVIII la condition que les lignes soient dans le même plan. C'est vrai, mais comme il ne s'agit dans tout le premier livre que de géométrie plane c'est-à-dire dans un même plan et non de géométrie solide ou dans l'espace, si la nécessité dont parle Playfair existe dans ces deux cas, elle existe également dans la proposition VII où il serait alors essentiel de faire remarquer que les deux sommets ou points C, D, sont dans un même plan et de même de plusieurs autres propositions où la construction donnant une figure de plus de trois côtés, la seule qui puisse se trouver nécessairement dans un seul et même plan, rendrait nécessaire de répéter la condition.

D'ailleurs sous ce rapport de figures dont toutes les parties, comme dans tout le premier livre des Eléments, doivent être situées dans un même plan, il y a aussi à remarquer ce a quoi Euclide ni aucun de ses commentateurs, Playfair comme les autres, ne parait avoir pensé : c'est que les définitions mêmes des quadrilatères (25 à 28) exigent cette condition puisque ce n'est qu'a cette condition évidemment que le carré, le rhombe etc, peuvent exister tels que définis, car dans chacune de ces figures une moitié peut tourner autour de la diagonale réunissant deux angles opposés pour se trouver, chaque moitié de la figure dans un plan différent.

Il est vrai que dans le cas du *carré*, du *rectangle*, il faut pour que les conditions données existent que ces figures soient des figures planes, ou que toutes leurs parties, leurs lignes limitatives soient dans un même plan ; mais comme on n'est point censé le savoir, il faut le dire, ou au moins commencer la définition en disant que *le carré, le rectangle est une figure plane.....*

Pour le *rhombe*, le *rhomboïde* au contraire, quoique les données de la définition peuvent exister encore lorsque les deux moitiés de la figure autour de l'une de ses diagonales ne sont pas dans le même plan, cependant elles n'existent point toujours ; car si l'une des moitiés dont l'angle compris par les côtés est aigu, tourne autour de la moindre diagonale ou de celle qui réunit les deux angles obtus, les angles obtus se fermant, en par les moitiés se repliant ainsi pour finir par reposer l'une sur l'autre, passeront par toutes les valeurs possibles entre zéro et l'angle obtus de la figure plane et seront en un moment donné droits, ce qui est contraire à la définition qui dit que le rhombe est une figure dont tous les côtés sont égaux mais dont les angles ne sont pas droits. Donc etc.

Varignon, Bezout et plusieurs autres adoptent la définition que *les lignes parallèles sont celles qui font des angles égaux avec une troisième ligne qui les rencontre*; et c'est à cette dernière que nous inclinons en ce que à l'aide de cette définition l'on peut prouver leur égalité de distance et tous les énoncés qui vont suivre :

N'est-il donc pas évident sans les théorèmes XXVII, XXVIII et XXIX d'Euclide que *si deux lignes sont parallèles et intersectées par une troisième ligne, les angles correspondants* qu'Euclide nomme l'angle extérieur et l'angle intérieur et opposé du même côté, *sont égaux ;* que *les angles alternes sont égaux*, que *les angles opposés au sommet sont égaux ;* que *les angles interieurs du même côte sont egaux ensemble à deux angles droits*, puisque celui qui avec son adjacent forme deux angles droits, formera également deux angles droits avec tout autre angle égal à l'angle adjacent ; que *les angles alternes externes sont égaux* ; et que réciproquement *si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites fait avec elles les angles correspondants égaux, ou les angles alternes égaux, ou les angles alternes externes égaux, ou les angles intérieurs du même côté égaux ensemble à deux angles droits, ces deux lignes sont parallèles.*

Il est évident de même que *deux lignes droites perpendiculaires à une troisième ligne, sont parallèles entre elles ;* que *si deux lignes droites forment avec une troisième ligne les angles intérieurs égaux ensemble à moins que deux angles droits, ces deux lignes se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est moindre que deux angles droits ;* que *si l'un des angles est un angle droit, l'autre sera aussi un angle droit,* c'est-à-dire que *toute ligne perpendiculaire à l'une de deux parallèles est perpendiculaire à l'autre ;* enfin que puisque tous les angles aigus sont égaux et tous les angles obtus aussi égaux, *l'un des angles aigus ajouté à l'un des angles obtus formera toujours deux angles droits.*

