IMAGE EVALUATION TEST TARGET (MT-3)

6″

Ca

Technical and Bibliographic Notes / Notes techniques et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming, are checked below.

L'Institut a microfilmé le meilleur exemplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modification dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

- [ ] Coloured covers/ Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged/ Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated/ Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing/ Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps/ Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black)/ Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations/ Planches et/ou illustrations en couleur
- [x] Bound with other material/ Relié avec d'autres documents
- [x] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin/ La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure
- [ ] Blank leaves added during restoration may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming/ Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.

- [ ] Coloured pages/ Pages de couleur
- [ ] Pages damaged/ Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated/ Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed/ Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached/ Pages détachées
- [x] Showthrough/ Transparence
- [ ] Quality of print varies/ Qualité inégale de l'impression
- [ ] Continuous pagination/ Pagination continue
- [ ] Includes index(es)/ Comprend un (des) index

Title on header taken from:/ Le titre de l'en-tête provient:

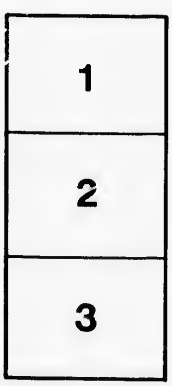
- [ ] Title page of issue/ Page de titre de la livraison
- [ ] Caption of issue/ Titre de départ de la livraison
- [ ] Masthead/ Générique (périodiques) de la livraison

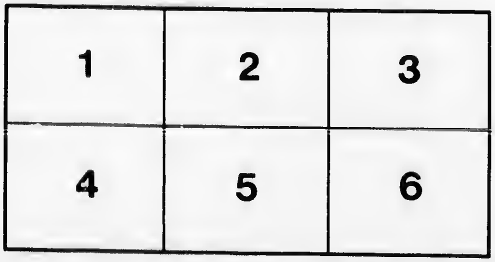
- [ ] Additional comments:/ Commentaires supplémentaires:

This item is filmed at the reduction ratio checked below/
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10X		14X		18X		22X		26X		30X	
	12X		16X		20X	✓	24X		28X		32X


1
2
3


1
2
3


1
2
3
4
5
6

DE

DES

LES F

Co

ELZEAR

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES.

ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE

COMPRENANT

DES NOTIONS SUR LES COURBES USUELLES
ET DE NOMBREUX EXERCICES.

PAR

LES FRÈRES DES ÉCOLES CHRÉTIENNES.

Copie déposée. No. 401.

QUÉBEC:
ELZEAR VINCENT, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Rue et Faubourg St. Jean, 18.

1875.

PRÉFACE

Cet ouvrage expose les connaissances géométriques exigées pour le brevet complet d'instruction primaire, pour le baccalauréat ès sciences, et pour le diplôme de fin d'études.

Quatre livres sont consacrés à la Géométrie plane; trois à la Géométrie dans l'espace, et un huitième aux courbes usuelles. Le livre III a été réservé à l'étude des figures semblables, et le livre IV à l'étude des surfaces. Les polygones réguliers ont leurs questions fondamentales à la fin du second livre et sont complétés au livre III.

Chaque livre est terminé par un nombre suffisant d'exercices choisis, comprenant des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à trouver, et des problèmes à résoudre. Ce choix a été fait de manière à satisfaire les lecteurs qui désirent de nombreuses applications.

Quelques questions qui ne sont relatives qu'à l'enseignement secondaire spécial, sont traitées dans un appendice, où nous parlons également des sections coniques, du théorème de Guldin, du tronc cylindrique à base quelconque, et des formules de Simpson et de Poncelet. Bien que ces questions soient en dehors des programmes officiels, elles n'en constituent pas moins une des parties les plus utiles et les plus réclamées par les exigences de la pratique.

La question des volumes des hyperboloïdes avait été regardée jusqu'à présent comme ne pouvant être traitée d'une manière élémentaire : dans l'appendice, nous donnons deux méthodes pour l'évaluation des surfaces et des volumes. La première est tout à fait générale, et quelques auteurs l'ont déjà appliquée au volume de la pyramide et à l'aire du segment parabolique ; sans exiger d'autre connaissance préalable que celle des volumes du prisme et du cylindre, elle permet de calculer les volumes de tous les corps que l'on considère en Géométrie élémentaire, ainsi que les volumes des ellipsoïdes, hyperboloïdes et paraboloïdes.

La seconde méthode est moins générale que la première, dont elle peut être regardée comme une modification, mais lorsqu'on connaît le volume du cône, elle permet d'éviter la sommation des carrés, et elle s'applique d'ailleurs d'une manière très-simple aux ellipsoïdes et aux hyperboloïdes.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE V

GÉNÉRALITÉS SUR LES DROITES ET LES PLANS

LIVRE VI

LES POLYÈDRES

LIVRE VII

LES TROIS CORPS RONDS

LIVRE VIII

LES COURBES USUELLES

APPENDICE

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE

INTRODUCTION

§ I. — Définitions préliminaires.

1. Un *axiome* est une vérité évidente par elle-même.

Exemples. *Deux grandeurs égales chacune à une troisième sont égales entre elles. — Si l'on fait une même opération sur deux quantités égales, les résultats sont égaux.*

2. Un *théorème* est l'énoncé d'une vérité qui a besoin d'une démonstration. — Exemple. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

On nomme *postulatum* ou *demande* l'énoncé d'un théorème admis sans démonstration.

Un *lemme* est un théorème préparatoire à la démonstration d'un autre théorème, ou à la résolution d'un problème.

3. Un *problème* est une question à résoudre.

La *solution d'un problème* est l'indication de la méthode à suivre pour arriver à la réponse.

4. On appelle *proposition* tout énoncé d'un axiome, d'un théorème ou d'un problème.

5. Une *hypothèse* est une supposition; un *corollaire* est une conséquence, et un *scolie* une remarque.

§ II. — De l'étendue.

6. La *Géométrie* est la science de l'étendue.

L'*étendue* d'un corps est la portion de l'espace occupée par ce corps.

Dans l'étendue d'un corps on considère ordinairement trois *dimensions* ou trois sens différents, savoir : la *longueur,* la *largeur* et la *hauteur,* nommée aussi quelquefois *épaisseur* ou *profondeur*.

7. On appelle *volume* l'étendue considérée sous les trois dimensions : *surface*, l'étendue considérée sous deux dimensions, et *ligne*, l'une des dimensions considérée isolément.

On peut définir le *point*, l'intersection de deux lignes ; la *ligne*, l'intersection de deux surfaces, et la *surface* d'un corps, la limite qui le sépare de l'espace environnant.

8. Un *point* qui se déplace engendre une ligne, une *ligne* qui se déplace engendre une surface, et une *surface* qui se déplace engendre un volume.

§ III. — Des lignes et des surfaces.

9. Une *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre. Un fil bien tendu nous en offre l'image.

10. Une *ligne brisée* ou *polygonale* est une ligne formée de plusieurs droites différentes.

Une *ligne courbe* est une ligne qui n'est droite en aucune de ses parties. Néanmoins on considère souvent la ligne courbe comme une ligne brisée formée d'éléments droits infiniment petits.

11. **Axiomes.** 1° *D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.*

2° *Une droite quelconque est plus courte que toute autre ligne, brisée ou courbe, qui a les mêmes extrémités.*

12. On appelle *plan* ou *surface plane* une surface qui contient en entier la droite menée entre deux quelconques de ses points.

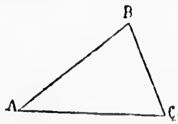
13. Une *surface polyédrique* ou *brisée* est une surface formée de plusieurs portions de plans différents.

Une *surface courbe* est une surface qui n'est plane en aucune de ses parties. Néanmoins on considère souvent la surface courbe comme une surface polyédrique formée d'éléments plans infiniment petits.

§ IV. — Des figures géométriques.

14. On appelle *figure géométrique* toute représentation de points, lignes, surfaces ou volumes.

Le *triangle*, figure limitée par trois lignes droites, est la plus importante des figures géométriques.



15. Une figure est déterminée quand on en connaît la *forme*, la *grandeur* et la *position*.

Deux figures sont *égales* quand elles ont même forme et même grandeur, *Équivalentes* quand elles ont même grandeur sans avoir même forme, *Semblables* quand elles ont même forme sans avoir même grandeur.

16. **Axiome.** *Deux figures égales peuvent coïncider par superposition*, c'est-à-dire qu'on peut les concevoir comme occupant exactement la même place;

Réciproquement, *deux figures qui peuvent coïncider sont égales.*

17. Une *figure plane* est une figure que l'on peut tracer sur un plan.

La *Géométrie plane* est la partie de la Géométrie qui étudie les figures planes; et la *Géométrie dans l'espace*, la partie qui étudie les figures dont les éléments ne sont pas dans un même plan.

18. On appelle *ligne convexe* une ligne plane qui ne peut être coupée en plus de deux points par une droite.

On appelle *surface convexe* une surface qui ne peut être traversée en plus de deux points par une droite.

LIVRE I

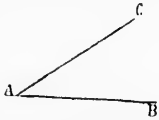
GÉNÉRALITÉS SUR LA DROITE ET LES ANGLES

---

§ I. — DES ANGLES

Définitions.

19. Un *angle* est l'ouverture comprise entre deux droites qui se rencontrent. Ces deux lignes sont les *côtés* de l'angle, et leur intersection en est le *sommet*.

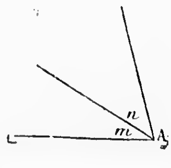


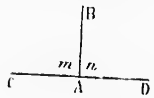
Les deux droites AB et AC forment l'angle BAC ou l'angle A.

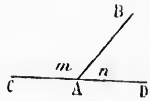
La grandeur d'un angle dépend uniquement de l'ouverture comprise entre les côtés, et non de leur longueur.

20. On appelle *angles adjacents* deux angles qui ont même sommet, et qui sont situés de part et d'autre d'un côté commun.

On peut aussi considérer une série d'angles adjacents deux à deux.







21. Une droite est *perpendiculaire* à une autre, lorsqu'elle forme avec celle-ci des angles adjacents égaux; elle est *oblique*, lorsque les angles adjacents sont inégaux.

On appelle *angle droit* tout angle dont un côté est perpendiculaire à l'autre.

Proposition I. — Théorème.

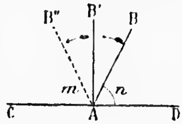
22. *Par un point pris sur une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

Soit le point A pris sur la droite CD.

1° Une oblique quelconque AB peut tourner autour du point A.

L'angle n, d'abord plus petit que l'angle m, croîtra constamment, tandis que l'angle adjacent m diminuera et deviendra le plus petit; et comme cette variation se fait par degrés insensibles, il y aura une certaine position AB′ pour laquelle les angles m et n seront égaux ; alors AB′ sera perpendiculaire sur CD.

2° D'autre part, si AB′ s'écarte de cette position, les deux angles cessent d'être égaux, et la droite est oblique.

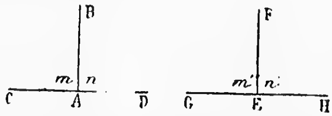


Donc *par un point pris sur une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

Proposition II. — Théorème.

23. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient les angles droits m, n, m' et n'.



Transportons la première figure sur la seconde, de manière que CD s'applique sur GH, et que le point A tombe en E.

AB prend la direction EF, car, par le point E, il ne peut y avoir qu'une perpendiculaire à GH (n° 22); donc les deux figures coïncident, et les angles sont égaux.

Donc *tous les angles droits sont égaux.*

Définitions.

24. On appelle *bissectrice* d'un angle la droite qui divise cet angle en deux parties égales.

25. On appelle *angle aigu* tout angle plus petit que l'angle droit, et *angle obtus* tout angle plus grand que l'angle droit.

L'angle d'*un degré* est la 90e partie de l'angle droit. Le degré se divise en 60 *minutes*, et la minute en 60 *secondes*. Un angle de 23 degrés 27 minutes 25 secondes s'écrit $23° 27' 25''$.

26. Deux angles sont *complémentaires* quand leur somme égale un angle droit ; et ils sont *supplémentaires* quand leur somme égale deux droits.

On appelle *complément* d'un angle ce qui lui manque pour égaler un angle droit, et *supplément* ce qui lui manque pour égaler deux droits.

27. **Axiome.** *Deux angles égaux ont des compléments égaux et des suppléments égaux ;*

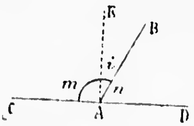
Réciproquement, deux angles qui ont des compléments égaux ou des suppléments égaux sont égaux.

28. On appelle *angles opposés par le sommet*, deux angles tels que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Proposition III. — Théorème.

29. *Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs forment une même ligne droite sont supplémentaires.*

Soient BAC ou m, et BAD ou n, deux angles adjacents dont les côtés extérieurs AC et AD sont en ligne droite.



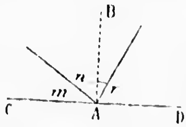
Si l'on mène AE perpendiculaire à CD, les deux angles EAC et EAD sont droits (nº 21), et l'on a :

$$m = 1 \text{ droit} + i$$
$$n = 1 \text{ droit} - i$$

D'où en additionnant..... $m + n = 2$ droits...

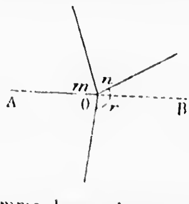
Donc *deux angles adjacents dont les...*

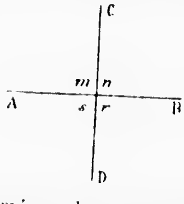
30. **Corollaires.** 1º *Pour obtenir le supplément d'un angle donné, il suffit de prolonger l'un des côtés au delà du sommet.*



2º *La somme des angles adjacents que l'on peut former d'un même côté d'une droite est égale à deux angles droits;* car les deux angles droits BAC et BAD, comprennent les angles adjacents m, n, r, et réciproquement.

3º *La somme de tous les angles que l'on peut former autour d'un même point sur un plan est égale à 4 angles droits;* car si l'on prolonge AO, on aura deux angles droits





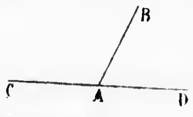
pour la somme des angles adjacents formés au-dessus de AB, et deux droits pour la somme des angles adjacents formés au-dessous.

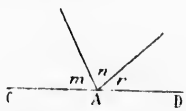
4º *Lorsque deux droites se coupent de manière que l'un des quatre angles soit droit, les trois autres le sont aussi.*

5º *Si une première droite est perpendiculaire à une seconde, celle-ci est aussi perpendiculaire à la première.*

Proposition IV. — Théorème.

31. Réciproquement : *Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite.*





Soient BAC et BAD deux angles adjacents supplémentaires.

En prolongeant CA, on obtient un angle supplément de BAC nº 30), et par suite égal à BAD. Ainsi la droite AD se confond avec le prolongement de CA.

Donc *si deux angles adjacents...*

32. **Corollaire.** *Si plusieurs angles adjacents, m, n, r, valent ensemble deux angles droits, leurs côtés extérieurs AC et AD sont en ligne droite.*

Proposition V. — Théorème.

33. *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Soient m et n deux angles opposés par le sommet.

AB étant une ligne droite, l'angle m a pour supplément s (nº 29); CD étant aussi une ligne droite, l'angle n a pour supplément s; donc les deux angles m et n sont égaux (nº 27).

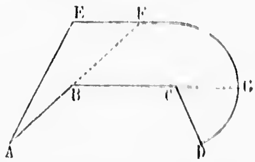
De même les angles opposés s et t sont égaux, comme ayant chacun pour supplément l'angle n.

Donc *deux angles opposés...*

§ II. — PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

Proposition VI. — Lemme.

34. *Une ligne polygonale convexe est plus petite que toute ligne enveloppante terminée aux mêmes extrémités.*



Soit ABCD une ligne convexe enveloppée par AEFGD. Prolongeons AB et BC; on a (nº 11, 2º):

$$AB + BF < AE + EF$$
$$BC + CG < BF + FG$$
$$CD < CG + GD$$

En ajoutant membre à membre ces trois inégalités, il vient :

$$AB + BF + BC + CG + CD < AE + EF + BF + FG + CG + GD.$$

D'où, en retranchant de part et d'autre BF et CG :

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

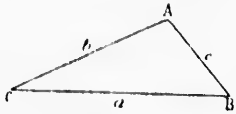
Donc *une ligne polygonale convexe est plus petite...*

Proposition VII. — Théorème.

35. *Chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

Soit ABC un triangle quelconque, et soit CB ou a le plus grand côté.

1° La ligne droite CB est plus courte que la ligne brisée CA + AB



(n° 11, 2°); on a donc $a < b + c$.

La même propriété est évidente pour chacun des deux autres côtés.

2° L'inégalité précédente revient à celle-ci... $b + c > a$

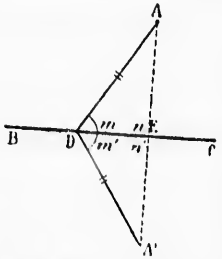
d'où, en retranchant b aux deux membres... $c > a - b$

on aurait de même, en retranchant c... $b > a - c$.

