Technical and Bibliographic Notes/Notes techniques et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming, are checked below.

- [ ] Coloured covers/ Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged/ Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated/ Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing/ Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps/ Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black)/ Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations/ Planches et/ou illustrations en couleur
- [ ] Bound with other material/ Relié avec d'autres documents
- [ ] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin/ La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure
- [ ] Blank leaves added during restoration may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming/ Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.
- [ ] Additional comments:/ Commentaires supplémentaires:

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modification dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

- [ ] Coloured pages/ Pages de couleur
- [ ] Pages damaged/ Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated/ Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed/ Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached/ Pages détachées
- [x] Showthrough/ Transparence
- [ ] Quality of print varies/ Qualité inégale de l'impression
- [ ] Includes supplementary material/ Comprend du matériel supplémentaire
- [ ] Only edition available/ Seule édition disponible
- [ ] Pages wholly or partially obscured by errata slips, tissues, etc., have been refilmed to ensure the best possible image/ Les pages totalement ou partiellement obscurcies par un feuillet d'errata, une pelure, etc., ont été filmées à nouveau de façon à obtenir la meilleure image possible.

This item is filmed at the reduction ratio checked below/
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10X		12X		14X		16X		18X		20X		22X		24X		26X		28X		30X		32X
												✓										

The copy filmed here has been reproduced thanks to the generosity of:

Seminary of Quebec
Library

The images appearing here are the best quality possible considering the condition and legibility of the original copy and in keeping with the filming contract specifications.

Original copies in printed paper covers are filmed beginning with the front cover and ending on the last page with a printed or illustrated impression, or the back cover when appropriate. All other original copies are filmed beginning on the first page with a printed or illustrated impression, and ending on the last page with a printed or illustrated impression.

The last recorded frame on each microfiche shall contain the symbol —► (meaning "CONTINUED"), or the symbol ▽ (meaning "END"), whichever applies.

Maps, plates, charts, etc., may be filmed at different reduction ratios. Those too large to be entirely included in one exposure are filmed beginning in the upper left hand corner, left to right and top to bottom, as many frames as required. The following diagrams illustrate the method:

L'exemplaire filmé fut reproduit grâce à la générosité de:

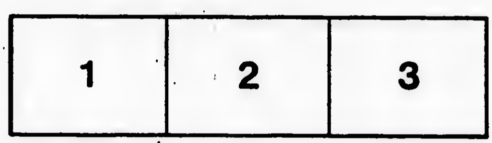
Séminaire de Québec
Bibliothèque

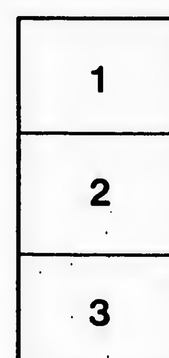
Les images suivantes ont été reproduites avec le plus grand soin, compte tenu de la condition et de la netteté de l'exemplaire filmé, et en conformité avec les conditions du contrat de filmage.

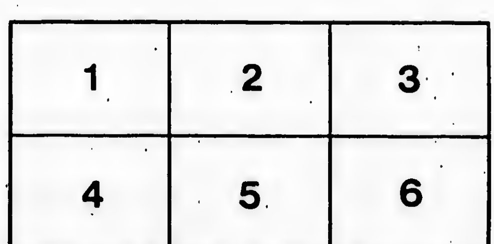
Les exemplaires originaux dont la couverture en papier est imprimée sont filmés en commençant par le premier plat et en terminant soit par la dernière page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration, soit par le second plat, selon le cas. Tous les autres exemplaires originaux sont filmés en commençant par la première page qui comporte une empreinte d'impression ou d'illustration et en terminant par la dernière page qui comporte une telle empreinte.

Un des symboles suivants apparaîtra sur la dernière image de chaque microfiche, selon le cas: le symbole —► signifie "A SUIVRE", le symbole ▽ signifie "FIN".

Les cartes, planches, tableaux, etc., peuvent être filmés à des taux de réduction différents. Lorsque le document est trop grand pour être reproduit en un seul cliché, il est filmé à partir de l'angle supérieur gauche, de gauche à droite, et de haut en bas, en prenant le nombre d'images nécessaire. Les diagrammes suivants illustrent la méthode.







DEMONSTRATION GENERALE

ET

DISCUSSION

DE LA

FORMULE STÉRÉOMÉTRIQUE

BAILLAIRGE.

Par l'abbé N. Mainguy

co
es
si

fé

ta
ba

pr
pr
co
et
et
vi
de
co
v

m
re
ri

co

DEMONSTRATION GENERALE

ET

DISCUSSION

DE LA

FORMULE STÉRÉOMÉTRIQUE

BAILLAIRGÉ.

Chercher le volume d'un corps c'est chercher combien de fois il contient un autre corps lequel est pris pour unité de volume et qui est un cube dont le côté est l'unité de longueur—Delà vient l'expression " cuber un corps. "

Il est facile de trouver la solidité d'un cube dont le côté est différent de l'unité.

On démontre avec autant de facilité qu'un parallélipipède rectangle et droit est égal au produit continu des 2 dimensions de sa base et de sa hauteur.

Quoique ce soit un peu plus long, on démontre aisément qu'un prisme triangulaire, et par suite qu'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur. Au contraire quand il s'agit des corps non-prismatiques, les démonstrations sont longues et difficiles et les formules qui donnent le volume de ces solides sont très variées et d'une application souvent peu aisée. La raison de cette différence vient de ce que les prismes, ayant une grosseur uniforme, peuvent se décomposer en tranches égales superposées et qu'ainsi on peut les considérer comme formés par la trace d'une de ces tranches se mouvant parallèlement à elle-même.

Dans les autres corps, si on les suppose engendrés par le mouvement d'une tranche, à hauteur infiniment petite, cette tranche ne reste pas constamment la même ; elle varie en grandeur, et cette variation n'est pas la même pour tous les corps.

Voyons un peu comment se fait cette variation.