Avant de laisser le sujet des lignes parallèles, remarquons qu'on ne voit guère la nécessité de démontrer que deux lignes parallèles à une troisième ligne sont parallèles entre elles, car, que l'on considère ces lignes parallèles sous le rapport de leur égalité de distance, ou égalité d'inclinaison par rapport à une troisième ligne, ces égalités mêmes font que les axiomes ayant trait à l'addition, à la soustraction de quantités égales rendent évidente la vérité de l'énoncé ; et l'on ne voit pas davantage la nécessité du théorème, entre autres, du 6ème livre d'Euclide à l'effet que deux triangles semblables à un troisième triangle sont semblables entre eux, puisque c'est l'égalité respective de leurs angles qui fait leur similarité et qu'il suffit d'un axiome pour l'établir.

Passons maintenant à la considération du triangle et disons avec Playfair et autres que rien n'empêche, pour la preuve, la superposition de deux triangles l'un à l'autre ou de deux autres figures planes quelconques. Euclide l'a fait lui-même dans ses IVème et VIIIème du premier livre mais s'est gardé, dit-on, de le faire, autant que possible, comme n'étant point un moyen rigoureusement mathématique, comme donnant, suivant quelques auteurs, l'idée du mouvement, et ressemblant en cela à un procédé mécanique.

Mais si ce procédé vicie le raisonnement, tout le système d'Euclide s'en trouve entaché, et la rigueur mathématique ne se trouve donc nulle part en son ouvrage, puisque, remarquons le, c'est dès le 1er théorème même de son premier livre, c'est-à-dire des éléments, des principes de son système qu'il est forcé de recourir à cette manière de faire sa preuve.

Non, c'est une idée fausse que celle qui fait regarder comme un procédé mécanique celui de la superposition des figures pour montrer leur coincidence entière ou partielle.

Un procédé mécanique est un procédé manuel ; or qu'est-ce qu'il y a de manuel en cela, rien du tout : c'est un procédé purement mental, purement imaginaire, un procédé de l'esprit dont seulement les yeux prennent connaissance. Une figure géométrique de la nature de celles sur lesquelles on raisonne dans les éléments, n'a point de substance, il ne peut donc y avoir de considération mécanique dans cette superposition purement idéale de deux figures planes.

Euclide au contraire se fut ménagé bien des démonstrations ennuyeuses et absolument inutiles, eut-il continué au besoin cette superposition parfaitement légitime, parfaitement mathématique et dont on subit pour ainsi dire la nécessité lorsque, par exemple, après avoir prouvé que les parallèlogrammes et triangles sur même base et entre mêmes parallèles, sont égaux, il nous faut pour nous soustraire au besoin de superposer ces figures, recommencer la preuve sous forme de deux théorèmes séparés et additionnels, pour démontrer que les parallèlogrammes et triangles sur bases égales et entre mêmes parallèles sont égaux. (Voir les Prop. XXXV à XXXVIII.)

C'est ici le lieu de faire deux remarques pertinentes à l'endroit de la simplification à laquelle chacun aspire dans la manière de poser un énoncé, puis de l'élucider.

Aujourd'hui, pour rendre abstraite une énonciation géométrique qui n'est pas censée se rapporter à une figure particulière de l'espèce de celles dont on traite, on a soin d'écrire l'énoncé sans les lettres de renvoi à la figure dans le texte, et la conséquence en est qu'après avoir fait tel énoncé à l'abstrait, il faut pour le rendre concret, répéter absolument la même chose en y intercalant les lettres qui renvoyent à la figure sur laquelle ou à l'aide de laquelle doit se faire l'argumentation, la démonstration de la vérité de ce que conclut l'énoncé. Eh bien ! tout ceci peut s'éviter en écrivant l'énoncé avec les lettres voulues, mais placées par exemple, entre parenthèses pour qu'on puisse tout d'abord au besoin lire l'énoncé en son abstrait, c'est-à-dire, sans les lettres, puis le relire au concret avec les lettres.

Playfair dans ses notes, dit avoir introduit au 5ème livre quelques changements ne se rapportant point à l'essence des démonstrations, mais seulement de langage, d'expression, de signes pour rendre plus succinte la preuve, en permettant d'en rapprocher les divers éléments. Il élimine les lignes ou figures de Simpson et autres pour s'en tenir à une expression plus abstraite, plus courte, qui met plus rapidement en regard les diverses mailles, les chaînons, pour ainsi dire ; qui laisse moins de distance entre les pas successifs de l'argumentation pour en rendre l'intelligence plus immédiate, plus facile.