Donc *chaque côté d'un triangle est...*

Proposition VIII. — Théorème.

36. *D'un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*



Soit A le point donné.

Menons une droite quelconque AD; faisons l'angle m' égal à m; portons DA en DA', et menons la droite AA'.

1° Si l'on fait tourner la partie supérieure de la figure autour de BC, l'angle m coïncidera avec son égal m', et la droite DA avec son égale DA'; et comme le point E est fixe, la droite EA coïncidera avec EA', et l'angle n avec n'. Ainsi ces deux angles sont égaux; BC est donc perpendiculaire sur AA' (n° 21), et par suite AA' l'est sur BC (n° 30, 5°).

2° AE étant perpendiculaire à BC, toute autre droite AD sera oblique; car si l'on supposait AD perpendiculaire à BC, l'angle m serait droit, ainsi que son égal m', la somme $m + m'$ égalerait deux droits, et les côtés extérieurs DA et DA' seraient en ligne droite (n° 31); il y aurait donc deux droites différentes de A en A', ce qui est impossible (n° 11).

Donc *d'un point pris hors d'une droite...*

Proposition IX. — Théorème.

37. *Si, d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et différentes obliques,*

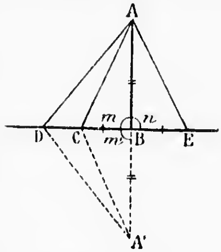
1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales;*

3° *De deux obliques, la plus longue est celle dont le pied s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.*

Soit A le point donné, AB une perpendiculaire, AC, AD, AE, différentes obliques. Prolongeons la perpendiculaire AB d'une longueur BA' égale à BA, et menons CA' et DA'.

1° A cause des angles droits m et m', si l'on fait tourner autour de DE la partie supérieure de la figure, la droite BA coïncidera avec BA', et il en sera de même pour CA et CA', DA et DA'.



La ligne droite ABA' étant plus courte que la ligne brisée AC + CA' (n° 11, 2°), on a AB, moitié de AA', < AC, moitié de AC + CA'.

2° Si la distance BE est égale à BC, les angles m et n étant droits, la partie ABE de la figure peut tourner autour de AB, et coïncider avec la partie ABC; donc AE = AC.

3° La ligne convexe AC + CA' est plus courte que la ligne enveloppante AD + DA' (n° 34); on a donc, en prenant la moitié de part et d'autre: AC < AD.

Donc, *si d'un point pris hors d'une droite...*

38. **Corollaires.** 1° *Si deux obliques partant d'un même point sont égales, leurs pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire;*

2° *Si deux obliques partant d'un même point sont inégales, le pied de la plus longue est le plus éloigné du pied de la perpendiculaire.*

3° *D'un point à une droite, on ne peut mener que deux obliques égales, et ces deux obliques sont situées de part et d'autre de la perpendiculaire;*

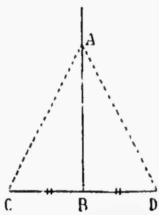
4° *Deux obliques égales qui partent d'un même point font des angles égaux avec la perpendiculaire abaissée de ce même point.*

5° *La distance d'un point à une droite est donnée par la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite;* car cette perpendiculaire est le plus court chemin du point à la droite.

6° *La plus courte ligne possible d'un point à une droite est perpendiculaire à cette droite.*

Proposition X. — Théorème.

39. *Tout point de la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est également distant des extrémités de cette droite.*

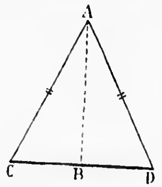


Réciproquement, *tout point équidistant des deux extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de cette droite.*

1° Soit A un point quelconque de la perpendiculaire élevée au milieu de CD. Puisque l'on a BC = BD, les obliques AC et AD sont égales (n° 37, 2°), et le point A est également distant des extrémites de la droite CD.

Donc *tout point de la perpendiculaire...*

2° Soit A un point équidistant des extrémités C et D, de sorte que l'on ait AC = AD. Menons AB perpendiculaire à CD; les deux obliques AC et AD étant égales, leurs pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire (nº 38); ainsi BC = BD, et la perpendiculaire AB tombe au milieu de CD.



Donc *tout point équidistant des deux extrémités...*

40. **Corollaire.** *Tout point pris hors de la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est inégalement distant des deux extrémités de cette droite.* — Car s'il était équidistant, il appartiendrait à la perpendiculaire (nº 39, 2º).

41. **Définition.** On appelle *lieu géométrique* l'ensemble des points qui jouissent d'une même propriété.

La perpendiculaire indéfinie menée par le milieu d'une droite est le lieu géométrique *des points équidistants des deux extrémités de cette droite.*

§ III. — LES TRIANGLES

Définitions.

42. Un *triangle* est une figure plane limitée par trois droites, qui en sont les *côtés.*

Il y a six éléments à considérer dans un triangle, savoir : *trois angles* et *trois côtés.*

Le *périmètre* d'un triangle est la somme des trois côtés.

On désigne ordinairement les trois angles d'un triangle par trois lettres majuscules, A, B, C, par exemple, et les côtés opposés par les mêmes lettres minuscules, *a*, *b*, *c*. Pour éviter la confusion, on dit, s'il est besoin, grand A, grand B, petit *a*, petit *b*.

43. Un triangle est *rectangle* lorsqu'il a un angle droit, *obtusangle* lorsqu'il a un angle obtus, et *acutangle* lorsque tous ses angles sont aigus.

On appelle *hypoténuse* le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle.

44. Un triangle est *isocèle* lorsqu'il a deux côtés égaux; il est *équilatéral* quand ses trois côtés sont égaux, et *scalène*, quand ses trois côtés sont inégaux.

45. La *base* d'un triangle est le côté sur lequel il est censé posé, et le *sommet* est le point de rencontre des deux autres côtés.

On peut prendre pour base d'un triangle l'un quelconque des côtés.

Dans un triangle isocèle, on nomme spécialement *sommet* le point de rencontre des deux côtés égaux, et *base* le côté opposé au sommet.

46. On appelle *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé ou sur son prolongement;

Et *médiane*, la droite qui joint l'un des sommets au milieu du côté opposé.

Dans un triangle quelconque, il y a *trois hauteurs*, *trois médianes* et *trois bissectrices*.

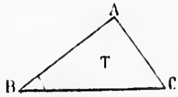
Proposition XI. — Théorème.

47. *Deux triangles sont égaux :*

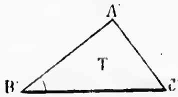
1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux ;*

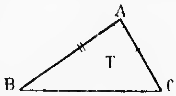
3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés respectivement égaux.*



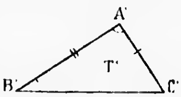
1° Soient les deux triangles T et T', ayant le côté BC égal à B'C', l'angle B égal à B', et l'angle C égal à C'.



Transportons le premier triangle sur le second, de manière que le côté BC coïncide avec son égal B'C'. L'angle B étant égal à B', le côté BA prendra la direction B'A'; de même, l'angle C étant égal à C', le côté CA prendra la direction C'A'. Le point A devant se trouver à la fois sur B'A' et sur C'A', tombe nécessairement sur l'intersection A', et les deux triangles coïncident; donc ils sont égaux (n° 16, 2°).

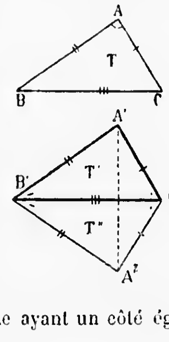


2° Soient les deux triangles T et T', ayant les angles A et A' égaux, les côtés AB et AC respectivement égaux aux côtés A'B' et A'C'.



Transportons le premier triangle sur le second, de manière que l'angle A coïncide avec son égal A'. Le côté AB coïncide avec son égal A'B', et le côté AC avec son égal A'C'; donc le troisième côté BC coïncide avec B'C' (n° 11), et les deux triangles sont égaux.

3° Soient les deux triangles T et T', ayant les trois côtés respectivement égaux.



Faisons occuper au triangle T la position T'', en faisant coïncider le côté BC avec son égal B'C'; et menons A'A''.

On a B'A' = B'A'', C'A' = C'A''; donc les points B' et C' appartiennent l'un et l'autre à la perpendiculaire élevée au milieu de A'A'' (n° 39, 2°); donc B'C' est cette perpendiculaire. Or deux obliques égales qui partent d'un même point font des angles égaux avec la perpendiculaire menée de ce point (n° 38, 4°); donc les angles en B' sont égaux, aussi bien que les angles en C'.

Ainsi les triangles T' et T'' sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux (n° 47, 1°); et comme T″ n'est autre chose que le triangle T transporté et retourné, T est aussi égal à T′.

Donc *deux triangles sont égaux : 1° Lorsqu'ils ont...*

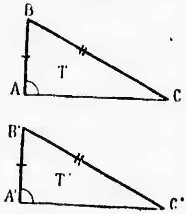
48. **Scolie.** Dans deux triangles égaux, les six éléments sont respectivement égaux, et les côtés égaux sont opposés aux angles égaux.

Proposition XII. — Théorème.

49. *Deux triangles rectangles sont égaux :*

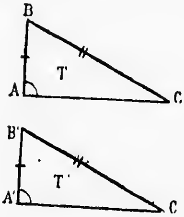
1° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal;*

2° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*



1° Soient les triangles rectangles T et T′, ayant l'hypoténuse BC égale à B′C′, et le côté AB égal à A′B′.

Transportons le premier triangle sur le second, de manière que le côté AB coïncide avec son égal A′B′. Les angles droits A et A′ coïncidant, le côté AC prend la direction A′C′. Les hypoténuses BC et B′C′ sont deux obliques égales partant d'un même point B′; leurs pieds sont donc à égale distance du pied de la perpendiculaire B′A′ (n° 38); donc le point C tombe en C′, et les deux triangles coïncident et sont égaux.



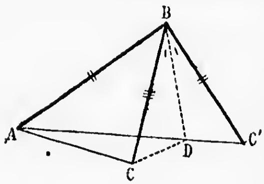
2° Soient les deux triangles rectangles T et T′, ayant l'hypoténuse BC egale à B′C′, et l'angle aigu C égal à C′.

Transportons le premier triangle sur le second, de manière que l'angle C coïncide avec son égal C′. L'hypoténuse CB coïncide avec son égale C′B′; le côté CA prend la direction C′A′, et les deux côtés BA et B′A′ sont deux perpendiculaires abaissées du même point B′ sur la même droite C′A′; donc ces deux lignes se confondent (n° 36), et les triangles sont égaux.

Donc *deux triangles rectangles sont égaux...*

Proposition XIII. — Théorème.

50. *Lorsque deux triangles ont deux côtés respectivement égaux et que les angles compris par ces côtés sont inégaux, les troisièmes côtés sont pareillement inégaux, et au plus petit angle correspond le plus petit côté.*



Soient les deux triangles ABC et ABC′ ayant les côtés BA et BC respectivement égaux à BA et BC′; et soit l'angle ABC du premier plus petit que l'angle ABC′ du second.

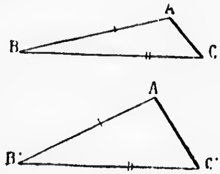
Supposons ces deux triangles placés l'un sur l'autre d'un même côté de AB. L'angle CBC' est la différence entre les deux angles ABC et ABC' des deux triangles; dans cet angle CBC' menons la bissectrice BD, et la droite CD.

Les deux triangles BDC et BDC' sont égaux, comme ayant un angle égal en B, un côté commun BD, et le côté BC égal à BC' (nº 47, 2º); donc DC égale DC' (nº 48).

Dans le triangle ACD on a (nº 35) : $AC < AD + DC$
et en remplaçant DC par DC' $AC < AD + DC'$
ou $AC < AC'$

Donc, *lorsque deux triangles ont...*

51. Réciproquement, *lorsque deux triangles ont deux côtés respectivement égaux, et que les troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés à ces troisièmes côtés sont pareillement inégaux, et au plus petit côté se trouve opposé le plus petit angle.*



Soient les deux triangles ABC et A'B'C' ayant le côté AB égal à A'B', BC égal à B'C', et AC plus petit que A'C'.

Si l'on supposait l'angle B égal à B', les triangles seraient égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux, et il en résulterait AC égal à A'C', ce qui est contraire à l'hypothèse.

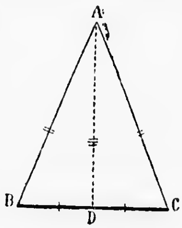
Si l'on supposait l'angle B plus grand que B', on aurait aussi, en vertu du théorème direct (nº 50), $AC > A'C'$, ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Ainsi l'angle B est plus petit que B'.

Donc, *lorsque deux triangles ont deux côtés...*

Proposition XIV. — Théorème.

52. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*



Soit ABC un triangle isocèle, et soient AB et AC les deux côtés égaux.

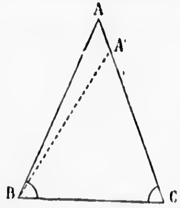
Menons la droite AD, du sommet au milieu de la base. Les deux triangles ADB et ADC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux (nº 47, 3º); donc l'angle B opposé au côté AD de l'un, égale l'angle C, opposé au côté AD de l'autre.

Donc, *dans un triangle isocèle...*

53. Réciproquement : *Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux.*

Soit le triangle ABC dans lequel les deux angles B et C sont égaux. Il s'agit de prouver que le côté AB égale AC.

Si l'on supposait que AB est plus petit que AC, on porterait la longueur CA' égale à BA, et on mènerait BA'; les deux triangles ABC et A'CB auraient un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux, et ces deux triangles seraient égaux, ce qui est impossible.



Donc *si deux angles d'un triangle...*

54. **Corollaire.** *Un triangle équilatéral est équiangle, et réciproquement.*

55. **Scolie.** Dans un triangle isocèle, la droite qui joint le sommet au milieu de la base remplit quatre conditions, dont deux suffisent pour la déterminer; de là découlent quatre propositions qui se trouvent toutes démontrées par l'une quelconque d'entre elles, et que l'on peut d'ailleurs établir séparément :

56. *Dans tout triangle isocèle :*

1° *La droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à la base et bissectrice de l'angle du sommet;*

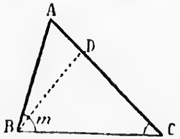
2° *La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est bissectrice de l'angle du sommet et divise la base en deux parties égales;*

3° *La bissectrice de l'angle du sommet est perpendiculaire au milieu de la base;*

4° *La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base divise l'angle du sommet en deux parties égales.*

Proposition XV. — Théorème.

57. *Dans un triangle quelconque, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*



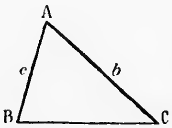
Soit le triangle ABC, dans lequel l'angle ABC est plus grand que l'angle C.

Si l'on fait l'angle m égal à C, on aura DB $=$ DC (n° 53).

Le triangle ABD donne $AB < AD + DB$; remplaçons le côté DB par son égal DC, on aura $AB < AD + DC$ ou $AB < AC$.

Donc *dans un triangle quelconque...*

58. Réciproquement : *A un plus grand côté d'un triangle est opposé un plus grand angle.*



Soit, dans le triangle ABC, le côté b plus grand que le côté c; il faut prouver que l'angle B est plus grand que l'angle C. En effet, si l'on supposait l'angle B égal à l'angle C, les côtés b et c seraient égaux (n° 53), ce qui est contraire à l'hypothèse.

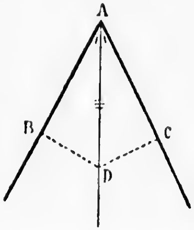
Si l'on supposait l'angle B plus petit que l'angle C, on aurait, en vertu du théorème direct (n° 57) : b plus petit que c, ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Ainsi l'angle B est plus grand que l'angle C.
Donc *à un plus grand côté d'un triangle...*

Proposition XVI. — Théorème.

59. *Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés de cet angle.*

Soit D un point quelconque pris sur la bissectrice de l'angle A. Les distances de ce point aux deux côtés de l'angle sont données par les perpendiculaires DB et DC (n° 38, 5°).



Les triangles rectangles ADB et ADC sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale AD et un angle aigu égal en A (n° 49, 2°); ainsi DB égale DC.

Donc *tout point de la bissectrice d'un angle...*

60. Réciproquement : *Tout point équidistant des deux côtés d'un angle appartient à la bissectrice de cet angle.*

Car si le point D est tel que l'on ait DB = DC, les triangles rectangles ADB et ADC sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale AD, et un autre côté égal (n° 49); donc les angles en A sont égaux, et AD est la bissectrice de l'angle A.

Donc *tout point équidistant des deux côtés...*

61. **Corollaires.** 1° *Tout point pris hors de la bissectrice d'un angle est inégalement distant des deux côtés de cet angle;* car si ce point était équidistant des deux côtés, il appartiendrait à la bissectrice (n° 60);

2° *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés de cet angle.*

§ IV. — DES PARALLÈLES

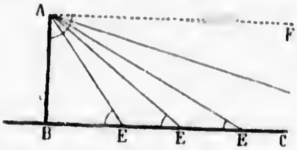
Définition.