Je prends une surface plane à contours définis ; je fais mouvoir cette surface parallèlement à elle-même, et d'un mouvement uniforme, de sorte que un point quelconque de cette surface décrive, dans ce mouvement, une ligne droite ; j'obtiens *un prisme.*

Mais je reprends l'expérience ci-dessus, avec les mêmes précautions ; seulement je m'arrange pour que, à intervalles de temps égaux, la surface diminue ou augmente dans le même rapport soit géométrique soit arithmétique. Ainsi v. g. je suppose que dans la seconde position le plan générateur ait diminué de $\frac{1}{4}$, relativement à ce qu'il était dans la première position ; que dans la cinquième position, il ait diminué de $\frac{1}{4}$ relativemant à ce qu'il était dans la quatrième position. En d'autres termes, je suppose que la surface du plan soit exprimée par A dans la *1ère* position et par $\frac{3\,A}{4}$ dans la *2de* position et par $\frac{9\,A}{16}$ dans la *3me* position et ainsi de suite.

Faisons une autre application et exprimons par A la surface du plan dans la *1ère* position et supposons qu'elle diminue de *b* à chaque nouvelle position,

dans la *2me*	position,	la surface	du Plan sera	A — b
" *3me*	"	"	"	A — 2 b
" *4me*	"	"	"	A — 3 b

jusqu'à ce qu'on arrive à $A - nb = 0$.

Ce qui est clair c'est que j'obtiendrai un solide différent suivant la variation du plan générateur ; mais il est également clair que, avec un plan déterminé variant dans un rapport fixé, et à des intervalles ou distances spécifiés, je ne pourrai obtenir qu'un seul et même corps et cela toutes les fois que je me poserai les mêmes conditions, *i–e*, la même loi.

Donc, réciproquement, dans un corps en particulier v. g. une sphère, un ellipsoïde, la surface *s* des sections équidistantes et parallèles varient suivant une certaine loi.

Maintenant quelle est cette loi ? J'ai supposé qu'une surface, une tranche, était exprimée en fonction de la voisine ; mais il vaut mieux exprimer le terme général qui les représente toutes et chacune en particulier, de même qu'au lieu de dire qu'un terme *x* d'une progression géométrique est égal au terme précédent multiplié par le rapport *p*, on préfère exprimer le terme général en fonction du premier terme *a* et dire $x = ap^{n-1}$

Or pour les solides en question le choix de la variable est facile à faire, et il est tout naturel d'exprimer une surface quelconque en fonction de sa distance à une des 2 bases parallèles.—Cette variable aura un coefficient et un exposant et l'expression aura un ou plusieurs termes.

Jusqu'ici les mots *tranches* et *surfaces* ont été employées indistinctement, parce qu'on peut se représenter une surface comme une tranche d'une épaisseur infiniment petite. D'ailleurs dans un instant toute confusion sera écartée.

Je dis donc que le terme général représentant les surfaces *s* sera une expression de la forme $s = A x^{m} + C x^{n} + D x^{p} \cdots\cdots\cdots\cdots$ Avec ces données, j'essaye de cuber un corps non-prismatique P, de hauteur H, et dont les bases B inférieure, et B' supérieure sont parallèles.

Pour ramener ce cas à l'évaluation d'un prisme, il faut se rappeler que ce corps P peut être supposé engendré par un plan B se mouvant d'une extrémité de H à l'autre.

En d'autres termes je partage *H* en *n* parties indéfiniment petites et par les points de division je mène (*n*–1) plans et sur ces (*n*–1) sections ainsi que sur la base B' je construis *n* prismes. Or il est très aisé de démontrer que plus *n* augmente, plus la somme des *n* prismes approche du volume P. qui en est conséquemment la limite : car l'erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Tous ces prismes auront une hauteur commune $h = \frac{H}{n}$ et chacun aura pour solidité le produit de *h* par une des bases, disons, par la base supérieure. Je désigne par $s, s', s'', \ldots\ldots\ldots\ldots s^{(n-1)}$ ces différentes bases supérieures des prismes, en commençant par la plus voisine de B. jusqu'à la base $B' = s^{(n-1)}$ par convention.

Donc le volume de P sera exprimé par

$$P = hs + hs' + hs'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + hs^{(n-1)}$$

ou bien

$$P = h \left\{ s + s' + s'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + s^{(n-1)} \right\}$$

ou encore en disposant verticalement les termes dans la parenthèse

$$P = h \times \left\{ \begin{array}{l} s \\ s' \\ s'' \\ , \\ , \\ , \\ s^{(no-1)} \end{array} \right.$$

mais le terme général de la valeur des *s*, en fonction de la distance de chaque surface à la base B′ est

$$s = A x^{m} + C x^{n} + D x^{p} +$$

a pari $s' = A x,^{m} + C x,^{n} + D x,^{p} +$

$$s'' = A x,,^{m} + C x,,^{n} + D x,,^{p} +$$

Remplaçant donc tous les s, s', s'' etc., par ces expressions on aura

$$P = h \times \left\{ \begin{array}{lllll} A\,x^{m} & +\,C\,x^{n} & +\;D\,x^{p} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A\,x_{,}^{m} & +\,C\,x_{,}^{n} & +\;D\,x_{,}^{p} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \quad \text{‘} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A\,x^{m}_{(n-1)} & +\,C\,x^{n}_{(n-1)} & +\;D\,x^{p}_{(n-1)} & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right\}$$

Reste à additionner tous les termes en dedans de la parenthèse ; et pour plus de facilité, je commence par la première rangée verticale, renfermant les termes ayant pour coefficient *A* et pour exposant m.

La distance entre deux surfaces voisines étant la même ou *h*, et *x* appartenant à la surface *s* voisine de B, cet *x* égale H – h. Par la même raison x, appartenant à s' voisine de s, cet x, égale (H – h) – h = H – 2 h et ainsi de suite $x_{,,} = H - 3\,h$ et enfin $x_{(n-1)} = H - nh$.