Eh bien ! c'est encore quelque chose dans le même sens qu'il faut pour les autres livres : une suppression, diminution du nombre de lettres à dire, à prononcer. Enfin l'on ne peut évidemment réduire tout à fait à un langage algébrique, où un signe exprime toute une phrase, le langage géométrique élémentaire ; mais on peut le rendre plus concis en indiquant un angle, par exemple, par un seul signe, une seule lettre au lieu de trois ; un triangle même dans bien des cas par un seule le tre ; un parallélogramme, un quadrilatère par deux lettres : ainsi l'angle *a*, l'angle, *b*, l'angle *c*, par une lettre à son intérieur au lieu de dire l'angle A B C, l'angle B C D, l'angle C D Ee, ou le parrallélogramme A B C D, le quadrilatère B C D E et ainsi de suite.

Ce qui rend prolixe aussi la série des propositions d'Euclide, c'est le fait de ne jamais supposer une chose faite sans avoir tout d'abord démontré la possibilité de ce faire et enseigné dans ses nombreux problèmes le moyen de faire la chose. Mais ici aussi l'on ne peut admettre que ce soit là une raison suffisante pour ne pas refondre au moins le premier livre d'Euclide qui, enseignant comme il le fait, que les trois angles du triangle valent deux angles droits, ce qui permet de trouver le troisième angle quand on a les deux autres ; démontrant le carré de l'hypoténuse si utile dans la résolution d'une foule de problèmes ; indiquant la manière de décrire, de tracer, non-seulement, une perpendiculaire, une parallèle, un angle quel qu'il soit, mais la construction d'une figure rectiligne quelconque, voire même du cercle, ses rayons et diamètres, etc.; constitue pour l'Education, l'Instruction publique et primaire un des enseignements les plus précieux pour la grande classe ouvrière, industrielle du genre humain : ingénieurs, architectes, constructeurs, manufacturiers à tous les degrés et de tous les pays.

La seule utilité, comme le fait remarquer Playfair, de cette règle d'Euclide de ne jamais supposer une chose faite avant d'avoir démontré la possibilité et la manière de le faire, est afin de se garder contre les hypothèses impossibles ; mais nul ne s'avisera de nier ou de mettre même en doute la possibilité de l'existence d'une ligne parallèle à une autre, d'un angle égal à un autre, d'une bissectrice d'un angle quelconque, etc., etc.

Non, cette nécessité de faire la construction même de la figure au lieu de la supposer faite ; cette nécessité, pour la démonstration d'un théorème, n'existe point ; le Dr Playfair lui-même l'admet, et c'est en ne pas insistant ou plutôt en se soustrayant à cette obligation que l'on peut simplifier, rendre plus concises, plus faciles les démonstrations de plusieurs propositions, comme par exemple de la 5ème du même livre qui enseigne que *les angles à la base du triangle isocèle sont égaux* et que *les angles formés de l'autre côté de la base par les côtés prolongés sont aussi egaux.*

En effet, supposons que l'angle au sommet d'un triangle isocèle quelconque soit bissecté (comme on voit que la chose est évidemment possible, sans avoir encore démontré la manière de ce faire) par une ligne droite qui rencontre la base, et qu'une moitié du triangle tourne autour de la bissectrice pour aller se reposer sur l'autre ; de suite on verra la coincidence parfaite des deux angles à la base du triangle c'est-à-dire leur égalité, et en même temps celle des angles du côté opposé à la base.

De cette coincidence découlent plusieurs propositions, savoir entre autres : que *la bisectrice menée du sommet d'un triangle isocèle bissecte la base et est perpendiculaire à la base,* car les angles formés par la base de chaque côté de la bissectrice, tombant l'un sur l'autre sont égaux et la base étant une ligne droite, la somme de ces angles sera égale à deux angles droits, donc, etc. ; réciproquement qu'*une ligne menée du sommet au point milieu de la base bissecte l'angle au sommet* ; enfin qu'*une perpendiculaire menée du point milieu de la base passera par le sommet du triangle* et de là, de suite, l'indication du procédé à suivre pour *ériger une perpendiculaire à une ligne en un point donné de cette ligne.*

D'ailleurs, pour ce qui est de cette proposition telle que démontrée par Euclide et ses commentateurs et supposons même la première partie de la proposition démontrée à sa manière, pourquoi ce long procédé pour faire preuve de la seconde ; puisque de chaque côté de la figure la base forme deux angles qui pris ensemble valent deux angles droits et que les angles à la base venant d'être prouvés égaux, il suffit de l'axiome ayant trait aux quantités égales pour indiquer de suite l'égalité des deux angles extérieurs à ceux de la base ou y adjacents.