62. On appelle *parallèles* des droites situées dans un même plan, et

qui ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge. — Telles sont les droites AB, CD, EF.

63. Une parallèle AF, menée par un point A, à une droite BC, peut être considérée comme la limite des positions successives que

prend une oblique AE qui part de ce point A, et dont le pied s'éloigne indéfiniment du pied de la perpendiculaire AB.



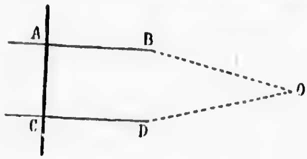
Pendant le mouvement de l'oblique AE, l'angle aigu E diminue, et tend vers *zéro;* à la limite, cet angle est nul.

En même temps, l'angle que l'oblique AE forme en A, avec la perpendiculaire, augmente de plus en plus, et tend vers *l'angle droit;* à la limite, cet angle est droit.

Donc les deux parallèles AF et BC sont perpendiculaires à la même droite AB.

Proposition XVII. — Théorème.

64. *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.*



Soient AB et CD deux perpendiculaires à la même droite AC.

Si les droites AB et CD se rencontraient en O, par exemple, il y aurait, de ce point, deux perpendiculaires OA et OC abaissées sur la même droite AC, ce qui est impossible (nº 36).

Donc *deux droites perpendiculaires...*

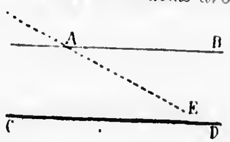
65. **Corollaire.** Pour *mener par un point donné* A, *une parallèle à une droite donnée* BC, on mène AB perpendiculaire à BC, puis AD perpendiculaire à AB. Les deux droites AD et BC sont parallèles comme perpendiculaires à la même droite AB.

Proposition XVIII. — Postulatum.

66. *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

On admet cette proposition comme évidente.

67. **Corollaires.** 1º *Si deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, toute*

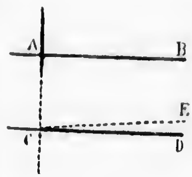


droite AE *qui rencontre l'une d'elles rencontre aussi l'autre.* — Car si AE ne rencontrait pas CD, il y aurait, par le point A, deux parallèles à CD (nº 62), ce qui est impossible (nº 66).

2° *Deux droites AB et CD parallèles chacune à une troisième EF sont parallèles entre elles.* — Car si AB et CD se rencontraient, il y aurait, par leur point de rencontre, deux parallèles à EF, ce qui est impossible.

Proposition XIX. — Théorème.

68. *Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

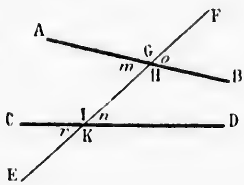


Soient AB et CD deux parallèles, et soit AC perpendiculaire sur AB.

Si l'on mène CE perpendiculaire sur AC, les deux droites AB et CE seront parallèles, comme perpendiculaires à la même droite AC (n° 64); or CD est donnée parallèle à AB; donc CD se confond avec CE (n° 66); par conséquent CD est perpendiculaire à AC, et réciproquement AC est perpendiculaire à CD.

Donc *si deux droites sont parallèles...*

69. **Définitions.** Lorsque deux droites quelconques AB et CD sont coupées par une sécante ou transversale EF, les huit angles formés, étant pris deux à deux, reçoivent différentes dénominations, selon leurs positions relatives.



m et *n* sont appelés angles *alternes-internes*, ainsi que H et I;

o et *r* sont appelés angles *alternes-externes*, ainsi que G et K;

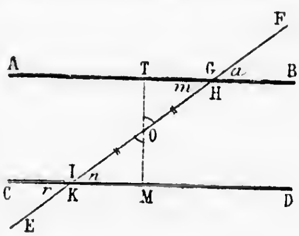
o et *n* sont appelés angles *correspondants*, ainsi que *m* et *r*, G et I, H et K;

H et *n* sont appelés angles *intérieurs d'un même côté*, ainsi que *m* et I;

o et K sont appelés angles *extérieurs d'un même côté*, ainsi que G et *r*.

Proposition XX. — Théorème.

70. *Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante ou transversale quelconque, ces droites forment huit angles, dont quatre aigus, égaux entre eux, et quatre obtus, aussi égaux entre eux.*



Soient les parallèles AB et CD, coupées par la sécante EF. Par le point O, milieu de GK, menons la droite TM perpendiculaire à AB et à CD (n° 68).

Les triangles rectangles OTG

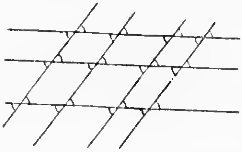
et OMK sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal en O; donc l'angle m de l'un égale n de l'autre.

Or, les angles m et a sont égaux comme opposés par le sommet, ainsi que n et r; donc les quatre angles aigus m, n, a, r sont égaux. Il en est de même des quatre angles obtus, G, H, I, K, car ces angles sont les suppléments d'angles égaux.

Donc, *lorsque deux droites parallèles...*

71. **Corollaire.** 1° *Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante :*

Les angles alternes-internes sont égaux;



Les angles alternes-externes sont égaux;

Les angles correspondants sont égaux.

Les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires.

Les angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.

2° *Si un faisceau de droites parallèles est coupé par un autre faisceau de parallèles, tous les angles aigus formés aux rencontres sont égaux, ainsi que tous les angles obtus, et ces derniers sont les suppléments des angles aigus.*

Proposition XXI. — Théorème.

72. Réciproquement : *Deux droites coupées par une sécante sont parallèles, lorsqu'elles forment :*

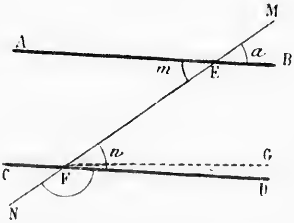
Des angles alternes-internes égaux,

Ou des angles alternes-externes égaux,

Ou des angles correspondants égaux,

Ou des angles intérieurs d'un même côté, supplémentaires,

Ou des angles extérieurs d'un même côté, supplémentaires.



Soient les deux droites AB et CD faisant, avec la sécante MN, des angles alternes-internes égaux, m et n.

Menons la droite FG parallèle à AB; en vertu du théorème direct, l'angle EFG égale m, lequel est donné égal à EFD. Donc la droite FD se confond avec FG, qui est parallèle à AB.

Les quatre autres cas mentionnés dans l'énoncé peuvent se ramener à celui qui vient d'être démontré $(m=n)$; par exemple, si l'on donne a et F supplémentaires, on a aussi n et F supplémentaires; donc $a = n$; d'ailleurs les angles a et m sont égaux comme opposés par le sommet; ainsi $m = n$...

Donc, *deux droites coupées par une sécante...*

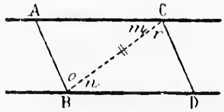
73. **Corollaires.** 1° *Deux droites situées dans un même plan se rencontrent lorsqu'elles font, avec une sécante quelconque, des angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondants, inégaux; ou bien des angles intérieurs d'un même côté, ou extérieurs d'un même côté, non supplémentaires*;*

2° *Deux droites situées dans un même plan se rencontrent lorsque l'une d'elles est perpendiculaire, et l'autre oblique, sur une troisième droite.*

Remarque. La théorie des parallèles une fois établie, il est d'usage de n'employer les mots *correspondants*, *alternes-internes*, etc., que pour les angles formés par deux parallèles et une sécante.

Proposition XXII. — Théorème.

74. *Les parties de droites parallèles comprises entre deux autres parallèles sont égales.*

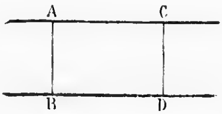


Soient AB et CD, deux parallèles comprises entre deux autres parallèles AC et BD.

Si l'on mène la droite BC, les angles m et n sont égaux comme alternes-internes, ainsi que les angles o et r; donc les deux triangles ABC et BCD sont égaux (n° 47, 1°), et AB égale CD. — De même $AC = BD$.

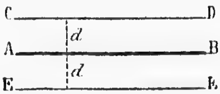
Donc *les parties de droites parallèles...*

75. **Corollaires.** 1° *Deux droites parallèles sont partout également*



distantes; car les droites AB et CD perpendiculaires aux parallèles AC et BD, sont elles-mêmes parallèles et égales entre elles (nos 64 et 74);

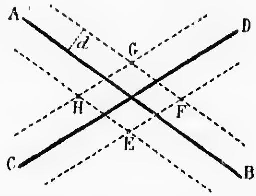
2° *Le lieu géométrique des points situés à une distance* d *d'une*



droite AB, *est l'ensemble des deux droites* CD *et* EF *menées de part et d'autre parallèlement à la droite donnée, et à la distance donnée.*

* C'est cet énoncé, appliqué au cas des angles intérieurs d'un même côté, que l'on désigne ordinairement sous le nom de *postulatum d'Euclide.*

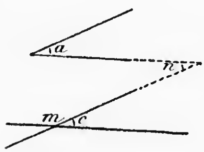
76. **Scolie.** Étant données deux droites AB et CD qui se coupent,



il existe quatre points, E, F, G, H, situés à une distance donnée d de ces deux droites; ces points sont les intersections des lieux géométriques tracés pour ces mêmes droites.

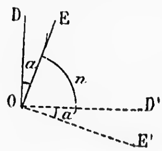
Proposition XXIII. — Théorème.

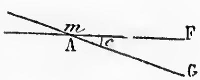
77. *Deux angles qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun sont égaux, ou supplémentaires.*



1° Soient a et c deux angles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun. Si l'on prolonge jusqu'à leur rencontre deux côtés non parallèles, les angles a et n sont égaux comme alternes-internes, ainsi que c et n; donc $a=c$.

Si l'on considère les deux angles a et m, les angles m et c étant supplémentaires, m et a le sont aussi.





2° Soient a et c deux angles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun.

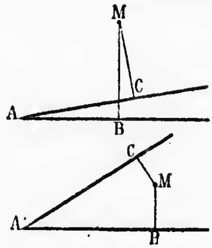
Menons OD' et OE' respectivement perpendiculaires sur OD et sur OE. On a $a+n=1^{dr}$ et $a'+n=1^{dr}$, d'où $a=a'$. De plus, les droites OD' et AF sont parallèles, comme perpendiculaires à la même droite OD; il en est de même des droites OE' et AG; ainsi les angles a' et c sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles; donc aussi $a=c$.

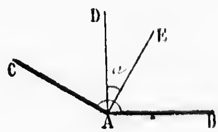
Les angles m et c étant supplémentaires, m et a le sont aussi.

Remarque. Le théorème pourrait s'énoncer ainsi : *Deux angles de même espèce* (aigus ou obtus) *qui ont les côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires sont égaux;* si ces angles sont d'espèce différente, ils sont supplémentaires.

78. **Scolie.** 1° Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque M extérieur à un angle sur les deux côtés, forment un angle égal au

premier; si le point M est pris dans l'angle ou dans son opposé par le sommet, le nouvel angle est supplémentaire du premier;





2° Si un angle aigu a et un angle obtus A ont même sommet et sont placés l'un dans l'autre avec les côtés respectivement perpendiculaires, ces deux angles sont supplémentaires.

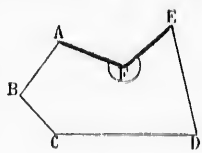
§ V. — LES POLYGONES

Définitions.

79. On appelle *polygone* toute figure plane limitée par des lignes droites; ces lignes sont les *côtés* du polygone.

Le triangle est le plus simple des polygones. Les polygones prennent les noms de *quadrilatère, pentagone, hexagone, heptagone, octogone, ennéagone, décagone, undéeagone, dodécagone,* suivant qu'ils ont, quatre, cinq, six..., douze côtés. Un *pentédécagone*, est un polygone de quinze côtés; les autres polygones se désignent par le nombre de leurs côtés.

80. Un *polygone convexe* est un polygone dont le contour ou périmètre ne peut être coupé en plus de deux points par une ligne droite.



Un polygone non convexe a des angles plus grands que deux angles droits. Ces angles sont appelés *angles rentrants.*

81. Un polygone est *équiangle* lorsque tous ses angles sont égaux; il est *équilatéral* lorsque tous ses côtés sont égaux.

On appelle *polygone régulier* tout polygone qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

Un polygone régulier est à la fois *équilatéral* et *équiangle*.

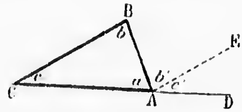
82. On appelle *diagonale* d'un polygone toute droite qui joint deux sommets non consécutifs.

83. On appelle *angle extérieur* d'un polygone tout angle formé par un côté quelconque, et le prolongement du côté adjacent.

Chaque angle extérieur d'un polygone est le supplément de l'angle intérieur adjacent.

Proposition XXIV. — Théorème.

84. *La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits.*



Soit ABC un triangle quelconque; prolongeons CA, et menons AE parallèle à CB.

Les angles b et b' sont égaux comme alternes-internes, c et c' sont égaux comme correspondants; ainsi la somme $a+b+c$ égale $a+b'+c'$; or cette dernière somme est égale à deux angles droits (nº 30, 2º).

Donc *la somme des angles...*

85. **Corollaires.** 1º *L'angle extérieur* BAD *d'un triangle égale la somme des deux angles intérieurs opposés* b *et* c;

2º *Chaque angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres;*

3º *Si deux triangles ont deux angles respectivement égaux, le troisième angle de l'un est aussi égal au troisième de l'autre;*

4º *Un triangle quelconque a toujours au moins deux angles aigus;*

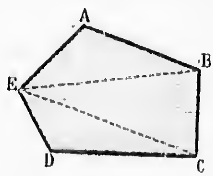
5º *Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires;*

6º *Chaque angle d'un triangle équilatéral égale les $^2/_3$ d'un angle droit.*

Proposition XXV. — Théorème.

86. *La somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque égale autant de fois deux angles droits que ce polygone a de côtés moins deux.*

Soit ABCDE un polygone quelconque. Si l'on joint le sommet E aux sommets non adjacents, par les droites EB et EC, chaque côté du polygone sert de base à un triangle, à l'exception des deux côtés qui forment l'angle E.



Or les angles de ces triangles sont tous formés des angles du polygone donné; donc la somme de ces angles égale autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois 2^{dr} que le polygone a de côtés moins deux.

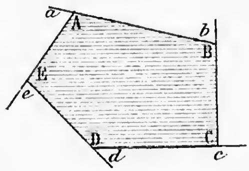
Donc *la somme des angles...*

87. **Scolie.** Si l'on appelle n le nombre des côtés d'un polygone, le nombre de triangles donnés par les diagonales partant d'un même sommet, sera $(n-2)$, et la somme des angles sera $(n-2)\times 2^{dr}$ ou $2n^{dr} - 4^{dr}$.

Si le polygone est régulier, chacun des angles égale $\frac{(n-2)\times 2^{dr}}{n}$, ou $\frac{2n-4}{n}$, ou $2^{dr}-\frac{4^{dr}}{n}$, l'angle droit étant pris pour unité.

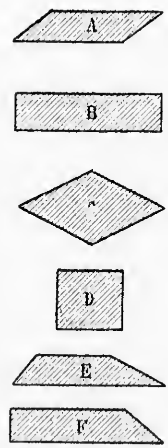
88. **Corollaires.** 1° *La somme des angles d'un quadrilatère quelconque égale quatre angles droits; et si le quadrilatère est équiangle, chaque angle est droit;*

2° *Si deux angles d'un quadrilatère sont supplémentaires, les deux autres angles le sont aussi;*



3° *La somme des angles extérieurs d'un polygone quelconque égale quatre angles droits.* Car n étant le nombre des côtés, la somme de tous les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, égale n fois 2 droits, ou $2n^{dr}$; si l'on retranche de cette somme 4 droits, on aura $2n^{dr}-4^{dr}$, ce qui est la somme des angles intérieurs (n° 87); donc ces quatre angles droits sont la valeur des angles extérieurs.

Définitions.



89. Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. — Figure A.

Un *rectangle* est un quadrilatère dont tous angles sont égaux, et par suite droits (n° 88). — Figure B.

Un *losange* est un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux. — Figure C.

Un *carré* est un quadrilatère qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. — Figure D. — C'est le quadrilatère régulier, à la fois losange et rectangle.

Un *trapèze* est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles; ces deux côtés sont les *bases* du *trapèze*. — Figure E.

Un trapèze est *rectangle* lorsque l'un des côtés non parallèles est perpendiculaire aux bases. — Figure F.

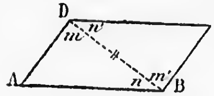
Un trapèze est *isocèle* lorsque les côtés non parallèles sont égaux.

Proposition XXVI. — Théorème.

90. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.*

Soit le parallélogramme ABCD. Menons la diagonale BD; les angles

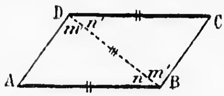
m et m' sont égaux, ainsi que n et n', comme alternes-internes; donc les deux triangles ABD et BCD sont égaux (nº 47, 1º), et les côtés AB et CD, opposés aux angles égaux m et m' sont égaux (nº 48); de même AD = BC.