Conséquemment

$$\left\{ \begin{array}{l} A\;x^{m} \\ A\;x_{,}^{m} \\ A\;x_{,,}^{m} \\ \quad \text{‘} \\ \quad \text{‘} \\ \quad \text{‘} \\ A\;x^{m}_{(n-1)} \end{array} \right\} = A \times \left\{ \begin{array}{l} x^{m} \\ x_{,}^{m} \\ x_{,,}^{m} \\ \quad \text{‘} \\ \quad \text{‘} \\ \quad \text{‘} \\ x^{m}_{(n-1,} \end{array} \right\} = A \times \left\{ \begin{array}{l} (H-h)^{m} \\ (H-2h)^{m} \\ (H-3h)^{m} \\ \text{‘} \quad \text{‘} \\ \text{‘} \quad \text{‘} \\ \text{‘} \quad \text{‘} \\ (H-nh)^{m} \end{array} \right\}$$

Or $(H-h)^{m}$ égale

$$\left(H^{m} - m\,h\,H^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.}\,h^{2}\,H^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

Le développement des autres binômes ne diffère de celui-ci qu'en ce qu'il faut remplacer *h* par 2*h*, ensuite *h* par 3*h*, tout le reste étant le même pour tous. Pour simplifier je remplace

$$\begin{array}{llll} m, & \dfrac{m\,(m-1)}{1.\,2}\,, & \dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} & \text{etc par} \\ a & \quad b & \quad\quad c & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La Somme cherchée devient donc

$$A \times \left\{ \begin{array}{l|l|ll|ll|ll|l} & \quad{}^{m} & & {}^{m-1} & & {}^{m-2} & & {}^{m-3} \qquad\qquad + & {}^{m} \\ 1 & H-1 & a\,h\,H & \cdot\;\; 1^{2} & b\,h^{2}\,H & -\;\;1^{3} & c\,h^{3}H & \div \ldots\ldots -1^{m} & h \\ 1 & \;\;-2 & & +\;\;2^{2} & & -\;\;2^{3} & & \qquad\qquad\;\, \pm 2^{m} & \\ 1 & \;\;-3 & & +\;\;3^{2} & & -\;\;3^{3} & & \qquad\qquad\;\, \pm 3^{m} & \\ 1 & \;\;-4 & & +\;\;4^{2} & & -\;\;4^{3} & & \qquad\qquad\;\, \pm 4^{m} & \\ \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & & \quad\;\;\; \text{‘} & & \quad\;\;\; \text{‘} & & \qquad\qquad\quad\;\; \text{‘} & \\ \text{‘} & \quad\;\; \text{‘} & & \quad\;\;\; \text{‘} & & \quad\;\;\; \text{‘} & & \qquad\qquad\quad\;\; \text{‘} & \\ 1 & \;\;-n & & +\;\;n^{2} & & -\;\;n^{3} & & \qquad\qquad\;\, \pm n^{m} & \end{array} \right\}$$

Ici les termes des colonnes verticales sont semblables et il n'y a plus qu'à prendre la somme des coefficients, qui ne sont autres que les puissances successives de la suite naturelle des nombres de 1 jusqu'à *n* 1 Je les indique s_1^n, s_2^n, s_3^n, l'indice 1, 2, 3........... indiquant le degré de la puissance à la-quelle les nombre 1, 2, 3, 4.... n sont élevés.

Avec ces notations la somme cherchée est

$$A \left\{ n.\, H^m - S_1^n\, a h H^{m-1} + S_2^n\, b h^2 H^{m-2} - \dots\dots + S_m^n\, h^m \right\}$$

mais en général $S_m^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ avec une suite de termes renfermant les puissances décroissantes de *n* ; or dans le cas actuel, $h = \frac{1}{\infty}$, et $n = \infty$, et il suffit de prendre le terme en (n^{m+1}) qui est véritablement la limite de S^n, ce qui donne,

$$A \left\{ n.\, H^m - \frac{n^2}{2} a h H^{m-1} + \frac{n^3}{3} b h^2 H^{m-2} \dots \pm \frac{n^{m+1}}{m+1} h^m \right\}$$

Faisant passer *n* hors de la parenthèse.

$$n A \left\{ H^m - \frac{a}{2} n h H^{m-1} + \frac{b}{3} n^2 h^2 H^{m-2} - \dots\dots\dots\dots \pm \frac{\ }{m+1} n^m h^m \right\}$$

Mais $nh = H$, $n^2 h^2 = H^2$; comme aussi $H.\, H^{m-1} = H^m$ et $H^2 \times H^{m-2} = H$

La somme revient donc à

$$n A \left\{ + \frac{1}{1} H^m - \frac{a}{2} H^m + \frac{b}{3} H^m \dots\dots\dots\dots \pm \frac{1}{m+1} H^m \right\}$$

Comme on se le rappelle les numérateurs 1 , a , b , c , ... 1 ne sont que les coefficients du binôme $(H-h)^{m.}$; on sait que la somme algébrique de ces co-efficients pour $(H-h)^m$, égale zéro ; mais quelle est leur somme, lorsqu'ils ont été divisés, comme ci-dessus, par

1 , 2 , 3 , 4 , ...m+1

Rappelons-nous que dans cet (m + 1), m est rigoureusement le même que l'exposant de *h*, et non pas de *H*. Quand l'exposant m, dans h^m est le même que celui de H, dans H^m, i-e quand la puissance développée est entière et positive, on démontre que la somme algébrique des co-efficients ainsi divisés égale $+ \frac{1}{m+1}$

En conséquence de la similitude des termes,

$$n A \left\{ \frac{1}{1} H^m - \frac{a}{2} H^m + \frac{b}{3} H^m .. + \frac{1}{m+1} H^m \right\} = n A \frac{H^m}{m+1}$$