A l'endroit de la Prop. XXI. Simson blâme Clairaut d'avoir conclu à l'évidence de l'énoncé que *si des extrémités de la base d'un triangle l'on mène deux lignes à un point donné à l'intérieur du triangle, la somme de ces deux lignes* ou côtés du second triangle ainsi formé *est moindre que la somme des côtés du triangle donné, mais l'angle inclu plus grand.* Playfair trouve qu'une proposition démontrée par Pappus, et à peu près de la même manière que ce dernier par Proclus, justifie Euclide de la nécessité de faire voir la vérité de l'énoncé ci-haut. Mais la proposition de Pappus tout en justifiant jusqu'à un certain point la démonstration d'Euclide, est en réalité une toute autre proposition ; car l'énoncé d'Euclide contient la condition que les deux lignes soient menées des extrémités de la base et non pas comme dans l'énoncé de Pappus, de deux autres points quelconques de la base, ou de l'une des extrémités de la base et d'un autre point quelconque de cette base.

Il y a d'autres propositions qui peuvent s'éliminer en se réduisant à de simples corollaires par exemple, les Théorèmes IV, VII, VIII et XXVI, qui se déduisent facilement de la Prop. XXII.

En effet, il est clair qu'avec trois lignes données l'on ne peut construire qu'un seul et même triangle, car si on le construit sur la même ligne prise pour base, l'on pourra bien, si le triangle n'est pas isocèle, en faire deux du même côté, dont l'un aura son sommet à droite ou d'un côté de la perpendiculaire supposée menée au centre de la base, l'autre son sommet à gauche ou du côté opposé de la perpendiculaire ; puis du côté opposé de la base l'on en fera deux autres dans les mêmes conditions, mais il est évident que tous ces triangles pourront se renverser et se superposer l'un à l'autre pour coincider en tout ; donc

Sur la même base et du même côté de cette base il ne peut y avoir deux triangles dont les côtés menés à l'une des extrémités soient égaux l'un à l'autre et les côtés menés à l'autre extrémité de la base égaux l'un à l'autre. (Eucl. VII. 1.)

En second lieu : *si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre et leurs bases aussi égales, l'angle contenu par les deux côtés de l'un sera égal à l'angle contenu par les deux côtés de l'autre.* (Eucl. VIII. 1.)

En troisième lieu : *si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés de l'autre et l'angle contenu par les côtés de l'un égal à l'angle contenu par les côtés de l'autre ; leurs bases ou troisièmes côtés seront égaux, et les surfaces ou superficies des deux triangles seront égales, et leurs autres angles seront égaux respectivement, c'est-à-dire, ceux auxquels les côtés égaux sont opposés.* (Eucl. IV. 1.)

Et en dernier lieu (Théor. XXVI) où deux angles et un côté sont donnés pour trouver le reste, il suffit de se rappeler que deux angles donnent le troisième, pour réduire les deux parties de l'énoncé à une seule, c'est-à-dire, au cas où un côté est donné et les angles adjacents ; et de suite l'on conclut à l'invariabilité du triangle et à son assimilation au cas où les trois côtés sont donnés, ce qui nous exempte une des plus longues démonstrations de tout le premier livre des Eléments.

Voici donc encore 4 propositions séparées réduites à une seule proposition plus générale.

Quant au proviso d'Euclide que *pour rendre possible la construction du triangle, il faut que deux quelconques des côtés soient ensemble plus grand que le troisième côté,* il n'est pas essentiel de démontrer la vérité de cet énoncé comme le fait Euclide (Prop. XX) puisque la base, c'est-à-dire, la ligne droite menée entre les points extrêmes, ou angulaires de la base, étant la plus courte ligne que l'on puisse mener entre ces deux points, toute autre direction pour rejoindre ces points donne, nécessairement, la somme des deux autres côtés du triangle plus grande que la base ; et Playfair lui-même dans un scolie, à la suite de sa démonstration de l'énoncé, admet que de fait la chose est évidente, tel que nous l'avons déjà dit..