De plus, les angles A et C sont égaux comme opposés au côté commun BD, et l'angle total B est égal à l'angle total D.

Donc *les côtés opposés d'un parallélogramme...*

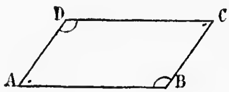
91. Réciproquement : *Tout quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux, ou ses angles opposés égaux, est un parallélogramme.*



1º Soit le quadrilatère ABCD, dans lequel on a AB = CD, AD = BC.

En menant la diagonale BD, on a deux triangles, ABD et BCD égaux comme ayant les côtés respectivement égaux; donc l'angle m de l'un égale m' de l'autre; et les droites AD et BC sont parallèles, comme faisant avec la sécante BD des angles alternes-internes égaux; de même les angles n et n' sont égaux, et les droites AB et CD qui forment ces angles sont parallèles (nº 72).

Ainsi le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (nº 89).



2º Soit le quadrilatère ABCD, dans lequel on a A = C et B = D.

La somme de ces quatre angles peut être représentée par 2A + 2B, et comme cette somme égale quatre angles droits (nº 88), on a

$$2A + 2B = 4 \text{ droits},$$

d'où

$$A + B = 2 \text{ droits};$$

donc les droites AD et BC sont parallèles (nº 72).

On peut poser également $2A + 2D = 4$ droits,

d'où

$$A + D = 2 \text{ droits};$$

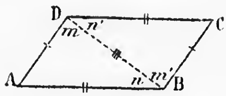
donc les droites AB et CD sont parallèles; et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Donc *tout quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux...*

92. **Corollaire.** *Le rectangle, le losange et le carré, sont des parallélogrammes.*

Proposition XXVII. — Théorème.

93. *Tout quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.*



Soit le quadrilatère ABCD, ayant les côtés AB et CD égaux et parallèles ;

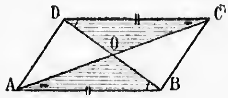
Si l'on mène la diagonale BD, les angles n et n' sont égaux comme alternes-internes; et les deux triangles ABD et BCD sont égaux (nº 47, 2º); donc les angles m et m' opposés aux côtés égaux AB et CD sont égaux, les droites AD et BC qui forment ces angles sont parallèles, et la figure ABCD est un parallélogramme.

Donc *tout quadrilatère qui a...*

Proposition XXVIII. — Théorème.

94. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.*

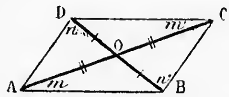
Soit ABCD un parallélogramme quelconque, et soient AC et BD ses diagonales.



Les côtés AB et CD sont égaux comme côtés opposés d'un parallélogramme; les angles A et B du triangle AOB sont respectivement égaux aux angles C et D du triangle COD, comme alternes-internes. Donc les triangles AOB et COD sont égaux (n° 47, 1°), le côté OA de l'un égale OC de l'autre, OB du premier égale OD du second; ainsi le point O est le milieu des deux diagonales.

Donc *les diagonales d'un parallélogramme...*

95. Réciproquement : *Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.*



Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales AC et BD se coupent en leurs milieux.

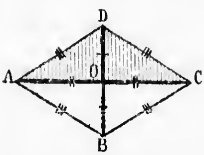
Les triangles opposés AOB et COD sont égaux comme ayant en O un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; donc l'angle m de l'un égale m' de l'autre; et les droites AB et CD qui forment ces angles sont parallèles.

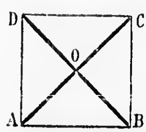
De même le triangle AOD = COB; l'angle $n = n'$, et les droites AD et CB sont parallèles. Ainsi le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Donc *tout quadrilatère dont les diagonales...*

96. **Scolie.** 1° *Les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.*

Soit le losange ABCD; cette figure étant un parallélogramme, le point O est le milieu des deux diagonales, et les triangles DOA et DOC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux; donc leurs angles en O sont égaux comme opposés aux côtés égaux DA et DC, et ces angles sont droits;





2° *Les diagonales d'un rectangle sont égales.* En effet, dans les triangles rectangles ABC et BCD, les angles droits B et C sont compris entre des côtés respectivement égaux, donc ces triangles sont égaux, et leurs hypoténuses sont égales.

3° *Dans un carré, les diagonales sont égales, et elles se coupent en leurs milieux et à angle droit;* car le carré est à la fois un rectangle et un losange.

EXERCICES SUR LE LIVRE I

Théorèmes à démontrer.

Les angles. — 1. Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires l'une à l'autre, et réciproquement.

2. Si l'angle des bissectrices de deux angles adjacents n'est pas droit, les côtés extérieurs ne sont pas en ligne droite.

3. Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite.

4. Lorsque deux droites se croisent, les bissectrices des quatre angles forment deux droites perpendiculaires entre elles.

5. La distance du milieu d'une droite à un point quelconque pris sur cette droite, égale la demi-différence des distances de ce point aux extrémités de la droite.

6. La distance du milieu d'une droite à un point quelconque pris sur le prolongement de cette droite, égale la demi-somme des distances de ce point aux extrémités de la droite.

7. L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée dans cet angle par le sommet, égale la demi-différence des angles partiels que cette droite détermine dans l'angle primitif.

8. L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée hors de cet angle par le sommet, égale la demi-somme des angles que forme cette droite avec les côtés de l'angle primitif.

Perpendiculaires et obliques. — 9. Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point quelconque pris à l'intérieur, la somme des trois lignes intérieures ainsi tracées est comprise entre la somme et la demi-somme des trois côtés.

10. Démontrer directement que tout point pris en dehors de la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est inégalement distant des extrémités de cette droite.

Triangles. — 11. La hauteur d'un triangle est moindre que la demi-somme des deux côtés qui partent du même sommet.

12. La somme des trois hauteurs d'un triangle est moindre que la somme des trois côtés.

13. Une médiane quelconque d'un triangle est plus petite que la demi-somme des deux côtés adjacents.

14. La somme des trois médianes d'un triangle est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre de ce triangle.

15. Les perpendiculaires menées aux deux côtés d'un angle, à des distances égales du sommet, se rencontrent sur la bissectrice.

16. Toute perpendiculaire à la bissectrice d'un angle rencontre les côtés à des distances égales du sommet.

17. Un triangle est isocèle lorsqu'une même droite y est à la fois médiane et hauteur, — ou bien bissectrice et hauteur, — ou bien bissectrice et médiane.

18. — Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, la bissectrice et la médiane

comprises sont l'une et l'autre plus grande que la hauteur qui part du même sommet.

19. Étant donné un angle quelconque A, si l'on porte sur les côtes, des distances égales AB et AD, AC et AE, les droites BE et CD menées en croix sont égales, et se rencontrent sur la bissectrice.

20. Un triangle isocèle a deux hauteurs égales, deux bissectrices égales, et deux médianes égales; les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés égaux et terminées aux côtés opposés sont aussi égales.

21. Un triangle est isocèle lorsqu'il a deux hauteurs égales, ou deux médianes égales; il en est de même lorsque deux des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés et terminées aux côtés opposés sont égales.

22. Démontrer directement que tout point pris hors de la bissectrice d'un angle est inégalement distant des deux côtés de cet angle.

Parallèles. — 23. Si deux angles ont les côtés parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires.

24. Si deux angles ont les côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles.

Polygones. — 25. Dans un triangle isocèle la somme des distances d'un point quelconque de la base aux deux côtés égaux est constante.

26. Pour un point quelconque pris sur le prolongement de la base d'un triangle isocèle, la différence des distances aux deux autres côtés est constante.

27. Pour un point quelconque pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral, la somme des distances aux trois côtés est égale à la hauteur du triangle.

28. La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et égale à sa moitié.

29. Les parallèles menées par les sommets d'un triangle aux côtés opposés, forment un nouveau triangle qui a les sommets primitifs pour milieux de ses côtés.

30. En joignant par des droites les milieux des côtés d'un triangle, on partage ce triangle en quatre triangles égaux.

31. Les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est équidistant des trois sommets.

32. Les trois bissectrices d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est équidistant des trois côtés.

33. Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est situé aux $^2/_3$ de chaque médiane en partant des sommets.

34. Les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point.

35. Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme.

36. Dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en leurs milieux.

37. Les bissectrices intérieures d'un parallélogramme se rencontrent de manière à former entre elles un rectangle.

38. Les bissectrices intérieures d'un quadrilatère quelconque se rencontrent de manière à former un nouveau quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires.

39. Les bissectrices intérieures d'un rectangle se rencontrent en formant un carré.

40. La médiane qui tombe sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moitié de cette hypoténuse.

41. Si une médiane d'un triangle est moitié du côté sur lequel elle tombe, le triangle est rectangle.

42. Si un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moitié de l'hypoténuse, l'angle opposé à ce côté égale $^1/_2$ de droit, et réciproquement.

43. Toute droite menée dans un parallélogramme par le point de rencontre des diagonales, a ce point pour milieu; et c'est pourquoi ce point est nommé *centre* du parallélogramme.

44. Deux parallélogrammes sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; — 2° lorsqu'ils ont deux côtés adjacents respectivement égaux, et une diagonale égale et de même position; — 3° lorsque leurs diagonales sont égales et se coupent sous un même angle.

45. Dans un trapèze, la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases et égale à leur demi-somme; et la partie de cette droite comprise entre les deux diagonales est égale à la demi-différence des bases.

46. Dans un quadrilatère convexe, la somme des diagonales est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre.

47. Deux quadrilatères sont égaux : 1° lorsqu'ils ont trois côtés et les deux angles compris respectivement égaux; — 2° lorsqu'ils ont deux côtés consécutifs et les trois angles adjacents respectivement égaux; — 3° lorsqu'ils ont un angle égal et les quatre côtés respectivement égaux et placés dans le même ordre.

48. Dans un triangle rectangle, la médiane et la hauteur qui partent du sommet de l'angle droit font entre elles un angle égal à la différence des angles aigus.

49. A un plus grand côté d'un triangle correspond une plus petite médiane.

50. La somme des trois médianes d'un triangle est plus grande que les $^3/_4$ du périmètre.

51. Dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

52. Si par le point de concours des bissectrices d'un triangle, on mène une parallèle à l'un des côtés, cette ligne égale la somme des segments déterminés sur les deux autres côtés, et compris entre les parallèles.

Lieux géométriques à trouver.

1. Lieu des points également distants de deux droites parallèles.
2. Lieu des sommets des triangles qui ont même base et même hauteur.
3. Lieu des centres des parallélogrammes qui ont la même base et la même hauteur.
4. Lieu des milieux des droites menées d'un point donné à une droite donnée.
5. Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites données soit égale à une ligne donnée.
6. Lieu des points tels que la différence des distances de chacun d'eux à deux droites données soit égale à une ligne donnée.

Problèmes.

1. Est-il toujours vrai qu'un point en mouvement engendre une ligne, qu'une ligne en mouvement engendre une surface, et qu'une surface en mouvement engendre un volume?
2. Quel angle font les deux aiguilles d'une horloge à 1 heure, à 2 heures, à 3 heures, à 4 heures, et à 5 heures?
3. Quel angle font les deux aiguilles d'une horloge quand il est 2 heures moins 12 minutes?
4. Quel est le complément d'un angle de 23° 27′ 25″? — Quel est le supplément de ce même angle?
5. Quel est l'angle qui a pour supplément 47° 45′?
6. Quelle est la moitié de l'angle 125° 17′?

7. Calculer la valeur angulaire égale à 7 fois 128° 34′ 17″ $^1/_7$?

8. Deux angles adjacents ont ensemble 153° 48′ ; quel est l'angle des deux bissectrices ?

9. Dans quel cas l'angle des bissectrices de deux angles adjacents est-il aigu ? — Dans quel cas est-il obtus ?

10. Que faut-il faire pour trouver un point équidistant de trois points donnés ?

11. Que faut-il faire pour trouver un point équidistant de trois droites données ?

12. Quel est le nombre des côtés d'un polygone dont les angles valent ensemble 36 angles droits ?

13. Combien un polygone régulier a-t-il de côtés, si son angle intérieur vaut 1 droit $^5/_7$?

14. Peut-on faire un carrelage avec des carreaux taillés en triangles équilatéraux égaux ? — Avec des carrés égaux ? — Avec des pentagones réguliers égaux ? Avec des hexagones réguliers égaux ?

15. Quelle heure est-il lorsque la petite aiguille d'une horloge se trouve entre 2 et 3 heures, et que l'angle des deux aiguilles est 60 degrés ?

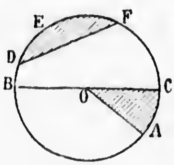
LIVRE II

LA CIRCONFÉRENCE

§ I. — ARCS ET CORDES

Définitions.

97. La *circonférence* est une courbe plane et fermée dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur qu'on nomme *centre*.



On appelle *rayon* toute droite qui joint le centre à un point quelconque de la circonférence. — Exemple OA.

Un *arc* est une partie quelconque de la circonférence. — Exemple DEF.

Une *corde* est une droite qui joint deux points quelconques de la circonférence. — Telle est DF.

Un *diamètre* est une corde qui passe par le centre. — Exemple BC.

On nomme *sécante* toute droite qui traverse la circonférence; la sécante n'est qu'une *corde* prolongée.

Un *angle au centre* est un angle formé par deux rayons. — Exemple: l'angle AOC.

98. Le *cercle* est la surface plane limitée par la circonférence.

Un *secteur circulaire* est la surface comprise entre deux rayons et l'arc qu'ils déterminent. — Exemple AOC.

Un *segment circulaire* est la surface comprise entre une corde et l'arc qu'elle sous-tend. — Exemple DFE.

99. **Remarque.** 1° *Tous les rayons d'un même cercle sont égaux, ainsi que tous les diamètres; le diamètre vaut deux rayons;*

2° *Deux cercles de même rayon sont égaux, et réciproquement;*

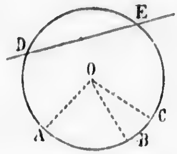
3° *La circonférence est le lieu géométrique des points dont la distance au centre est égale au rayon;*

4° Pour faire coïncider deux cercles égaux, il suffit de les placer dans le même plan, centre sur centre.

Proposition I. — Théorème.

100. *Une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

Car si l'on supposait que trois points, A, B, C, d'une circonférence, pussent appartenir à une même ligne droite, il y aurait, du centre à cette ligne, trois droites égales, OA, OB, OC, ce qui est impossible (nº 38, 3º).

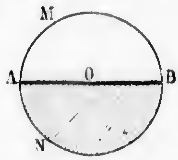


Donc *une ligne droite ne peut rencontrer...*

Proposition II. — Théorème.

101. *Tout diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

En effet, si l'on fait tourner la partie AMB de la figure autour du diamètre AB, un point quelconque M de l'arc supérieur restera toujours à la même distance du centre; donc ce point ne pourra tomber ni en dedans ni en dehors de l'arc inférieur ANB (nº 99, 3º).



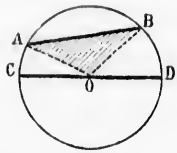
Les deux parties de la figure sont égales, puisqu'elles coïncident.

Donc *tout diamètre...*

Proposition III. — Théorème.

102. *Toute corde est plus petite que le diamètre du même cercle.*

En effet, la corde AB étant une ligne droite, est plus courte que la ligne brisée AO + OB, laquelle est égale au diamètre CD.

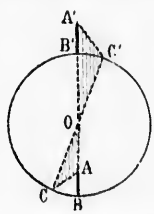


Donc *toute corde...*

Proposition IV. — Théorème.

103. *La plus courte distance d'un point à une circonférence est la partie du rayon comprise entre ce point et la circonférence si le point est intérieur; c'est le prolongement du rayon mené vers ce point, s'il est extérieur au cercle.*

1º Soit A un point intérieur, OAB le rayon mené par ce point, et AC une droite menée de ce même point à un point quelconque de la circonférence.



En menant le rayon OC, on a $OC < OA + AC$, ou, en remplaçant OC par $OA + AB$

$$OA + AB < OA + AC$$

et en retranchant OA de part et d'autre

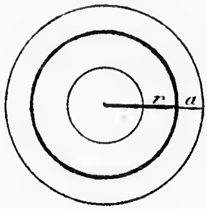
$$AB < AC.$$

2º Soit A' un point extérieur, OA' la droite qui joint ce point au centre, et A'C' une droite menée de ce même point à un point quelconque de la circonférence.

En menant le rayon OC', on a $AB' + B'O < A'C' + C'O$,

d'où, en retranchant les rayons BO et CO, $A'B' < A'C'$.

Donc *la plus courte distance d'un point...*

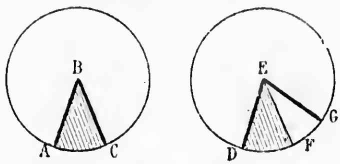


104. **Corollaires.** 1° La droite AB donne la vraie distance du point A à la circonférence.

2° Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée a d'une circonférence de rayon r, se compose de deux autres circonférences concentriques à la première, et ayant pour rayons, l'une $r+a$, et l'autre $r-a$.

Proposition V. — Lemme.

105. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*
1° *Deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux;*
2° *Un plus grand angle au centre embrasse un plus grand arc.*



1° Soit l'angle ABC égal à DEF. On peut superposer les deux cercles de manière que le rayon BA s'applique sur son égal ED; les deux cercles coïncideront ; l'angle ABC s'appliquera sur son égal DEF, et l'arc AC se confondra avec DF ; donc ces arcs sont égaux.

2° Soit l'angle ABC plus petit que DEG. Posons le premier cercle sur le second de manière que les rayons BA et ED coïncident. L'angle ABC ne couvrira qu'une partie de l'angle DEG, et l'arc AC une partie seulement de l'arc DG. On a donc AC < DFG.

Donc, *dans un même cercle ou dans...*

106. Réciproquement : *A des arcs égaux correspondent des angles au centre égaux, et à un plus grand arc correspond un plus grand angle.* (Mêmes figures.)

1° Soit l'arc AC égal à DF. Il en résulte que l'angle ABC égale DEF, car si ces angles étaient inégaux, les arcs interceptés le seraient aussi (n° 105, 2°).

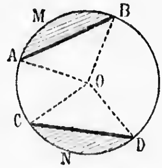
2° Soit l'arc AC plus petit que DG. Il en résulte que l'angle ABC est aussi plus petit que DEG; car si ces angles étaient égaux, les arcs interceptés le seraient aussi (n° 105, 1°); et si l'angle ABC était plus grand que DEG, l'arc AC serait aussi plus grand que DG, ce qui est contraire aux données...

Donc, *à des arcs égaux correspondent...*

Proposition VI. — Théorème.

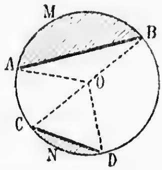
107. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*
1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales;*
2° *Un plus grand arc est sous-tendu par une plus grande corde.*

1° Soient AMB et CND deux arcs égaux; menons les rayons OA, OB, OC, OD.



Les deux arcs AMB et CND étant égaux, les angles au centre AOB et COD le sont aussi (n° 106); donc les triangles AOB et COD sont égaux comme ayant un angle égal en O, compris entre des côtés égaux; ainsi AB égale CD.

2° Soit l'arc AMB plus grand que CND; menons les rayons OA, OB, OC, OD.



Puisque l'arc AMB est plus grand que CND, l'angle au centre AOB est aussi plus grand que COD (n° 106); ainsi les deux triangles AOB et COD ont deux côtés respectivement égaux, et l'angle compris AOB plus grand que COD; donc le troisième côté AB est plus grand que CD (n° 50).

Donc, *dans un même cercle ou dans...*

108. Réciproquement : *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux;* car si ces arcs étaient inégaux, les cordes seraient aussi inégales (n° 107, 2°).

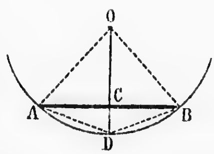
2° *Une plus grande corde sous-tend un plus grand arc;* car si les arcs étaient égaux, les cordes seraient aussi égales; et si le premier arc était plus petit que le second, la première corde serait plus petite que la seconde, ce qui est contraire à l'hypothèse...

109. **Scolie.** Dans toutes ces relations, il ne faut considérer que des arcs moindres que la demi-circonférence : si un arc dépasse la demi-circonférence, à mesure qu'il augmente, sa corde diminue.

Proposition VII. — Théorème.

110. *Tout rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et l'arc sous-tendu en deux parties égales.*

Soit le rayon OD perpendiculaire à la corde AB; menons les rayons OA et OB, et les cordes DA et DB.



1° Par rapport à la droite AB, les rayons OA et OB sont des obliques égales; donc leurs pieds A et B sont équidistants du pied C de la perpendiculaire (n° 38), et l'on a CA = CB.

2° Les cordes DA et DB sont deux obliques égales, comme ayant leurs pieds équidistants du pied de la perpendiculaire (n° 37, 2°); ces cordes étant égales, les arcs sous-tendus DA et DB sont égaux (n° 108).

Donc *tout rayon perpendiculaire...*

111. **Scolie.** La droite OD remplit quatre conditions, dont deux suf-

fisent pour la déterminer; et cette remarque fournit six propositions, que l'on peut établir séparément, mais qui se trouvent toutes démontrées par l'une quelconque d'entre elles :

1° *Tout rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et l'arc sous-tendu en deux parties égales;*

2° *Toute perpendiculaire menée par le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc sous-tendu ;*

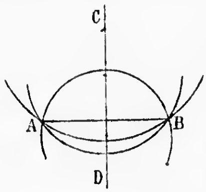
3° *Toute perpendiculaire abaissée du milieu d'un arc sur la corde, passe au milieu de cette corde et au centre du cercle;*

4° *Tout rayon mené par le milieu d'une corde, passe aussi par le milieu de l'arc sous-tendu, et est perpendiculaire à la corde;*

5° *Tout rayon mené par le milieu d'un arc est perpendiculaire au milieu de la corde qui sous-tend cet arc;*

6° *Toute droite menée par les milieux d'une corde et de l'arc sous-tendu, passe aussi par le centre et est perpendiculaire à la corde.*

Ces propriétés sont vraies pour les deux arcs que sous-tend une même corde.

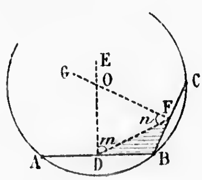


112. **Corollaires.** 1° *Pour diviser un arc donné en deux parties égales,* il suffit d'élever une perpendiculaire au milieu de la corde qui sous-tend cet arc;

2° *La perpendiculaire indéfinie* CD *menée par le milieu d'une droite* AB, *est le lieu des centres des circonférences qui passent par les extrémités* A *et* B *de cette droite.*

Proposition VIII. — Théorème.

113. *Par trois points donnés non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence, et on ne peut en faire passer qu'une.*



Soient A, B, C, trois points donnés non en ligne droite. Il s'agit de prouver qu'il existe un point équidistant de ces trois points, et qu'il n'y en a qu'un seul. Menons DE perpendiculaire au milieu de AB, FG perpendiculaire au milieu de BC, puis la droite DF.

L'angle m est aigu, comme étant moindre que l'angle droit EDB; il en est de même de l'angle n.

La somme des deux angles intérieurs m et n est donc moindre que deux angles droits, et les droites DE et FG se rencontrent (n° 73).

1° Le point commun O appartenant à la première droite DE, est équidistant de A et de B (n° 39); ce même point O appartenant à la seconde droite FG, est équidistant de B et de C. Ainsi les trois distances OA, OB, OC, sont égales; et la circonférence décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon, passera par les trois points A, B, C (n° 99, 3°).

2° Toute circonférence qui passera par les points A et B aura nécessairement son centre sur la droite indéfinie DE (n° 112, 2°); et toute circonférence qui passera par les points B et C aura nécessairement son centre sur la droite indéfinie FG. Ainsi pour toute circonférence passant par les trois points A, B, C, le centre doit être à la fois sur DE sur FG, et par conséquent en O, unique point de rencontre de ces deux droites.

Donc *par trois points donnés...*

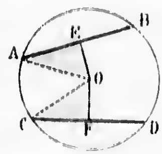
114. **Scolie.** 1° Pour trouver le centre d'un arc donné ABC, il suffit de tracer deux cordes quelconques AB et BC, et d'élever des perpendiculaires en leurs milieux;

2° Si l'on fait passer une circonférence par les trois sommets d'un triangle, cette circonférence est *circonscrite* au triangle, et le triangle est *inscrit* à la circonférence;

3° *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle concourent en un même point; et ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

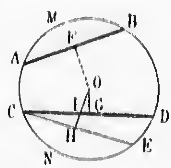
Proposition IX. — Théorème.

115. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes égales sont également éloignées du centre, et une plus grande corde est plus rapprochée du centre.*



1° Soient AB et CD deux cordes égales, OE et OF les perpendiculaires qui représentent les distances de ces cordes au centre O. Les points E et F sont les milieux des cordes AB et CD (n° 110); et comme ces cordes sont égales, leurs moitiés AE et CF le sont aussi.

Si l'on mène les rayons OA et OC, les triangles rectangles OEA et OFC sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un autre côté égal (AE = CF); donc le troisième côté OE de l'un égale le troisième côté OF de l'autre.



2° Soit la corde AB plus petite que CD, et soient OF et OG les distances de ces cordes au centre O.

L'arc AMB, est plus petit que CND (n° 108, 2°); donc si l'on porte le premier arc en CNE, la corde CE, égale à AB, se trouvera dans le segment CDN; la distance OH, égale à OF, coupera donc la corde CD, et sera par conséquent plus grande que OG.

Donc, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux...*

116. Réciproquement : 1° *Deux cordes également éloignées du centre sont égales;* car si ces cordes étaient inégales, leurs distances au centre seraient ausssi inégales;

2° *Une corde plus rapprochée du centre est plus grande;* car si le cordes étaient égales, elles seraient également éloignées du centre; et si la première corde était la plus petite, sa distance au centre serait plus grande, ce qui est contraire à l'hypothèse...

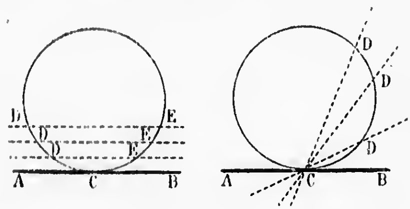
§ II. — TANGENTES

Définitions.

117. On appelle *tangente* toute droite indéfinie qui n'a qu'un point commun avec la circonférence. Ce point commun est nommé *point de contact*.

Lorsqu'une droite est tangente à une circonférence, la circonférence est elle-même tangente à la droite.

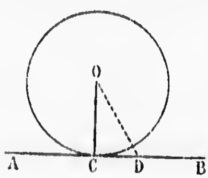
118. Une tangente AB peut être considérée : 1° Comme la *limite* des positions que prend une sécante DE qui se meut parallèlement à elle-même en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que les deux points d'intersection D et E se confondent en un seul;



2° Comme la *limite* des positions que prend une sécante CD qui tourne autour du point C, jusqu'à ce que le second point d'intersection se confonde avec le premier.

Proposition X. — Théorème.

119. *Toute droite perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.*



Soit la droite AB perpendiculaire à l'extrémité du rayon OC. Ce rayon OC sera lui-même perpendiculaire sur AB, et toute autre droite OD sera oblique, et par conséquent plus longue que le rayon OC. Ainsi la droite AB n'a que le point C commun avec la circonférence.

Donc *toute droite perpendiculaire...*

120. Réciproquement : *Toute droite tangente à une circonférence est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.*

(Même figure.)

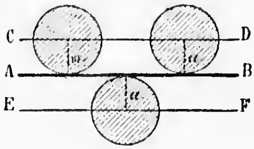
Soit OC le rayon mené au point de contact de la tangente AB. A l'exception du point C, tous les autres points de AB sont hors du cercle; OC est donc la plus courte ligne que l'on puisse mener du point O à la droite AB. Ainsi cette ligne OC est perpendiculaire à AB, et réciproquement la tangente AB est perpendiculaire au rayon OC.

Donc *toute droite tangente à une circonférence...*

121. **Corollaires.** 1° Pour *mener une tangente en un point donné d'une circonférence*, on élève une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit à ce point;

2° *Par tout point donné sur une circonférence, on peut mener une tangente, et une seule;*

3° *La perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente aboutit au point de contact;*



4° *Le lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon donné a tangentiellement à une droite donnée* AB, se compose de deux droites parallèles à AB, et situées de part et d'autre à une distance égale au rayon donné.

Définitions.

122. Une droite est *normale* en un point d'une courbe, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente menée par ce même point.

Une droite est *oblique* en un point d'une courbe, lorsqu'elle est oblique à la tangente menée par ce même point.

En chaque point d'une circonférence, on peut mener une normale, et on n'en peut mener qu'une; et cette normale passe par le centre.

La distance d'un point quelconque à une circonférence est représentée par une droite normale à cette circonférence (nos 103 et 104).

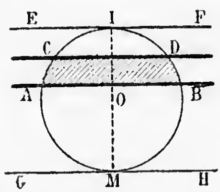
Proposition XI. — Théorème.

123. *Deux droites parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

1° Soient les parallèles AB et CD. Menons le rayon OI perpendiculaire à AB, et par suite à CD (n° 68). Le point I sera le milieu de l'arc AIB, et en même temps le milieu de l'arc CID (n° 110), on a donc : IA = IB

IC = ID

d'où en retranchant membre à membre AC = BD.



2° Soit la corde CD parallèle à la tangente EF. Le rayon OI mené au point de contact est perpendiculaire à la tangente EF (n° 120), et par suite à CD; il divise donc l'arc sous-tendu CID en deux parties égales;

3° Soit enfin le cas de deux tangentes parallèles EF et GH. Menons une corde quelconque AB parallèle à EF, et par suite aussi à GH. En vertu de ce qui vient d'être démontré, on a : $IA = IB$

$MA = MB$

d'où, en additionnant membre à membre $IAM = IBM$.

Donc *deux droites parallèles interceptent...*

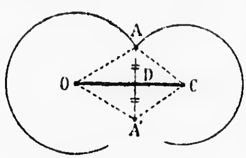
124. **Scolie.** *Si deux tangentes* EF *et* GH *sont parallèles, les rayons* OI *et* OM *menés aux points de contact sont en ligne droite.* Car le rayon OI, perpendiculaire à EF, est aussi perpendiculaire à GH, et se confond par conséquent avec OM (n° 36).

125. **Définitions.** Deux circonférences sont *tangentes* lorsqu'elles se touchent en un seul point. Quand elles se coupent, elles sont *sécantes.*

Proposition XII. — Théorème.

126. *Si deux circonférences ont un point commun en dehors de la ligne des centres, elles ont aussi un autre point commun symétrique du premier *.*

Soient O et C les centres de deux circonférences, et soit A un point commun, en dehors de la ligne des centres. Menons AA′ perpendiculaire à OC, et faisons $DA' = DA$. Il s'agit de prouver que le point A′, symétrique de A par rapport à OC, est commun aux deux circonférences.



Menons OA, OA′, CA, CA′. Par suite des constructions, la droite OC est perpendiculaire au milieu de AA′; donc (n° 39) OA′ égale OA, rayon de la première circonférence; de même CA′ égale CA, rayon de la deuxième circonférence. Ainsi le point A′ appartient aux deux circonférences (n° 99, 3°).

Donc *si deux circonférences ont un point...*

127. **Corollaires.** 1° *Si deux circonférences se coupent, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.* Car, dans ce cas, on peut construire un triangle AOC avec les deux rayons et la ligne des centres (n° 35);

2° *Si deux circonférences sont tangentes, le point de contact est sur la ligne des centres.* Car s'il était en dehors de cette ligne, il y aurait un autre point commun symétrique du premier, et les deux circonférences seraient sécantes;

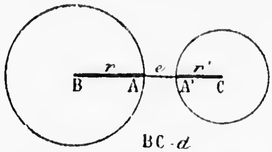
3° *Si deux circonférences sont tangentes, la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres par le point de contact est une tangente commune aux deux circonférences.*

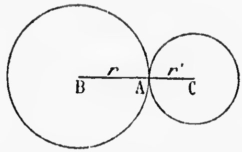
128. **Scolie.** Deux circonférences peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, cinq positions différentes :

* Deux points sont *symétriques* par rapport à une droite lorsque cette droite est perpendiculaire au milieu de la ligne qui joint les deux points.

1° Elles peuvent être *extérieures* l'une à l'autre ; alors la distance des centres est plus grande que la somme des rayons : $d = (r + r') + e$;

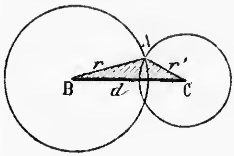
2° Elles peuvent être *tangentes extérieurement* ; dans ce cas la distance des centres est égale à la somme des rayons : $d = r + r'$;

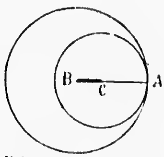


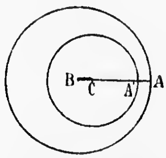


3° Elles peuvent être *sécantes* ; alors la distance des centres est comprise entre la somme et la différence des rayons : $(r + r') > d > (r - r')$

4° Elles peuvent être *tangentes intérieurement* ; et dans ce cas la distance des centres égale la différence des rayons : $d = r - r'$;







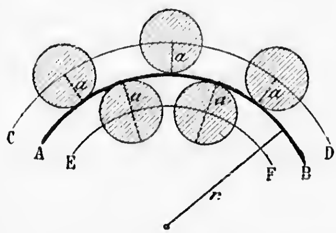
BA.r CA.r' BA.r CA'.r' BC=d AA'.e

5° Enfin, elles peuvent être *intérieures* l'une à l'autre ; alors la distance des centres est moindre que la différence des rayons :

$$d = (r - r') - e.$$

Deux circonférences intérieures peuvent être *concentriques*, c'est-à-dire avoir le même centre ; l'espace compris entre les deux circonférences porte alors le nom de *couronne*.