Donc la somme des termes de la première rangée verticale

$$A x^m + A x_1^m .... + A x_{n-1}^m = \frac{n}{m+1} A H^m$$

Je remarque le co-efficient A ainsi que l'exposant m paraissent dans les deux membres de l'équation et j'en conclus qu'il en serait de même si au lieu de *A* et *m* j'avais *C* et *n* ou bien *D* et *p*

D'ailleurs la seule restriction apportée pour arriver à faire la somme ci-dessus c'est que la puissance soit entière et positive. Donc je puis remplacer m, n, p pour les nombres 0, 1, 2, 3, 4 ......, et ainsi lorsque la loi régissant les *s* sera exprimée par

$$S = A x^0 + C x^1 + D x^2 + E x^3 + ... + U x^m$$

le volume sera représenté par

$$P = h \times \left\{ \frac{n}{0+1} A H^0 + \frac{n}{1+1} C H^1 + \frac{n}{2+1} D H^2 + ... \right.$$

$$\left. .... + \frac{n}{m+1} U H^m \right\}$$

Faisant passer *n* hors de la parenthèse et comme $n h = H$, j'obtiens enfin

$$P = H \times \left\{ A + \frac{C}{2} H + \frac{D}{3} H^2 .... + \frac{U}{m+1} H^m \right\}$$

Telle est la formule qui donne le volume d'un corps dans lequel les surfaces des sections équidistantes et parallèles aux bases sont régies par une loi dont le terme général serait

$$S = A + C x + D x^2 + ... + U x^m$$

J'appelle cette formule, *formule du prisme équivalent*, puisqu'elle montre que le corps non-prismatique P est égal au volume d'un prisme de même hauteur H, mais dont la base

$$\left(A + \frac{C}{2} H + \frac{D}{3} H^2 .... \frac{U}{m+1} H^m \right)$$

est *une base moyenne* entre toutes les surfaces régies par $s = A + C x + D x^2$..............

Mais il faut remarquer que rien n'est venu préciser davantage les co-efficients indéterminés A, C, D etc, de sorte que dans un cas particulier si on voulait trouver le volume d'un corps, il faudrait déterminer les valeurs de A, de C.............., à moins de tourner la difficulté.

Ainsi que nous le verrons plus tard, dans la plupart des cas pratiques, la loi qui régit les surfaces parallèles aux bases ne renferme que x^0, x^1, et x^2 et la formule du volume se réduit à

$$P = H \times \left(A + \frac{C}{2} H + \frac{D}{3} H^2\right);$$

réduisant les trois termes au dénominateur 6, puis faisant passer celui-ci hors de la parenthèse, on a

$$P = H \times \left(A + \frac{C}{2} H + \frac{D}{3} H^2\right) = \frac{H}{6}\left(6A + 3CH + 2DH^2\right)$$

Puisque la 1ère parenthèse renfermait une surface, la 2me doit en renfermer six ; voyons ce que peuvent être ces six surfaces dans un corps quelconque.

Il est naturel de prendre d'abord les bases, (la loi des surfaces est $S = A + Cx + Dx^2$,)

La base supérieure $= A$ car ici $x = 0$

la base inférieure $= A + CH + DH^2$ car ici $x = H$

leur somme $= 2A + CH + DH^2$ et

$6A + 3CH + 2DH^2 - 2A - CH - DH^2 = 4A + 2CH + DH^2$ qui évidemment égale 4 fois $\left(A + C\frac{H}{2} + D\left(\frac{H}{2}\right)^2\right)$ surface de la section faite à mi-hauteur

Donc lorsque dans un corps P, $S = A + Cx + Dx2$

$$P = \frac{H}{6} \times (B + B' + 4M) \begin{cases} B' = \text{Base supérieure} \\ B = \text{Base inférieure} \\ M = \text{Surface d'une section parallèle à mi-hauteur.} \end{cases}$$

Comme cela la difficulté est bien tournée puisqu'en évaluant, par la méthode élémentaire, les surfaces B, B', et M, je suis certain de comprendre les coefficients A, C, D sans avoir besoin de les calculer.

Cette formule, comme on peut s'en convaincre, comprend les cas où l'on aurait $S = A + Cx + Dx^2 + Ex^3$ ou bien un ou plusieurs de ces quatres termes. Ainsi elle s'applique même aux Prismes.

Cette formule $P = \frac{H}{6}(B + B' + 4M)$ est la formule stéréométrique que M. Chs. Baillargé travaille à vulgariser ; elle a l'immense avantage de pouvoir remplacer toutes les autres formules de stéréométrie ; nous en parlerons plus loin.

NOTE SUR

DEUX FORMULE D'ALGEBRE.

1° $S^n_m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ Si $n = \infty$

Réellement $S^n_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + K\,n^m + K1n^{m-1} + K_2 n^{m-2}$ etc.

En voici une démonstration élémentaire : elle consiste à faire la somme des puissances $\overline{m+1}$ de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5,...... jusqu'à $\overline{n+1}$ ou pour mieux dire de 0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1 ...... jusqu'à n + 1 : ce qui ne change rien puisque les 2 séries sont égales — Donc on a

$$(0+1)^{m+1} = 0 \quad 0 \quad 0 \quad +1$$

$$(1+1)^{m+1} = 1^{m+1} + (m+1)\,1^m + \frac{(m+1)\,m}{1.2}\,1^{m-1} + .. + 1$$

$$(2+1)^{m+1} = 2^{m+1} + (m+1)\,2^m + \frac{(m1)+m}{1.2}\,2^{m-1} + .. + 1$$

$$([n-1]+1)^{m+1} = \quad , \quad , \quad , \quad ,$$

$$(n \times 1)^{m \times 1} = n^{m+1} + (m+1)\,n^m + \frac{(m+1)}{1.2}\,n^{m-1} + ... + 1$$