Si les côtés donnés pour construire le triangle sont égaux, le triangle sera équilatéral ; donc la prop. I. d'Euclide n'est autre chose qu'un cas particulier de la Prop. XXII et n'en devrait être qu'un corollaire.

J'élimine de même comme Prop. démontrable la XXIIIème du même livre qui propose de *faire un angle égal à un angle donné,* et qui n'est autre chose que de construire un triangle dont les côtes sont donnés, puisqu'on les prend à volonté ; car sur les deux côtés de l'angle donné, l'on n'a qu'à prendre des longueurs arbitraires, mener le troisième côté, puis faire sur la ligne donné un triangle égal au triangle ainsi donné.

Vient ensuite le problème de la *bissection d'un angle.* Or une légère modification de la construction du problème va opérer comme on le verra tout une variante dans la démonstration et prouver encore d'une manière autre que celle déjà indiquée l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle.

Soit la fig. de la Prop. IX d'Euclide et qu'au lieu de construire de l'autre côté de la base un triangle équilatéral, ce soit un triangle isocèle égal au triangle donné ou que l'on peut considérer comme donné, puisque sur les côtés de l'angle donné on prend des longueurs égales à volonté pour en relier les extrémités par une ligne qui fait la base.

Il n'y a plus qu'à mener la ligne joignant les sommets des deux triangles qui sera la bissectrice voulue. On a aussi pour corollaire, comme dans le cas où nous supposions l'angle bissecté et une moitié du triangle se repliant autour de la bissectrice pour tomber sur l'autre moitié, l'égalité des angles à la base du triangle isocèle, sans la nécessité d'en faire une preuve spéciale comme le fait Euclide à l'endroit de sa Prop. V ; car la base commune des deux triangles devient à son tour la bissectrice des angles opposés à, situés aux extrémités de la base et comme ces angles sont égaux par construction et que les moitiés de choses égales sont égales, donc etc.

Cette même construction donne comme celle d'Euclide la manière (Prop. X) de diviser une ligne en deux parties égales, et fait voir (comme Eucl. XI) le procédé à suivre pour *mener à une ligne une perpendiculaire d'un point donné hors de cette ligne.* Euclide démontre (Prop. XVIII.) que *le plus grand côté de tout triangle est opposé au plus grnd angle ;* pourquoi alors la prop. suivante (XIX) qui démontre par une réduction à l'absurde que *le plus grand angle de tout triangle est opposé au plus grand côté.*

En effet cette « réduction à l'absurde » se fait de suite et mentalement sous cette forme que si dans tout triangle que l'on puisse concevoir, il est démontrable que le plus grand côté est opposé au plus grand angle, il ne peut exister de triangle où ce ne soit point le cas.

Disons aussi ici de la Prop. VI que quoique la preuve directe s'en puisse faire et ressort immédiatement de la preuve faite de la proposition inverse, une mentale réduction à l'absurde en fait aussi foi ; car si de tous les triangles isocèles possibles l'on peut prouver que les angles à la base sont égaux, il ne peut y en avoir où ce ne soit pas le cas.

Pourquoi aussi faire des énoncés des Prop. XVI et XVII (à l'effet que *l'angle extérieur d'un triangle est plus grand que son angle intérieur et opposé* et que *deux angles d'un triangle valent ensemble moins que deux angles droits*) des démonstrations séparées, puisque ces vérités ressortent directement de la Prop. plus générale XXXII que *l'angle extérieur vaut les deux angles intérieurs et opposés* et que *les trois angles d'un triangle valent deux angles droits* ; car pour démontrer cette dernière Prop. il suffit de supposer la parallèle voulue pour voir de suite la vérité de l'énoncé se reposer sur les égalités déjà établies à l'endroit de l'étude des lignes parallèles intersectées par une troisième ligne. Donc voilà encore trois propositions fondues en une seule, et maintenant qu'on sait faire un angle égal à un angle donné, la parallèle supposée peut se remplacer par une ligne réelle de même nom. (Eucl. XXXI.)

Je ne vois aucune amélioration à faire à la preuve, par Euclide, du fait que dans tout triangle le plus grand côté est opposé au plus grand angle et réciproquement, non plus que des deux théorèmes XXIV et XXV ayant trait aux triangles qui, sous deux côtés réciproquement égaux, ont des angles inclus différents, des bases inégales ; sauf comme je l'ai dit, à raccourcir la preuve en nommant les angles par les seules lettres à leurs sommets respectifs, au lieu de taxer davantage la mémoire en répétant constamment les trois lettres situées aux angles des figures.