129. Les cinq énoncés relatifs aux positions respectives de deux circonférences donnent lieu à cinq propositions réciproques, qui se démontrent par *réduction à l'absurde*. Par exemple, si l'on donne *la distance des centres égale à la différence des rayons*, les circonférences ne peuvent être extérieures, ni intérieures, ni sécantes, ni tangentes extérieurement ; elles sont donc tangentes intérieurement.



130. **Corollaires.** Le lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon donné a, tangentiellement à un arc donné AB, se compose de deux arcs CD et EF, concentriques au

premier, et décrits l'un avec la somme $r+a$, et l'autre avec la différence $r-a$ des rayons.

§ III. — MESURE DES ANGLES

Définitions.

131. *Mesurer un angle,* c'est chercher son rapport à l'angle choisi comme unité.

Dans la mesure des angles, on emploie deux unités principales, savoir : l'*angle droit* et l'*angle d'un degré*.

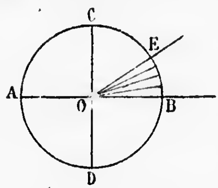
132. Outre les degrés angulaires, on considère aussi des *degrés d'arcs:* un *arc d'un degré* est la 360[e] partie de la circonférence.

L'arc d'un degré est plus ou moins grand, selon que la circonférence est elle-même plus ou moins grande.

Un arc de 180 degrés est une demi-circonférence; un arc de 90 degrés est un quart de circonférence; c'est ce que l'on nomme quelquefois un *quadrant*. Deux rayons perpendiculaires embrassent un quadrant.

Un arc de 120 degrés est le tiers de la circonférence; un arc de 60 degrés en est la sixième partie; un arc de 72 degrés en est les $\frac{72}{360}$ ou le $\frac{1}{5}$, et, en général, un arc de n degrés est les $\frac{n}{360}$ de la circonférence.

133. **Remarque.** Si, dans un cercle quelconque, on conçoit deux diamètres perpendiculaires AB et CD, et chaque angle droit divisé en 90 angles égaux, les arcs intercepetés sur la circonférence sont tous égaux entre eux. Chaque angle au centre est un *angle d'un degré*, et chaque arc intercepté est un *arc d'un degré*.



D'où il suit que si l'on considère un angle au centre quelconque EOB, autant d'*angles d'un degré* il y aura dans cet angle, autant d'*arcs d'un degré* il y aura dans l'arc intercepté BE.

Proposition XIII. — Théorème.

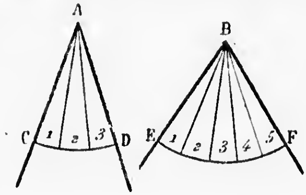
134. *Deux angles quelconques sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets avec un même rayon.*

Soient A et B deux angles quelconques, CD et EF les arcs compris entre leurs côtés.

Admettons que les arcs CD et EF aient une commune mesure, qui soit contenue 3 fois exactement dans CD, et 5 fois dans EF; ces arcs sont entre eux comme les nombres 3 et 5, et l'on a $\frac{\text{arc CD}}{\text{arc EF}}=\frac{3}{5}$ *.

* Lisez *arc* CD *est à arc* EF *comme* 3 *est à* 5.

Joignons les centres A et B aux points de division des deux arcs; les arcs partiels étant égaux, ils déterminent aux centres des angles égaux (nº 106); l'angle A contient 3 de ces angles égaux, et l'angle B en contient 5; donc l'angle A est à l'angle B comme 3 est à 5 : $\frac{A}{B}=\frac{3}{5}$. Ainsi les deux angles donnés sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés.



Cette démonstration est applicable à tous les cas, quel que soit le rapport que l'on supposera entre les arcs.

Donc *deux angles quelconques sont entre eux* ..

135. **Corollaires.** 1° *Un angle quelconque est à l'angle droit, comme l'arc compris entre les côtés de cet angle est au quadrant;*

2° *Un angle quelconque est à l'angle d'un degré, comme l'arc compris entre les côtés de cet angle est à l'arc d'un degré.*

En d'autres termes, le nombre qui exprime le rapport d'un angle quelconque à l'angle d'un degré, est le même que le nombre qui exprime le rapport de l'arc compris à l'arc d'un degré.

C'est ce que l'on formule ordinairement par la proposition suivante : *Un angle quelconque a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet avec un rayon quelconque.*

Définitions.

136. On appelle *angle inscrit* tout angle qui a son sommet sur la circonférence, et qui est formé par deux cordes.

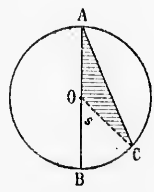
On appelle *angle du segment* un angle qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par une corde et une tangente.

Un angle est *inscrit dans un segment* (nº 98) lorsqu'il a son sommet sur l'arc de ce segment, et que ses côtés passent par les extrémités de ce même arc. Le *segment* est alors *circonscrit à l'angle.*

Proposition XIV. — Théorème.

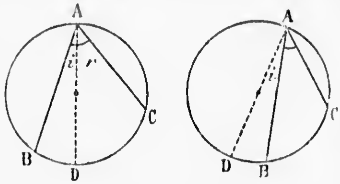
137. *L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Nous considérerons trois cas :



1° Soit A un angle inscrit dont un côté AB passe par le centre. Si l'on mène le rayon OC, le triangle AOC est isocèle (nº 99), et les angles A et C sont égaux (nº 52). L'angle s, extérieur au triangle AOC, égale la somme des angles intérieurs opposés, A et C (nº 85); ainsi l'angle A est la moitié de l'angle s. Mais l'angle s a pour mesure l'arc BC; donc l'angle A a pour mesure la moitié de l'arc BC.

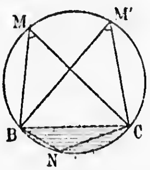
2° Si le centre se trouve à l'intérieur de l'angle donné BAC, on mène un diamètre AD, qui partage cet angle en deux autres, i et r; chacun d'eux se trouve dans le cas précédent; ainsi l'angle i a pour mesure la moitié de l'arc BD, et l'angle r la moitié de l'arc DC; donc l'angle A, qui égale $i+r$, a pour mesure la moitié de l'arc total BDC.



3° Enfin, si le centre est en dehors de l'angle donné BAC, on mène encore le diamètre AD, et l'angle BAC est égal à la différence des deux angles DAC et DAB; chacun d'eux rentre dans le premier cas; donc l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc DC, moins la moitié de l'arc BD, soit la moitié de l'arc BC.

Donc *l'angle inscrit a pour mesure la moitié...*

138. **Corollaires.** 1° *Tous les angles* M, M', *inscrits dans un même segment, sont égaux;* car tous ont pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé;



2° *Tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit;* car il a pour mesure la moitié d'une demi-circonférence, ou un quadrant;

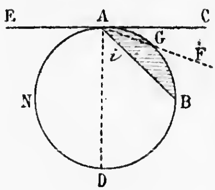
3° *Tout angle* M *inscrit dans un segment plus grand que le demi-cercle est aigu; et tout angle* N *inscrit dans un segment plus petit que le demi-cercle est obtus;*

4° *Deux angles* M *et* N, *inscrits dans les deux segments déterminés par une même corde* BC, *sont supplémentaires;* car ils ont ensemble pour mesure la moitié de la circonférence.

139. **Définitions.** *Un segment* est dit *capable d'un angle donné* lorsque tout angle inscrit dans ce segment est égal à l'angle donné. L'arc du segment est aussi appelé l'*arc capable de l'angle donné.*

Proposition XV. — Théorème.

140. *L'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*



Soit ACB un angle du segment; menons le diamètre AD. L'angle BAC égale l'angle droit CAD, moins l'angle inscrit BAD ou i; donc la mesure de l'angle BAC égale la moitié de la demi-circonférence ABD, moins la moitié de l'arc BD, c'est-à-dire la moitié de l'arc AGB.

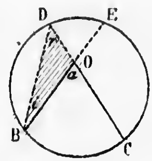
Donc *l'angle du segment a pour mesure...*

Scolie. 1° Si l'on considère l'angle obtus BAE, qui se compose de l'angle droit EAD plus de l'angle i, sa mesure égale $\frac{1}{2}$ AND + $\frac{1}{2}$ BD, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ ANDB.

2° On arrive autrement à la mesure de l'angle du segment BAC, en le considérant comme la limite vers laquelle tend l'angle inscrit BAF, lorsque le côté BA restant fixe, le côté AF tourne autour du point A de manière que le point G se rapproche indéfiniment du point A.

Proposition XVI. — Théorème.

141. *L'angle qui a son sommet entre le centre et la circonférence a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés et entre leurs prolongements.*



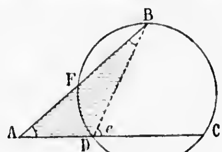
Soit l'angle BOC ou a; prolongeons les côtés BO et CO, et menons BD.

L'angle a, extérieur au triangle BOD, égale la somme des deux angles intérieurs opposés r et i (n° 85); ces deux angles étant inscrits, le premier a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC, et le second $\frac{1}{2}$ DE; ainsi l'angle a a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ DE.

Donc *l'angle qui a son sommet entre le centre...*

Proposition XVII. — Théorème.

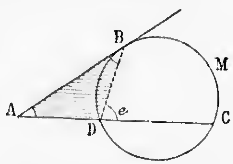
142. *L'angle formé par deux sécantes qui se rencontrent en dehors du cercle a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.*

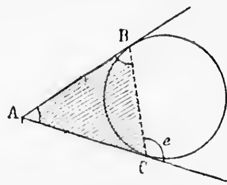


Soit l'angle BAC ou A; menons la corde BD. L'angle e, extérieur au triangle BAD, égale A + B; donc l'angle A = e — B. Or ces deux derniers angles sont inscrits, et ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BC et $\frac{1}{2}$ DF; ainsi l'angle A a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ DF.

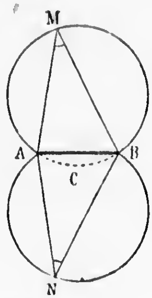
Donc *l'angle formé par deux sécantes...*

Scolie. La démonstration est applicable au cas où les sécantes de-





viennent des tangentes; alors les angles B et e deviennent des angles du segment.



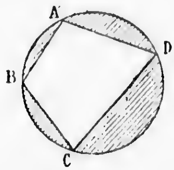
143. **Corollaires** des quatre théorèmes précédents.

1° *L'arc* AMB *d'un segment est le lieu des sommets des angles inscrits qui ont pour mesure la moitié de l'arc opposé* ACB; car pour tout angle dont le sommet serait en dedans ou en dehors du segment, la mesure serait plus grande ou plus petite que la moitié de l'arc ACB.

2° *Pour les angles égaux appuyés sur une même corde* AB, *le lieu des sommets est donné par deux arcs symétriques* AMB *et* ANB.

Proposition XVIII. — Théorème.

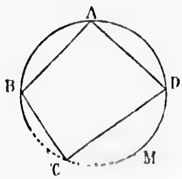
144. *Dans tout quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires.*



Soit ABCD un quadrilatère dont tous les sommets sont sur la circonférence. Tous les angles sont inscrits; et deux angles opposés, tels que A et C, ont ensemble pour mesure $^1/_2$BCD$+^1/_2$BAD, c'est-à dire la moitié de la circonférence; ainsi ces angles sont supplémentaires.

Donc, *dans tout quadrilatère inscrit...*

145. Réciproquement : *Tout quadrilatère qui a deux angles opposés supplémentaires est inscriptible.*



Soit ABCD un quadrilatère dont les angles opposés A et C sont supplémentaires. Si l'on fait passer une circonférence par les trois points B, A, D, l'angle A sera inscrit, et aura pour mesure la moitié de l'arc BMD. L'angle C, supplément de A, aura une mesure égale à la moitié de l'arc restant BAD; et ainsi le point C est nécessairement sur l'arc BMD (n° 143).

Donc, *tout quadrilatère qui a deux angles...*

§ IV. — POLYGONES RÉGULIERS

Définitions.

146. Un *polygone régulier* est un polygone qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles egaux.

Le *triangle équilatéral* et le *carré* sont des polygones réguliers.

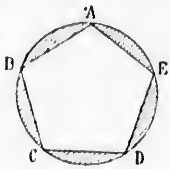
Un polygone est *inscrit* lorsque tous ses sommets sont sur une même circonférence, et *circonscrit,* lorsque tous ses côtés sont tangents à une même circonférence.

Une circonférence est *circonscrite* à un polygone lorsqu'elle passe par tous les sommets; elle est *inscrite* lorsqu'elle est tangente à tous les côtés.

Proposition XIX. — Théorème.

147. *Lorsqu'une circonférence est divisée en un nombre quelconque de parties égales, les cordes qui joignent consécutivement les points de division forment un polygone régulier inscrit.*

Soit, par exemple, une circonférence divisée en 5 parties égales; aux points A, B, C, D, E. Les arcs AB, BC, CD... étant égaux, les cordes AB, BC, CD..., qui les sous-tendent, sont égales (n° 107). D'ailleurs, chacun des angles A, B, C... est inscrit, et comprend entre ses côtés les $^3/_5$ de la circonférence; ainsi tous ces angles sont égaux, et le polygone inscrit est régulier.

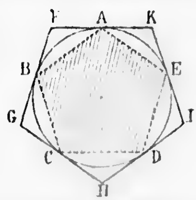


Donc, *lorsqu'une circonférence est divisée...*

Proposition XX. — Théorème.

148. *Lorsqu'une circonférence est divisée en un nombre quelconque de parties égales, les tangentes menées par les points de division forment un polygone régulier circonscrit.*

Soit, par exemple, une circonférence divisée en 5 parties égales, aux points A, B, C, D, E, et soit FGHIK le polygone circonscrit formé par les tangentes menées aux points de division. Menons les cordes AB, BC, CD...; ces cordes sont égales comme sous-tendant des arcs égaux. Dans les triangles ABF, BCG, CDH..., les angles en A, B, C..., sont égaux comme angles du segment comprenant des arcs égaux (n° 140); ainsi ces triangles sont égaux (n° 47), et chacun d'eux est isocèle (n° 53).



De là résulte l'égalité des angles F, G, H, I, K, et celle des côtés AF, FB, BG, GC, CH... On a donc aussi FG = GH = HI = IK = KF. Ainsi le polygone FGHIK est régulier, puisqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

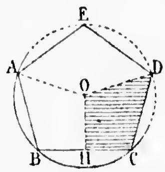
Donc, *lorsqu'une circonférence est divisée...*

Scolie. Le problème de la construction des polygones réguliers se confond avec le problème de la division de la circonférence en parties égales; et l'on peut circonscrire à la circonférence autant de polygones réguliers que l'on peut en inscrire.

Proposition XXI. — Théorème.

149. *A tout polygone régulier, on peut circonscrire une circonférence.*

Soit ABCDE un polygone régulier. Faisons passer une circonférence par les trois sommets A, B, C; nous allons prouver que cette circonférence passe aussi par les autres sommets.



Menons OA et OD, puis OH perpendiculaire à la corde BC, et supposons que le quadrilatère OHBA tourne autour de OH pour s'appliquer sur le quadrilatère OHCD. Les angles droits en H coïncident; et comme le point H est le milieu de la corde BC (nº 110), le point B tombe en C: les angles égaux B et C coïncident, et le côté BA se confond avec son égal CD (nº 146).

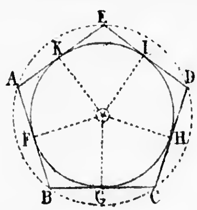
La coïncidence des deux quadrilatères étant complète, la droite OD égale le rayon OA; et ainsi la circonférence qui passe déjà par les trois sommets A, B, C, passe aussi par le sommet D. On démontrerait de même que cette circonférence passe aussi en E.

Donc, *à tout polygone régulier, on peut...*

Proposition XXII. — Théorème.

150. *Dans tout polygone régulier, on peut inscrire une circonférence.*

Soit ABCDE un polygone régulier. Décrivons la circonférence circonscrite (nº 149), et menons, du centre O, les perpendiculaires OF, OG, OH...



Les côtés AB, BC, CD..., sont des cordes égales, et par suite également éloignées du centre (nº 115); donc les perpendiculaires OF, OG, OH..., sont égales, la circonférence décrite avec OF comme rayon passe par les points G, H, I..., et les côtés AB, BC, CD... sont tangents à cette circonférence, comme étant perpendiculaires à l'extrémité des rayons OF, OG, OH...

Donc, *dans tout polygone régulier, on peut inscrire...*

Définitions.

151. On appelle *centre* d'un polygone régulier le centre commun des circonférences inscrite et circonscrite.

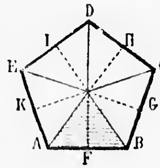
Ce n'est toutefois que dans le cas où le nombre des côtés du polygone est *pair,* que ce point est un vrai *centre de figure,* servant de milieu à toutes les droites menées dans la figure par ce point.