Les 4 premiers termes de la 1ère colonne verticale étant égaux aux 4 derniers termes de la 2de colonne verticale et se trouvant dans deux membres différents, ces 8 termes se détruisent ; on a

$$(n+1)^{m+1} = \left\{\begin{array}{rrrr} & & & +1 \\ +(m+1)\,1^m & + \frac{(m+1)m}{1.2}\,1^{m-1} & & +..+1 \\ +(m+1)\,2^m & + \frac{(m+1)m}{1.2}\,2\ m\text{-}1 & & +..+1 \\ , & , & & , \\ , & , & & , \\ +(m+1)\,n^m & + \frac{(m+1)m}{1.2}\,h^{m-1} & & +...+1 \end{array}\right\}$$

Maintenant j'ajoute toutes ces équations membre à membre et désignant par S^n_{m-1}, S^n_{m-2} ...... les puissances m-1, m-2 de la suite des nombres naturels, comme pour S^n_m, j'obtiens

$$(n+1)^{m+1} = (m+1)\,S^n_m + \frac{(m+1)\,m}{1.2}\,S^n_{m-1} + \frac{(m+1)(m)(m-1)}{1.\ 2.\ 3} \cdots\cdots S^n_{m-2} \dots + n + 1$$

D'où je tire la valeur de S^n_m

$$S^n_m = \frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1} - \frac{(m+1)\,m}{1\ .\ 2}\,S^n_m - \frac{(m+1)(m)(m-1)}{1.\ 2.\ 3} \cdots\cdots S^n_{m-2} \,..-n-1\right)$$

élevant $(n+1)$ à la puissance $(m+1)$, puis multipliant par $\frac{1}{(m \times 1),}$ facteur du second membre.

$$(a)\ S^n_m = n^{m+1} + n^m + \frac{m}{2}\,n^{m-1} + ..- \frac{m}{2}\,S^n_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.3} \cdots\cdots S^n_{m-2} \,..- n \times 1$$

A pari, je conclus que S^n_{m-1} me donnerait des termes en n^m, n^{m-1}, et que S^n_{m-2} me donnerait des termes en n^{m-1}, n^{m-2}

De sorte que, réduction faite, et appelant K, K_1, K_2, K_3, les coefficients des termes en n^m, n^{m-1}, n^{m-2}, n^{m-3} etc. la formule (a) prendra la forme

$$S^n_m = \frac{n^{m-1}}{m+1} + K n^m + K_1 n^{m-1} + K_2 n^{m-2} \text{—etc.}$$

2° $\quad Z\,\frac{\text{coefficients}}{\text{rang}}\,(a-b)^m = \frac{1}{m+1}$ Si m est entier et positif.

Soit un binôme (a-b) à la puissance m, supposée entière et positive.

En faisant le développement de la puissance par la loi du binôme de Newton, j'obtiens pour coefficients $1 - \frac{m}{1} + \frac{m\,(m-1)}{1\ .\ 2}$ —

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ et ainsi de suite jusqu'au terme de rang $(m+1)$ qui sera le dernier.

Je suppose chaque coefficient divisé ensuite par le nombre exprimant le rang qu'il occupe, et je dis que la somme de tous les quotients égale $+\frac{1}{m+1}$

Les coefficients croissent jusqu'au terme du milieu, puis reparaissent en sens inverse. De plus ils sont alternativement positifs et négatifs.

Prenons d'abord le cas de m = nombre pair. Le dernier coefficient sera positif et j'écris les coefficients, de cette manière.

$$+1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\ldots\ldots$$

$$+1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\ldots\ldots$$

Puis je divise les premiers par 1, 2, 3, 4 exprimant leur rang— et les derniers par m + 1, m, m-1, m-2, exprimant aussi leur rang.

J'obtiens

$$+\frac{1}{1}-\frac{m}{1.2}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2.\ 3}\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{m+1}-\frac{m}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2\ m-1}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3\ (m-2)}\ldots\ldots$$

Effaçant les facteurs communs, les termes placés l'un au-dessus de l'autre, et de signe contraire, se détruisent tous; il reste $+\frac{1}{m+1}$

2d *cas :* m impair.—Soit $m = 2n + 1$. Je fais les mêmes opérations que tout à l'heure, mais 1o les termes égaux ne se détruisent plus, ils ont même signe; 2o le coefficient du terme de rang $n+1$, se trouvera à la fin de la première ligne, sans quantité correspondante à la seconde ligne; et 3o le dernier terme de la puissance sera négatif.

Faisant la somme, j'ai

$$-\frac{1}{m+1}+2-\frac{2m}{2}+\frac{2m(m-1)}{3.\ 3}\ldots\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.\ 3\ldots\ldots(n+1)}$$

J'efface les facteurs 2 communs et j'ai

$$-\frac{1}{m+1}+2-m+\frac{m(m-1)}{3}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3.\ 4}\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.\ 3\ldots\ldots(n+1)}$$

Les 2 premiers termes se réduisent à $+\frac{1}{m+1}+\frac{2m}{m+1}$;

or je dis que

$$\frac{2m}{m+1}-m+\frac{m(m-1)}{3}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3.\ 4}\ldots\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.\ 3\ldots\ldots(n+1)}=0$$

La différence des 2 premiers égale $-\frac{m(m-1)}{m+1}$

Cette différence et le 3ème terme donne $+\frac{m(m-1)(m-2)}{3(m-1)}$

Cette somme et le 4ème terme donne $-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3.\ 4.\ (m+1)}$

jusqu'à ce qu'on arrive à

$\mp\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{3.4.\ (m+1)}$ qui est annulé par

* $\pm\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ n+1)}$: car $2(n+1) = m+1$

Donc la somme des quotients des coefficients égale encore $+\frac{1}{m+1}$

---

* Ce terme est positif ou négatif suivant que $(n+1)$ est impair ou pair ; c'est le contraire pour le terme au-dessus.

DISCUSSION DE LA FORMULE.