Nous voilà maintenant en présence des Prop XXXIII et XXXIV d'Euclide à l'effet que *les lignes droites qui relient les extrémités de deux lignes droites et parallèles sont égales et parallèles* ; puis, que *les côtés et les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux et que la diagonale bissecte le parallélogramme.*

Commençons par le second de ces théorèmes et le premier en tirera toutes ses conclusions.

La Prop. XIII, enseigne à *faire un parallélogramme égal à un triangle donné*, ce que d'ailleurs l'on aurait pu tirer, par un simple corollaire, de la Prop. précédente qui enseigne que *sur même base et entre parallèles, le triangle est moitié du parallélogramme ;* au lieu de recommencer toute la construction.

Prop. XLIII, fait voir l'égalité des compléments des deux parallélogrammes autour du diamètre du parallélogramme entier.

Pourquoi donc alors, au lieu de recommencer toute la construction dans la figure suivante, ne pas déduire de suite et par corollaire du théorème, la manière de *faire* le problème : celui d'*un rectangle donné sur une base donnée.* Il suffirait de dire : soit donc E G égal, (construit par le dernier problème) au triangle donné et H K la ligne donnée, que l'on disposera en continuation de G K sur une même droite G H ; prolonger B E en A, mener par le point H, A D parallèle à E K ; prolonger B G en C, mener A K C ; en C faire C D parallèle à G H et prolonger E K en F, H F sera la figure voulue.

Mais voici qu'à la Prop. XLV l'on recommence toute cette construction, toute cette preuve pour en venir à enseigner comment s'y prendre pour *faire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée, sous un angle donné*, au lieu de dire simplement :

" Si donc le parallélogramme F H est fait égal à l'un des triangles composants de la figure donnée, et que le parallélogramme équiangle G M égal à l'autre triangle composant de la figure (si c'est un quadrilatère ou à un des autres triangles composants, si c'est une figure de plus de quatre côtés) lui soit appliqué, et que l'on continue ainsi le procédé avec les autres triangles composants, l'on aura enfin la figure F M voulue.

Avant de passer au carré de l'hypoténuse Prop XLVII, Euclide nous rend le service d'un problême en règle pour nous dire comment sur une ligne donnée, on construit un carré ; mais pourquoi cela, puisque déjà l'on sait faire un parallélogramme sur une ligne donnée et sous un angle donné, et que la construction peut s'en indiquer en quelques mots comme simple cor. ou scolie.

Voilà enfin le carré de l'hypoténuse et pourquoi est-ce le " pont des ânes," simplement par la prolixité de la preuve qui crée dans l'esprit un parfait enlacement d'angles et de triangles se croisant dans tous les sens. Je dis d'angles, par ce que cette manière de désigner chaque angle par 3 lettres au lieu d'une seule quand la chose est possible sans équivoque, fait que tout se mêle dans l'esprit de l'élève et qu'avant d'en être rendu à la moitié de la preuve il en a déjà oublié le commencement.

Prenons la figure d'Euclide, supprimons la ligne B K pour n'opérer que d'un côté de la perpendiculaire A L, puisque de la preuve de ce côté l'on conclura de suite à celle de l'autre. Ecrivons en B, a, b, c, pour les trois angles contigus et disons : b étant commun, a et c droits on a a et b égal c et b, d'où les triangles E B C, D B A dont les côtés égaux E B, B C — A B, B D comprennent respectivement des angles égaux, sont égaux ; or le triangle E B C est moitié du carré B G sur même base et entre mêmes parallèles, et le triangle ABD est de même moitié du rectangle B L, et d'après l'axiome les moitiés sont comme les touts, donc B L = B G. Donc aussi L C = C H, donc D C = B G + C H, donc etc.

Il est à peine nécessaire de dire que je n'ai point voulu encourir le risque de faire des suggestions aux Géomètres d'outremer sans me sentir fondé à le faire et c'est pourquoi j'ai moi-même, récrit au fur et à mesure de ces remarques, tout le Premier Livre des Eléments dont il s'agit. Je l'ai écrit avec le même enchaînement logique que celui qui existe si admirablement sous ce rapport, entre tous les chaînons de la trame entière de l'auteur grec, tel que commenté par le Dr Playfair, supposant il est vrai quelquefois une chose faite qui d'évidence peut se faire comme la bissection d'un angle, avant d'avoir démontré comment le faire ; mais ne supposant jamais dans un théorème une chose prouvée ou démontrée sans qu'elle le fut déjà dans une proposition précédente.