On nomme *rayon d'un polygone régulier* le rayon de la circonférence circonscrite à ce polygone, et *apothème* le rayon de la circonférence inscrite.

Les rayons d'un polygone régulier divisent ce polygone en triangles isocèles égaux.

Chaque rayon d'un polygone régulier est bissecteur de l'angle au sommet duquel il aboutit.

Les apothèmes sont bissecteurs des angles formés par les rayons, et les rayons sont bissecteurs des angles formés par les apothèmes.

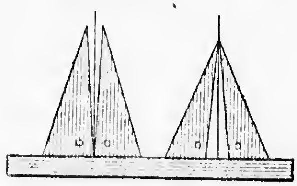


§ V. — CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

152. Les principaux instruments employés pour tracer les figures géométriques sont : la *règle*, le *compas*, l'*équerre* et le *rapporteur*.

La *règle* sert à tracer des lignes droites, le *compas* à tracer des circonférences ou des arcs, l'*équerre* à construire des angles droits et des perpendiculaires, et le *rapporteur* à mesurer et à construire des angles quelconques.

On vérifie la règle par un double tracé fait entre deux points, en retournant la règle.

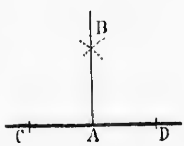


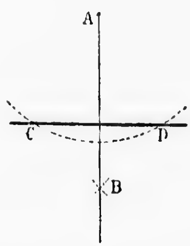
On vérifie l'équerre par une double pose le long d'une règle; si l'équerre est défectueuse, la moyenne des deux positions donne la vraie direction de la perpendiculaire.

Quelques règles, taillées en biseau, portent des divisions métriques en centimètres et millimètres, très-utiles pour le dessin des figures. Tels sont les *doubles décimètres* et les *règles à calcul*.

Problème I

153. *Par un point donné* A, *mener une perpendiculaire à une droite donnée* CD.

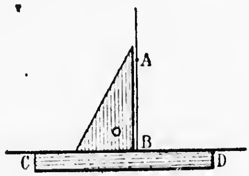




1° *Avec le compas.* Si le point A est donné sur la droite, on porte des distances égales AC et AD; des points C et D, avec un même rayon, on décrit des arcs se coupant en B.

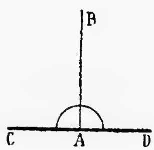
La droite AB est perpendiculaire à CD.— Car le point A est le milieu de CD, et le point B est équidistant des points C et D. AB est donc perpendiculaire au milieu de CD (nº 41).

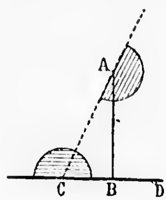
Si le point A est donné hors de la droite, on décrit, de ce point comme centre, un arc qui coupe la droite en deux points C et D; de ces points C et D, avec un même rayon, on décrit des arcs qui se coupent en B; AB est la perpendiculaire demandée. — Car le point A est équidistant des points C et D, et il en est de même du point B; donc AB est perpendiculaire au milieu de CD (nº 41).



2º *Avec l'équerre.* On applique la règle le long de la droite donnée; on fait glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'auprès du point donné A, et l'on trace AB, qui est la perpendiculaire demandée, car l'angle ABC est droit.

3º *Avec le rapporteur.* Si le point A est donné sur la droite, on place le rapporteur de manière que son diamètre soit sur la droite CD, et son centre sur le point donné; on marque un angle de 90 degrés, et la ligne AB qui donne cet angle est la perpendiculaire demandée.

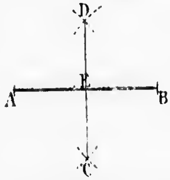


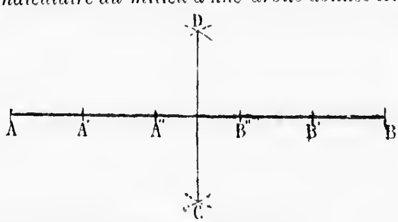


Si le point A est donné hors de la droite CD, on trace une oblique quelconque AC; on mesure l'angle aigu ACD, et on construit en A l'angle CAB égal au complément de l'angle C.— Dans le triangle ABC, les deux angles aigus A et C égalent ensemble un angle droit; donc l'angle B est droit (nº 84), et la droite AB est perpendiculaire à CD.

Problème II.

154. *Mener une perpendiculaire au milieu d'une droite donnée AB.*





— *Diviser une droite donnée AB en deux parties égales.*

Des extrémités A et B, avec un même rayon, on décrit des arcs qui se coupent en C et en D, et l'on trace la droite CD, qui remplit la condition demandée. Car le point C étant équidistant de A et de B, appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de AB; et il en est de même du point D (nº 41).

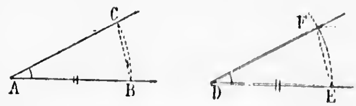
Si la droite donnée est très-longue, on porte, à partir des extrémités, des longueurs égales : AA', A'A'', BB', B'B'', et l'on effectue la construction sur A''B''.

Scolie. En répétant la construction sur chaque partie obtenue, on divise la droite successivement en 4, 8, 16, 32... parties égales.

Problème III.

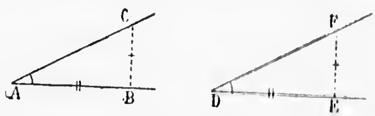
155. *En un point donné* D *d'une droite* DE, *construire un angle égal à un angle donné* A.

1er *moyen, avec le compas.* Des points A et D comme centres, avec un même rayon, on décrit les arcs BC et EF; du point E comme centre, et avec une ouverture de compas égale à la distance BC on coupe l'arc EF, et on trace la droite DF. L'angle D est égal à l'angle A.



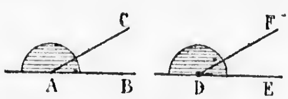
Car ces angles ont pour mesures les arcs BC et EF; et ces arcs sont égaux comme étant sous-tendus par des cordes égales dans des cercles égaux.

2e *moyen, avec l'équerre.* A l'aide d'une règle divisée on marque des longueurs égales AB et DE; on élève les perpendiculaires BC et EF; on porte la longueur BC sur EF, et l'on trace DF, ce qui donne en D un angle égal à l'angle A.



Car les triangles ABC et DEF sont égaux comme ayant un angle égal (B = E) compris entre des côtés respectivement égaux, et ainsi les angles A et D sont égaux.

3e *moyen, avec le rapporteur.* On place le rapporteur sur l'angle A pour mesurer cet angle; on le pose ensuite en D pour marquer un angle égal, que l'on achève par la droite DF.

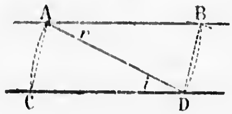


Pour relever et reproduire les angles, les ouvriers emploient souvent la *fausse équerre.*

Sur le terrain on emploie le *graphomètre*, le *pantomètre* ou la *boussole.*

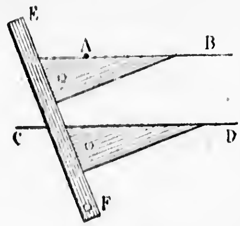
Problème IV.

156. *Par un point donné* A, *mener une parallèle à une droite donnée* CD.

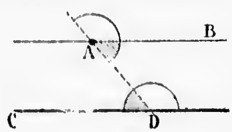


1er *moyen*, *avec le compas*. Du point A, on décrit un arc quelconque DB ; du point D, avec le même rayon, on décrit l'arc AC ; on prend l'arc DB égal à AC, et l'on trace AB, qui est la parallèle demandée.

Car les arcs AC et DB sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales dans des cercles égaux ; ainsi les angles *r* et *i* sont égaux, et comme ces angles ont la position d'alternes-internes, les droites AB et CD sont parallèles (n° 72).



2e *moyen*, *avec l'équerre*. On pose la règle et l'équerre l'une contre l'autre, de manière que l'un des côtés de l'équerre coïncide avec la droite donnée CD, alors on fait glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce qu'on atteigne le point donné A, et l'on trace la droite AB, qui est la parallèle demandée. — Car les deux droites AB et CD font avec EF des angles correspondants égaux (n° 72).

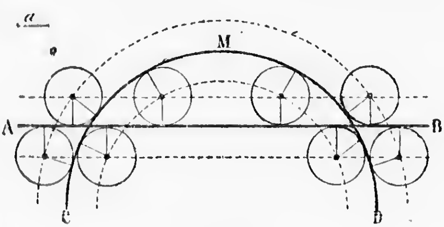


3e *moyen*, *avec le rapporteur*. On trace une sécante quelconque AD, et l'on fait l'angle DAB égal à l'angle ADC. — Ces deux angles égaux ayant la position d'angles alternes-internes, les droites AB et CD sont parallèles (n° 72).

Problème V.

157. *Trouver un point situé à une distance donnée a, de deux lignes données* AB *et* CMD, *droites ou circulaires.*

Pour chacune des deux lignes données, on construit le double lieu



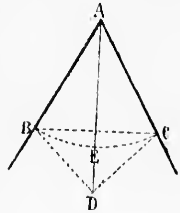
des points situés à la distance donnée *a* ; les rencontres de ces lieux peuvent fournir 8 points remplissant la condition demandée.

Scolie. Chacun des points obtenus peut servir de centre à une circonférence décrite avec le rayon a tangentiellement aux deux lignes données.

Problème VI.

158. *Diviser en deux parties égales un angle donné* A, *ou un arc donné* BEC.

S'il s'agit d'un arc BEC, on mène une perpendiculaire au milieu de la corde BC; cette perpendiculaire passe au milieu de l'arc (nº 111, 2º).



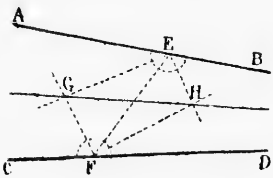
S'il s'agit d'un angle BAC, de son sommet, avec un rayon arbitraire, on décrit l'arc BEC; des points B et C, avec un même rayon, on décrit des arcs qui se coupent en D, et l'on trace la droite AD, qui est bissectrice de l'angle A. — Car si l'on mène les droites DB et DC, les triangles ADB et ADC sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux; donc leurs angles en A sont égaux comme opposés aux côtés égaux DB et DC.

Scolie. En répétant la construction sur chaque partie obtenue, on divise l'arc ou l'angle successivement en 4, 8, 16, 32... parties égales.

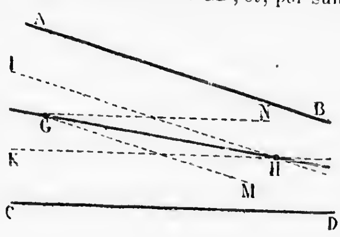
Problème VII.

159. *Tracer la bissectrice de l'angle de deux droites données* AB *et* CD, *sans recourir au sommet de cet angle.*

1er *moyen.* On trace une sécante quelconque EF, puis les bissectrices EG, FG, EH, FH, des quatre angles intérieurs, et enfin la droite GH, qui remplit la condition demandée.

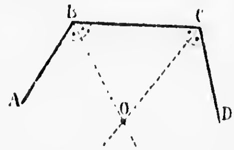


Car le point G, appartenant à la bissectrice EG, est équidistant des droites AB et EF (nº 59); ce même point G, appartenant à la bissectrice FG, est équidistant des droites EF et CD. Ainsi ce point est à égale distance des deux droites données AB et CD, et, par suite, il appartient à la bissectrice de leur angle (nº 60).



Il en est de même du point H. Et comme deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite, GH est la ligne demandée.

2e *moyen.* Deux droites IH et KH, menées parallèlement aux deux droites données, à des distances égales de ces mêmes droites, donnent en H un point équidistant de AB et de CD; un autre point G, obtenu de la même manière, achève de déterminer la bissectrice GH. — Cette construction peut se faire sans le secours du compas.



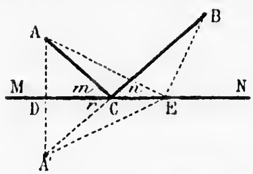
Corollaire. Étant donnée une ligne brisée convexe ABCD, formée de trois éléments, si l'on mène les bissectrices des deux angles B et C, le point de rencontre O est équidistant des trois droites AB, BC et CD.

Scolie. Trois droites telles que AB, CD et GH, qui, prolongées convenablement, se rencontreraient en un même point, sont appelées *droites concourantes*. Entre deux droites données AB et CD, on peut tracer autant de droites concourantes que l'on veut; car la construction qui a donné GH peut se répéter entre AB et GH, entre GH et CD, puis dans les nouveaux angles indéfiniment.

Les lignes ainsi obtenues diviseraient l'angle primitif en 2, 4, 8, 16, 32..., 2^n parties égales. C'est le seul système de division de l'angle que l'on puisse faire mathématiquement avec la règle et le compas.

Problème VIII.

160. *Trouver le chemin minimum pour aller d'un point* A *à un autre* B *en touchant une droite donnée* MN. On suppose les deux points situés d'un même côté de la droite.



Menons AA′ perpendiculaire sur MN; portons DA′ = DA, et menons les droites A′B et AC; la ligne brisée ACB est le chemin demandé. Pour le prouver, il suffit de faire voir que ce chemin est plus court que tout autre, AEB, par exemple.

MN est perpendiculaire au milieu de AA′; donc CA = CA′, et EA = EA′ (n° 39); par conséquent la ligne ACB égale en longueur A′CB, et AEB équivaut à A′EB.

Mais A′CB < A′EB; donc aussi ACB < AEB...

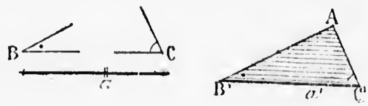
Scolie. A cause de MN perpendiculaire au milieu de AA′, les deux parties CDA et CDA′ de la figure pourraient coïncider; donc l'angle $m = r = n$. Ainsi *les deux parties* CA *et* CB *du chemin minimum font avec la droite* MN *des angles égaux.* Pour tout autre chemin, AEB par exemple, les angles seraient inégaux.

Problème IX.

161. *Construire un triangle dont on donne trois éléments, parmi lesquels au moins un côté.*

1er Cas : *Étant donné un côté* a *et les deux angles adjacents* B *et* C.

On trace une droite B'C' égale au côté donné a; on reproduit l'angle B en B', et l'angle C en C'. A'B'C' est le triangle demandé.

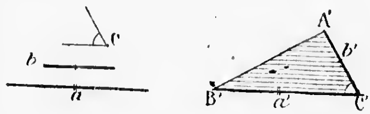


Remarques. 1° La somme des deux angles donnés doit être moindre que deux angles droits (n° 84).

2° Si les deux angles donnés ne sont pas adjacents au côté donné, on peut trouver le troisième angle, puisqu'il est le supplément de la somme des deux autres, et on rentre ainsi dans le cas ci-dessus.

2e Cas : *Étant donnés deux côtés* a *et* b *et l'angle compris* C.

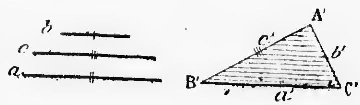
On construit d'abord un angle C' égal à l'angle donné C; sur les côtés de cet angle, on porte C'B' égal à a, et C'A' égal à b, et l'on mène A'B', qui termine le triangle demandé.



Remarque. Dans ce cas, le problème est toujours possible, quelles que soient les données.

3e Cas. *Étant donnés les trois côtés : a, b, c.*

On trace une droite B'C' égale à l'un des côtés donnés, a par exemple; des points B' et C', avec des rayons égaux respectivement à c et b, on décrit des arcs dont la rencontre en A' détermine le troisième sommet du triangle.



Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le plus grand des côtés donnés soit moindre que la somme des deux autres (n° 35).

4e Cas: *Étant donnés deux côtés* a *et* b, *et l'angle* A *opposé au côté* a.

On construit l'angle A' égal à l'angle donné A; sur l'un des côtés de cet angle, on porte une longueur A'C' égale au côté b; du point C' comme centre, avec un rayon égal au côté a, on décrit un arc, qui peut couper le côté opposé en deux points B' et B''. Il y aurait ainsi deux triangles A'B'C' et A'B''C', remplissant les conditions du problème.

162. *Remarque.* Il n'y aurait qu'une solution, si l'arc décrit du point

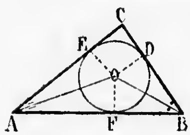
C′ avec un rayon égal à a se trouvait tangent au côté A′B′. Le problème serait impossible si a était plus petit que la perpendiculaire C′D. Si l'on fait croître a, les points B′ et B″ s'écartent de plus en plus; et lorsque a devient égal à b, la solution A′B″C′ disparaît; l'autre triangle A′B′C′ reste toujours possible, quelque grand que soit a.

Il ne peut y avoir double solution que dans le cas où l'angle donné A est aigu.

Si l'angle donné A est droit ou obtus, il faut et il suffit que le côté qui doit lui être opposé soit le plus grand des deux côtés donnés (nº 85, 4º; nº 57).

Problème X.