Question.—Quels sont les corps qui peuvent être cubés rigoureusement et d'un seul coup par la formule stéréométrique Baillairgé,

$$\text{vol} = \frac{H}{6}\left(B + B^{1} + 4M\right) ?$$

La démonstration de la formule suppose *nécessairement :*

1o que les 2 bases du solides sont parallèles ; 2o qu'un plan mené à mi-hauteur entre les bases est parallèle à ces bases ;

3o que les surfaces des bases et des sections parallèles et équidistantes entre elles sont régies par une seule et même loi, de sorte que l'on puisse trouver un terme général exprimant ces surfaces.

Il faudra donc que le solide à cuber satisfasse à ces 3 conditions ; mais en outre le solide doit remplir une 4ème condition à laquelle on arrive en faisant la démonstration : c'est que le terme général, exprimant la loi, qui régit la surface des sections, doit être une expression algébrique, positive, et ne renfermant la variable qu'avec les exposants 0, 1, 2, 3.

Il s'agit de voir quels sont les conséquences géométriques qui découlent de cette 4ème condition, un peu trop analytique, dans sa concision.

Et d'abord les corps à bases parallèles (pusqu'il ne s'agit que de ceux-là) peuvent être terminés latéralement ou par des surfaces planes, ou par une surface courbe, ou enfin par une combinaison de plans et de surfaces courbes. Nous allons voir que dans le premier cas, l'existence des 3 premières conditions entraîne celle de la 4ème ; ce qui n'a pas toujours lieu pour les deux autres cas.

I. Corps terminés par des plans, latéralement.

Tous les corps de cette catégorie ne sont pas cubables par la formule ; il y a certaines limites : car il faut que les sections parallèles aux bases soient régies par *une loi constante :* donc chacun des plans latéraux doit conserver *la même direction*, d'une base à l'autre : en effet il est évident que si un plan a existé en vertu d'une loi pendant un certain temps, il continuera tant que la loi n'aura pas changé.

Mais si chaque plan latéral conserve d'une base à l'autre la même direction, il s'ensuit que les arêtes latérales (non parallèles aux bases) doivent être des lignes droites allant d'une base à l'autre, et non des lignes brisées.

Ces arêtes peuvent se rencontrer sur le périmètre de l'une ou de l'autre des bases et même entre les bases ; mais dans ce dernier cas, il faut que toutes les arêtes latérales se coupent en un seul et même point (pour faire 2 solides opposés au sommet).—Autrement toutes les lignes ne changeraient pas de signe en même temps, ~~et l'on obtien~~drait pour l'expression des superficies, *des nombres négatifs* ; ce qui est absurde.

N. B. En pratique rien de plus aisé que de vérifier ces conditions en s'assurant 1° si les bases sont parallèles ; 2° si les surfaces latérales sont des plans ; 3° si chaque arête est une ligne droite, d'une base à l'autre ; 4° si, entre les bases, toutes les arêtes se coupent au même point.

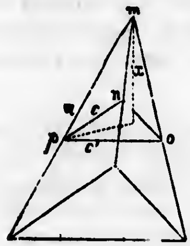
Reste à prouver que l'expression des surfaces sectionelles a la forme convenable.

Il est facile de voir que une quelconque des sections parallèles aux bases, sera, pour un solide unique, un polygone d'un même nombre de côtés, et ensuite que ces côtés croissent ou décroissent en progression arithmétique.

On doit admettre aussi aisément la possibilité de décomposer le solide donné en un certain nombre des solides élémentaires suivants :
1° en pyramides triangulaires
2° en " " renversées
3° en double — coins.

Ainsi la section polygonale du solide primitif se trouve remplacée par un certain nombre d'autres sections triangulaires ou quadrangulaires : en effet les sections, dans une pyramide triangulaire (non-renversée), sont des triangles décroissants de bas en haut, tandis qu'ils sont croissants de bas en haut, si la pyramide est renversée ; dans les double-coins, ce sont des quadrilatères dans lesquels une dimension est croissante, tandis que celle contigue est décroissante : de sorte que les quadrilatères sont croissants pendant un certain espace, et ensuite décroissants.

Exprimons la surface d'une section de pyramide triangulaire en fonction de la distance de cette section à la base supérieure.



Un triangle égale le produit continu de deux côtés contigus et de ½ sinus de l'angle compris.

$$C.\ C.'\ \frac{\sin.\ npo}{2}$$

$$\text{Sin. } mop : a :: \sin.\ pmo : C' = \frac{a \sin.\ pmo}{\sin.\ mop.}$$

$$\text{Sin. } mnp : a :: \text{Sin. } pmn : C = \frac{a \sin.\ pmn.}{\sin.\ mnp.}$$

mais $x = a \cos.\ p.$

donc $a = \dfrac{x}{\cos.\ p.}$

$$\text{Donc } S = \frac{\sin.\ npo \times \sin.\ pmo \times \sin\ pmn}{2 \sin.\ mop \times \sin.\ mnp \times \cos^2 p.}\ x^2$$

Pour toutes les autres sections parallèles, dans cette pyramide, les angles et par suite les sinus seront constants, et je puis représenter le coefficient de x^2 par D, et j'obtiens

$$S = D x^2$$

Comme on voit, la surface S ne surpasse pas le 2*d* degré, et il en serait de même dans une pyramide renversé et dans un double-coin— Ainsi leur somme ou la section polygonale du solide à cuber rentre dans la formule

$$S = A + C x + D x^2$$

et la formule stéréométrique donne exactement et d'un seul corps la solidité d'un tel corps.

II. Corps terminés latéralement par une surface courbe.

Les cylindres n'étant que des prismes infinitaires rentrent dans la même catégorie, ainsi que les cônes qui sont des pyramides à base circulaire ; mais pour un cône on le démontre aussi en coupant ce cône par un plan diamétral, i. e, passant par l'axe du cône.