Ma version de ce premier livre de l'Euclide de Playfair contient sans en excepter une seule toutes les conclusions contenues dans les propositions (Théorèmes comme Problèmes) corollaires et scolies de Playfair.

Il n'y a que les Problèmes, Prop. II et III dont je n'aie point fait mention, savoir : " *D'un point donné mener une ligne droite d'une longueur donnée*, et, *de la plus grande de deux lignes droites retrancher une partie égale à la moindre*" persuadé que je le suis que chacun admettra que l'on peut de ces deux propositions faire des postulats ou les déduire comme corollaires ou scolies, la première du 2nd postulat, la seconde du 3ème postulat, d'Euclide.

Dans mon mémoire sur ce sujet, dont j'ai parlé en commençant, comme ayant été lu ici en 1883, je n'avais point encore tout élaboré, tout récrit ce premier livre des Eléments, pour me convaincre de la possibilité, avec mon système de preuve, de poursuivre d'une manière parfaitement logique toute la série des cent et quelques vérités mathématiques élémentaires auxquelles concluent l'auteur grec et son commentateur Playfair.

J'étais encore moi-même sous le coup de ce sentiment de crainte presque révérentielle que l'on subit et à laquelle il est si difficile de se soustraire quand on est ainsi en présence de ce que les siècles ont épargné. Je ne pouvais encore à cette date complètement m'émanciper de l'étreinte dont j'ai parlé ; j'avais presque tout entrevu, mais point tout.

Il restait la comparaison des égalités et inégalités des triangles sous les diverses données que l'on peut en proposer pour les résoudre savoir : les trois côtés—un côté et les angles adjacents—un côté, un angle adjacent et un angle opposé—deux côtés et l'angle inclus—enfin deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux—le cas des trois angles donnés n'admettant autre solution que celui d'un triangle équiangle à un triangle donné.

Je craignais comme Euclide la supposition d'une chose faite, dont la manière de faire n'avait pas encore été démontrée, je craignais la méthode de la superposition comme n'étant point d'une mathématique rigueur ; mais enfin je me suis soustrait à ces craintes non fondées et fort de l'appui de Playfair lui-même, je viens aujourd'hui demander avec instance aux géomètres anglais de l'Europe de revoir enfin ce premier livre au moins des Elements, si non les autres, et de faire un travail dont va bénéficier toute l'humanité scolaire de par le monde.

Et qu'on n'oublie point une chose sur laquelle j'insiste comme plus essentille qu'on ne le pense dans les démonstrations des théorèmes : l'expression, d'un angle surtout, autant que possible par la seule lettre placée à son sommet, quand il n'y a pas de danger de se méprendre sur l'angle que l'on veut exprimer, ou dans le cas contraire d'une lettre italique placée à son intérieur ; certain que je le suis et que chacun doit l'être que rapprochant ainsi les éléments de la preuve on en saisira mieux les rapports, les égalités, les différences — tout de même que quand on se sert comme en algèbre de lettres comme a + b = c — d pour indiquer par exemple des quantités numériques, on voit mieux le procédé que si l'on écrivait 353 + 475 = 937 — 109 ; ou, l'angle A B C plus l'angle D B C est égal à l'angle E F H moins l'angle M N O ; ou encore, le quadrilatère A B C D plus le triangle E F N est égal au parallélogramme M N O P moins le triangle F R S.

Comme je l'ai dit, j'ai moi-même récrit le livre (premier d'Euclide) pour me convaincre de l'exactitude de tout ce qui est ici consigné; mais ne voulant point autrement m'imposer je laisse la tâche d'éditeur à de plus jeunes, de plus habiles commentateurs.

Déjà mon premier travail de 1863 dans le sens de la simplification des Eléments d'Euclide, a été apprécié en Angleterre, d'ou j'ai reçu en 1886 un diplôme honorifique de

" Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Londres."

Puisse maintenant ce mémoire supplémentaire avoir l'effet d'engager à y donner suite dans les intérêts de l'Education.