Ce plan diamétral, par son intersection avec la surface latérale du cône détermine deux lignes droites qui se coupent au sommet du cône et que je nomme les lignes directrices ; voici pourquoi : c'est qu'au lieu de se représenter le cône comme produit par la révolution d'un triangle rectangle sur un de ses côtés, je le conçois, suivant l'idée fondamentale du théorème précédent, engendré par la trace d'un cercle qui d'abord forme la base du cône, et qui ensuite s'en éloigne parallèlement à lui-même, en diminuant à chaque instant, tandis que dans ce mouvement chaque extrémité de son diamètre s'appuye sur une des deux lignes directrices

Or dans un cône les *s* sont tous des cercles et il est facile d'exprimer le rayon de ces cercles en fonction de la distance du cercle au sommet du cône, puisque l'axe et une des directrices forment les deux côtés d'un angle qui seront coupés par le rayon de chaque cercle.

Ceci indique la marche à suivre au sujet des corps terminés par une surface courbe, dont les principaux sont la sphère, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde et le paraboloïde.

Un mot sur chacun d'eux.

Comme tous ces solides ont un axe, au lieu de m'occuper de deux directrices, je n'en considérerai qu'une seule, car le cercle se trouve parfaitement déterminé au centre par l'axe et à l'extrémité du rayon par une des 2 directrices.

1° La sphère est un solide de révolution engendré par un demi-cercle tournant autour de son diamètre, lequel devient l'axe de la sphère ; d'où il suit que toutes les sections planes sont des cercles.

Ici la courbe directrice est un demi-cercle.

2° Une demi-ellipse tournant autour du grand axe engendre l'ellipsoïde allongé, et tournant autour du petit axe, l'ellipsoïde aplati. Dans les 2 cas, les sections perpendiculaires à l'axe de révolution sont des cercles, et la courbe directrice est une demi-ellipse.

3° L'ellipsoïde à trois axes inégaux diffère de l'ellipsoïde de révolution seulement en ce que les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses : dans ce cas il faut deux demi-ellipses directrices, une pour l'extrémité du demi-grand axe et une pour celle du demi-petit axe. Ces deux courbes directrices, qui se coupent à angle droit, sont deux demi-ellipses, non identiques, et n'ayant qu'un seul axe commun lequel est l'axe même de l'ellipsoïde.

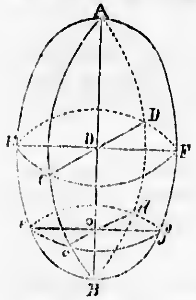
4° Ce qui précède s'applique aux hyperboloïdes et aux paraboloïdes.

Une demi-hyperbole tournant autour du premier axe (prolongé,) engendre une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes. La courbe directrice est une demi-hyperbole.

Une hyperbole tournant autour du 2d axe engendre l'hyperboloïde de révolution à une nappe — la courbe directrice est une des deux hyperboles conjuguées.

Dans les deux cas les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles. Si on remplace les cercles par des ellipses semblables entr'elles, on obtient deux hyperboloïdes à 3 axes inégaux, l'un à 2 nappes et l'autre à 1 nappe. Les ellipses ont pour directrices dans le premier cas deux demi-hyperboles qui n'ont d'identique que leur axe réel, et dans le 2d cas, deux hyperboles ayant seulement le même axe imaginaire.

Enfin une demi-parabole tournant autour de son axe engendre le paraboloïde de révolution, dans lequel les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles, et la courbe directrice une demi-parabole, tandis que dans le paraboloïde elliptique, les sections sont des ellipses, et les deux directrices deux demi-paraboles ayant leur sommet au même point. La formule stéréométrique donne le volume exact de tous ces corps, comme on va le voir.



Pour fixer les idées, je prends l'ellipsoïde à 3 axes inégaux A B C D E F; l'ellipse E C F D est perpendiculaire a l'axe A B ; on a mené l'ellipse e c f d parallèle à E C F D.

L'ellipsoide peut être supposé formé par un nombre fini d'ellipses toutes traversées, dans leur centre, par l'axe A B, et ce sont justement ces ellipses qu'il s'agit de carrer pour s'assurer si l'expression générale de leur superficie reste dans les limites voulues; e c f d est une de ces ellipses.

Surface d'une ellipse égale le produit continu de π et de ses 2 demi-axes, i.e $\pi . r . r'$; donc e c f d $= \pi \times$ o d $\times$ o f ; il s'agit d'exprimer o d et o f en fonction de o A = x

Or il est visible que o d est une ordonnée (y) à l'axe A B dans l'ellipse A C B D et of, une ordonnée (z) à l'axe A B dans l'ellipse A E B F.

Les 2 ellipses directrices ACBD, AEBF ont un axe commun AB=a ; et soit b, B le second axe de ces 2 ellipses.

En comptant les abscisses du sommet A, on a

$$(od)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2);\ \text{d'ou } y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$$

$$(of)^2 = z^2 = \frac{B^2}{a^2}(2ax-x^2);\ \text{d'où } z = \frac{B}{a}\sqrt{2ax-x^2}.$$

Comme les valeurs de y et de z sont 2 quantités irrationnelles semblables, leur produit sera rationel; ainsi *e c f d* ou toute ellipse parallèle, aura pour surface.

$$S = \pi \times \frac{b.B}{a^2}(2ax-x^2)$$

I. Pour un ellipsoïde de révolution, la seule différence c'est que b = B et par suite

$$S = \frac{\pi . b^2}{a^2}(2ax - x)$$

II. Pour la sphère a = b = B d'où $S = \pi(2ax - x^2)$

III. Pour un hyperboloïde à 3 axes inégaux et à 2 nappes, les axes des ellipses parallèles sont *ordonnées d'hyperbole* (ordonnées au

1er axe) ; or dans une hyperbole $y^2 = \frac{b2}{a2}(2\,ax + x^2)$; au reste le raisonnement serait le même que dans l'ellipsoïde et on arriverait à

$$S = \pi \times \frac{b.\,B}{a\,2}(2\,ax + x^2)$$

S'il s'agit de l'hyperboloïde à une nappe, il vaut mieux compter les abscisses à partir du centre, et on trouve que $S = \pi \times \frac{A\,a}{b\,2} \times (b^2 + x^2)$

(N. B. Ici A et a sont les premiers axes des hyperboles)

IV. Si les deux hyperboloïdes précédents étaient de révolution $b = B$ et $A = a$ et ainsi

$$S = \frac{\pi\,b^2}{a\,2}(2\,ax + x^2) \qquad S = \frac{\pi\,a^2}{b\,2}(b^2 + x^2)$$

V. Dans une parabole l'équation des ordonnées est $y^2 = px$ et pour le paraboloïde elliptique

$S = \pi \sqrt{px} \times \sqrt{Px} = \pi\,x \sqrt{P\,p}$ tandisque pour le paraboloïde de révolution $S = \pi.\,p.\,x$

VI. Si les solides précédents étaient tronqués par des plans perpendiculaires à l'axe, il y aurait tout au plus à remplacer dans les expressions des S, (x par x + une quantité constante,) et le degré de l'expression ne dépasserait pas *deux*.

VII. Si c'était par des plans également inclinés sur l'axe, il y aurait un léger changement dans les facteurs constants venant de ce que les axes des ellipses parallèles seraient non plus des ordonnées aux axes mais bien des *ordonnées aux diamètres*. Comme dans la parabole, l'ellipse et l'hyperbole, l'équation aux diamètres est *tout-à-fait semblable* à celle aux axes, on peut conclure immédiatement que même les troncs à bases également obliques à l'axes peuvent être cubés par la formule.

Si je voulais m'assurer, dans un cas pratique, qu'un corps supposé être un ellipsoïde tronqué, en est un véritable, et peut être cubé par la formule, la première chose à faire serait de le compléter par la pensée.

Pour que le solide ainsi complété puisse être cubé exactement, il faudra nécessairement que les 2 directrices à angle droit, ainsi prolongées, soient 2 courbes de même espèce ; *i-e*, 2 demi-circonférences, une demi-circonférence et une demi-ellipse, 2 demi-ellipses, 2 demi-hyperboles, ou enfin 2 demi-paraboles : car si l'un était une demi-hyperbole et l'autre une demi-parabole, les 2 quantités r, r′ ne seraient plus 2 radicaux semblables, et leur produit r r′ resterait irrationnel.

Mais il ne suffit pas que ce soit 2 courbes de même espèce ; il faut encore que l'axe des 2 directrices prolongées coïncide avec celui du solide : sinon le corps ne saurait être cubé exactement par la formule stéréométrique. En effet en se reportant à la démonstration ci-dessus, r et r' se composeraient de 2 termes, l'un irrationnel et l'autre radical, de sorte que le produit rr' demeurerait *irrationnel.*

Il y a cependant une exception, quand r et r' sont l'un la somme et l'autre la différence des deux mêmes quantités : car en vertu du principe $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, le produit r r' deviendrait certainement *rationnel.*

On peut se convaincre aussi qu'un corps dont les 2 directrices seraient par exemple 2 demi-circonférences, ayant leur convexité tournée vers l'axe du corps ne pourrait être cubé exactement par la formule : car, pour cette hypothèse, il faudrait changer, dans la démonstration ci-dessus, les x en y et les y en x, ce qui donnerait pour valeur de ε, un radical.

Tout revient donc à dire 1° que les deux directrices à angle droit doivent être des courbes de même espèces, lesquelles complétées, s'il le faut, aient leur sommets au même point ; 2° que l'axe de ces 2 courbes coincide avec l'axe du solide.

Entre parenthèse, pour le cas exceptionnel de tout à l'heure, il faut 1° que les directrices soient deux arcs identiques et 2° que les axes de ces arcs soient placés à la même distance de l'axe du solide, l'un en deçà et l'autre au-delà, par rapport aux directrices.

Il est aisé de conclure que, en pratique, à moins de savoir d'avance qu'on a à cuber v. g. une sphère, un ellipsoïde, ou des troncs de ces corps, il serait extrêmement long et difficile de constater

1° l'espèce de courbe à laquelle appartiennent les 2 directrices et

2° la position de leur axe.

Ainsi il est beaucoup plus simple de supposer le corps à cuber partagé en un certain nombre de tranches de manière que le côté courbe soit sensiblement une ligne droite. Ces tranches, à la manière des cônes tronqués, se cuberont très promptement par la formule stéréométrique.

C'est d'ailleurs la seule ressource pour tous les olides que la formule stéréométrique ne pourrait pas cuber d'un seul coup. La même remarque s'applique *a fortiori* aux solides terminés latéralement, partie par des plans, et partie par une surface courbe.

De ce que, en pratique, la formule stéréométrique ne peut pas donner, d'un seul coup, le volume exact de certains corps, il ne faudrait pas en tirer un argument contre cette formule ; et cela pour la raison bien simple, que, dans ces cas, le toisé du *corps en bloc* est impossible. Et si dans quelques cas excessivement rares, il existe certaines formules très compliquées, *pratiquement* elles donneront un résultat moins exact que la formule stéréométrique.

Jusqu'à présent, un certain nombre de corps se faisaient par des formules faciles ; d'autres se faisaient par des formules très compliqués ; pour d'autres enfin, il fallait les partager mentalement en différentes parties, ou bien on en était réduit à des approximations, or la formule stéréométrique s'applique avec avantage dans tous ces cas.

1° Elle est aussi facile à appliquer que l'une quelconque des anciennes formules.

2° Elle est d'une application beaucoup plus simple qu'une foule d'autres.

3° Elle peut lutter très avantageusement avec toutes les autres par sa grande exactitude, suivant les cas : la démonstration et la discussion précédentes ayant pour but de montrer les conditions dans lesquelles le résultat est rigoureusement exact afin de mieux indiquer la route à suivre pour résoudre certains problème d'une manière satisfaisante.

FIN.