163. *Inscrire une circonférence à un triangle donné* ABC.



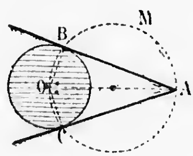
On mène les bissectrices de deux angles A et B de ce triangle; le point de rencontre O est équidistant des deux côtés de l'angle A, et aussi des deux côtés de l'angle B. Ainsi les perpendiculaires OD, OE, OF, sont égales; donc la circonférence décrite du point O comme centre avec OD pour rayon, passera par les trois points D, E, F. Le triangle ABC sera circonscrit à cette circonférence, puisque les côtés sont perpendiculaires aux extrémités des rayons OD, OE, OF (nº 119).

164. **Scolie.** Le point de concours des deux bissectrices AO et BO appartient à la bissectrice du troisième angle C, car ce point est équidistant des deux côtés de cet angle (nº 60). Ainsi *les trois bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point, et ce point est le centre du cercle inscrit au triangle.*

Problème XI.

165. *Par un point* A *donné hors d'un cercle* O, *mener une tangente à ce cercle.*

Sur OA comme diamètre, on décrit une circonférence, ou simplement l'arc BOC, qui détermine les points de contact B et C; et l'on trace les droites AB et AC, qui sont tangentes à la circonférence O.



En effet, l'angle ABO est droit comme inscrit dans le demi-cercle OAMB; ainsi AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB; donc cette ligne AB est tangente à la circonférence O. — Il en est de même de AC.

166. **Scolie.** 1º Les deux triangles rectangles AOB et AOC sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale AO, et un autre côté égal (OB = OC) Ainsi AB = AC, et les angles en A sont égaux aussi bien que les angles en O.

Donc, *les tangentes menées d'un même point à une même circonférence sont égales;*

Et la droite qui joint le centre du cercle au point de concours des deux tangentes est bissectrice de l'angle formé par ces tangentes, et aussi de l'angle formé par les rayons qui vont aux points de contact.

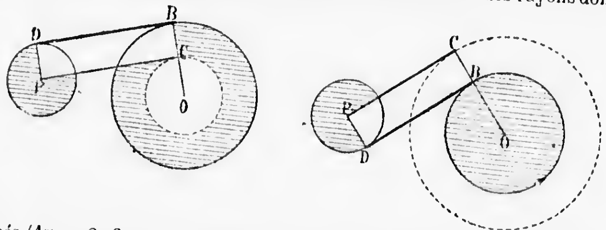
2° Le quadrilatère ABOC ayant deux angles droits B et C, les deux autres angles A et O sont supplémentaires (n° 88, 2°).

Donc, *l'angle de deux tangentes menées à une même circonférence est le supplément de l'angle formé par les rayons qui vont aux points de contact.*

Problème XII.

167. *Mener une tangente commune à deux circonférences données O et P.*

Avec un rayon OC égal à la différence ou à la somme des rayons don-



nés (1[re] ou 2[e] figure), on décrit une circonférence, à laquelle on mène une tangente auxiliaire PC (n° 165); on mène les droites PD et OBC perpendiculaires à PC, ce qui détermine en B et D les points de contact de la tangente commune BD.

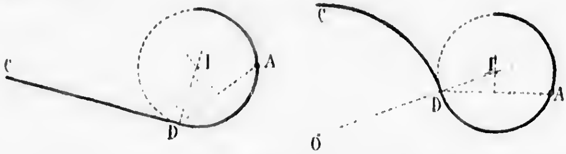
En effet, les droites PD et CB sont égales par construction, et parallèles comme perpendiculaires à la même droite PC (n° 64); ainsi le quadrilatère PDBC est un parallélogramme (n° 93); et comme les angles P et C sont droits, cette figure est un rectangle (n° 90). Donc BD est perpendiculaire à l'extrémité des rayons OB et PD, et, par suite, c'est une tangente commune aux deux circonférences données.

168. **Scolie.** 1° A deux circonférences extérieures, on peut mener

quatre tangentes communes, savoir : deux *tangentes extérieures,* et deux *intérieures.* En mécanique pratique, on trouve la figure de ces deux systèmes de tangentes communes, dans les *roues à courroies ou à cordes sans fin.*

Problème XIII.

169. *Décrire une circonférence qui passe par un point donné* A, *et qui soit tangente à une ligne donnée* CD, *droite ou circulaire, en un point donné* D.

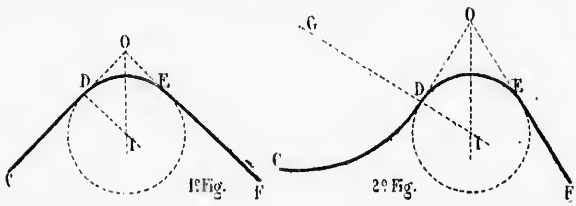


Le centre inconnu doit se trouver sur une droite DI perpendiculaire ou normale à la ligne donnée CD; d'autre part, la droite DA sera une corde de la circonférence demandée; et ainsi, une perpendiculaire menée par le milieu de DA achèvera la détermination du centre.

Problème XIV.

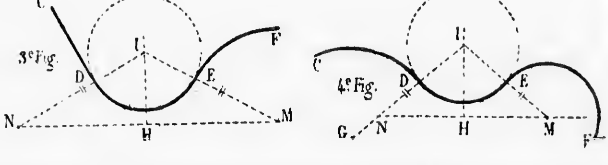
170. *Décrire une circonférence tangente à deux lignes données* CD *et* EF *droites ou circulaires, l'un des points de contact étant donné en* D.

1° Si les deux lignes données sont droites, le centre cherché doit se



trouver à la fois sur la perpendiculaire DI et sur la bissectrice OI...

2° Si le point de contact D est donné sur un arc CD, on mène la tangente DO, ce qui ramène au premier cas du problème.

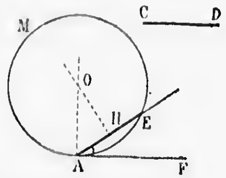


3°, 4°. Si la seconde ligne ligne donnée EF est courbe, on trace d'abord la perpendiculaire ou normale DI, que l'on prolonge; on prend DN égal au rayon EM de la courbe EF; on trace MN, puis HI perpendiculaire au milieu de MN, ce qui détermine en I le centre cherché.— On a en effet : IM = IN, EM = DN; d'où, par soustraction : IE = ID.

Remarque. Les deux problèmes qui précèdent servent de base au *raccordement des lignes.*

Problème XV.

171. *Sur une droite CD donnée comme corde, décrire un segment capable d'un angle donné* A (n° 139).



On prend, sur un des côtés de l'angle donné, une longueur AE égale à CD; on mène HO perpendiculaire au milieu de AE, et AO perpendiculaire à AF. Du point O, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, dans laquelle AEM est le segment demandé.

Car tout angle inscrit dans ce segment aura pour mesure la moitié de l'arc AE (n° 137), ce qui est aussi la mesure de l'angle donné A (n° 140).

Problème XVI.

172. *Trouver la commune mesure la plus grande possible entre deux droites données a et b, ou entre deux arcs de même rayon, ou entre deux angles donnés.*

Le procédé est analogue à celui que l'on emploie en arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres donnés : on porte la petite ligne *a* sur la grande *b* autant de fois qu'il est possible; le reste se porte sur la petite ligne; le nouveau reste sur le reste précédent, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de reste.

La dernière ligne ainsi portée est la commune mesure cherchée. Elle sert à établir le rapport qu'il y a entre les deux lignes; par exemple, dans le cas ci-dessus, cette commune mesure, qui est marquée du chiffre 1, est contenue 19 fois dans la petite ligne *a*, et 43 fois dans la grande *b*. On peut donc dire que *a* est les $\frac{19}{43}$ de *b*.

Lorsqu'il s'agit d'*arcs de même rayon*, on les porte l'un sur l'autre à l'aide du compas : en portant des cordes égales, on détermine des arcs égaux (nº 108).

Si ce sont *deux angles* qui sont donnés, on décrit, avec un même rayon, des arcs qui leur servent de mesure, et c'est sur ces arcs que l'on opère : le rapport que l'on trouve entre les deux arcs existe aussi entre les deux angles (nº 134) ; et l'angle qui correspond au dernier arc porté, est la commune mesure entre les deux angles.

173. **Scolie.** 1º L'opération indiquée dans ce problème permet de trouver le nombre des degrés d'un arc donné ou d'un angle donné : il suffit de comparer l'arc au *quadrant* (nº 132). Par exemple, si l'arc considéré était les $\frac{19}{43}$ du quadrant, il serait les $\frac{19}{43}$ de 90 degrés, ce qui donne environ 39º 46′.

2º Pour établir le rapport de deux droites données, on peut les mesurer en les rapportant à une même unité, et écrire le rapport des deux nombres qui expriment leurs longueurs. Par exemple, si les droites a et b ont respectivement 28 et 36 millimètres, leur rapport est $\frac{28}{36}$ ou $\frac{7}{9}$. La droite a est donc les $\frac{7}{9}$ de b.

EXERCICES SUR LE LIVRE II

Théorèmes à démontrer.

Arcs et cordes. — 1. Toute droite qui partage la circonférence en deux parties égales est un diamètre.

2. La plus grande ligne droite que l'on puisse mener d'un point à une circonférence donnée, est la droite qui part de ce point, passe au centre, et va se terminer à la circonférence.

3. Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, leurs points les plus rapprochés sont sur la direction des centres.

4. Quelle que soit la position respective de deux circonférences, la plus grande sécante que l'on puisse mener de l'une à l'autre est dans la direction des centres.

5. La plus grande et la plus petite corde que l'on puisse mener par un point donné dans un cercle sont perpendiculaires l'une à l'autre, et l'une d'elles est un diamètre.

6. Si deux circonférences se coupent, deux sécantes parallèles menées par les points d'intersection sont égales.

7. De toutes les sécantes que l'on peut mener par l'un des points d'intersection de deux circonférences, la plus grande est celle qui est parallèle à la ligne des centres.

Tangentes. — 8. Deux droites sécantes ou tangentes, qui, sans se couper, interceptent sur une même circonférence des arcs égaux, sont parallèles.

9. La tangente menée par le milieu d'un arc est parallèle à la corde qui sous-tend cet arc.

10. Les tangentes extérieures communes à deux circonférences se rencontrent sur la direction des centres; et il en est de même des tangentes intérieures.

11. Si l'on mène les trois tangentes communes à deux cercles tangents l'un à l'autre, la tangente interne rencontre chacune des deux autres à égale distance des points de contact.

12. Les rencontres des bissectrices extérieures d'un triangle servent de centres à des cercles tangents aux trois côtés (on les nomme cercles *ex-inscrits*).

13. Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle forment entre elles un nouveau triangle dont les hauteurs se confondent avec les bissectrices intérieures du premier triangle.

14. Les trois hauteurs d'un triangle servent de bissectrices au triangle qui a pour sommets les pieds de ces mêmes hauteurs.

15. Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés. — Réciproquement, si un quadrilatère est tel que la somme de deux côtés opposés soit égale à la somme des deux autres côtés, ce quadrilatère est circonscriptible.

16. La circonférence inscrite à un triangle décompose le périmètre en 6 segments égaux deux à deux; et chaque segment égale le demi-périmètre diminué du côté non-adjacent.

17. Dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l'angle droit égale la somme des diamètres des deux circonférences inscrite et circonscrite.

Mesure des angles. — 18. Si deux circonférences se coupent, et si par l'un des points d'intersection on mène un diamètre de part et d'autre, la droite qui joint les extrémités de ces diamètres passe par le second point d'intersection des deux circonférences, et cette droite est double de la distance des centres.

19. Toute sécante menée par le point de contact de deux circonférences tangentes détermine des arcs opposés d'un même nombre de degrés (*arcs semblables*).

20. Si deux sécantes se croisent au point de contact de deux circonférences tangentes, les cordes qui joignent leurs extrémités sont parallèles.

21. Si deux circonférences se coupent, et si, par l'un des points d'intersection, on mène une sécante mobile, la somme des arcs situés d'un même côté de cette sécante est constante, quant au nombre de degrés.

22. Une sécante mobile étant menée par l'un des points d'intersection de deux circonférences, les droites qui joignent l'autre point d'intersection aux deux extrémités de la sécante forment entre elles un angle constant.

23. Si deux sécantes se coupent en l'un des points d'intersection de deux circonférences, les cordes qui joignent leurs extrémités forment, par leurs prolongements, un angle constant.

24. Dans un même cercle, deux cordes égales qui se coupent sont les diagonales d'un trapèze isocèle.

25. Dans un même cercle, deux cordes égales qui ne se coupent pas sont les côtés non-parallèles d'un trapèze isocèle.

26. Les circonférences décrites des trois sommets d'un triangle et passant par les points de contact du cercle inscrit sont tangentes deux à deux.

27. Tout parallélogramme inscrit à un cercle est un rectangle.

28. Tout trapèze isocèle est inscriptible.

29. Si du milieu de l'arc sous-tendu par une corde on mène deux autres cordes coupant la première et si l'on joint leurs extrémités, on forme deux triangles équiangles entre eux, et un quadrilatère inscriptible.

30. Un angle quelconque étant formé par deux tangentes à une même circonférence, si l'on mène une troisième tangente mobile du côté du sommet, le triangle ainsi formé a un périmètre constant. — Et l'angle au centre sous lequel sera vue cette troisième tangente sera constant. — Examiner le cas où l'on mènerait la tangente à l'opposé du sommet.

31. Si l'on prolonge un côté quelconque d'un triangle de ce qui lui manque pour égaler le demi-périmètre, l'extrémité du prolongement est le point de contact de l'un des cercles ex-inscrits.

32. Si l'on mène une sécante commune par le point de contact de deux circonférences tangentes, les tangentes menées par les extrémités de cette sécante sont parallèles.

33. Si l'on mène une sécante mobile par l'un des points d'intersection de deux circonférences sécantes, les tangentes menées par les extrémités de la sécante mobile font entre elles un angle constant.

34. Étant donné un quadrilatère, si l'on mène des circonférences tangentes aux côtés pris trois à trois, les quatre centres ainsi obtenus sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

35. Si un cercle se meut tangentiellement à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, un point quelconque de la circonférence mobile décrit un diamètre de grand cercle.

36. *Théorème de Bobilier et Chasle.* Si une figure plane se déplace d'une manière quelconque dans son plan, elle peut être amenée d'une position à l'autre par une rotation autour d'un centre convenablement choisi sur ce plan.

Lieux géométriques à trouver.

1. Lieu des centres des circonférences tangentes en un point donné d'une droite ou d'une circonférence.

2. Lieu des centres des circonférences tangentes à deux droites qui se coupent.

3. Une corde d'une longueur donnée se meut dans un cercle; quel est le lieu décrit par son milieu?

4. Lieu des points d'où une droite donnée est vue sous un angle donné.

5. Une droite d'une longueur donnée se meut parallèlement à elle-même, en conservant l'une de ses extrémités sur une circonférence donnée, ou sur un polygone donné; quel est le lieu décrit par l'autre extrémité?

6. Lieu des milieux des cordes qui concourent en un même point.

7. Lieu des points d'où les tangentes menées à une circonférence donnée sont d'une longueur donnée.

8. Lieu des points d'où un cercle est vu sous un angle donné.

9. Lieu décrit par le milieu d'une droite finie, qui se meut dans un angle droit, de manière que ses extrémités glissent sur les côtés de l'angle.

10. Un triangle a pour base une corde fixe d'un cercle, et le troisième sommet se meut sur l'arc sous-tendu; quel est le lieu décrit par le point de concours des bissectrices du triangle mobile? — Quel est le lieu du point de concours des hauteurs de ce même triangle?

11. Lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon donné, et qui interceptent sur une droite donnée des cordes d'une longueur donnée.

12. Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux aux trois côtés d'un triangle équilatéral soit égale à une longueur donnée.

Problèmes.

1. Par un point donné, mener une droite qui passe à égale distance de deux points donnés.

2. Par un point donné, mener une droite qui coupe une droite donnée sous un angle donné.

3. Étant donnés un point fixe et deux droites parallèles, mener par le point une sécante telle que la partie comprise entre les deux parallèles soit d'une longueur donnée.

4. Étant donnés un cercle et un point fixe, mener par ce point une sécante telle que la partie comprise dans le cercle soit d'une longueur donnée.

5. Étant donnés la bissectrice et l'un des côtés d'un angle, trouver l'autre côté sans recourir au sommet.

6. Un point étant donné dans l'ouverture d'un angle, tracer, d'un côté à l'autre, une sécante qui ait ce point pour milieu.

7. Mener, à l'un des côtés d'un triangle, une parallèle qui soit égale à la somme ou à la différence des segments déterminés sur les deux autres côtés, entre les deux parallèles.

8. Diviser un angle en deux parties égales sans le secours du compas.

9. Un point étant donné sur l'un des côtés d'un angle, trouver sur ce même côté un point équidistant du point donné et de l'autre côté de l'angle.

10. Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante qui ait ce point pour milieu.

11. Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante qui soit d'une longueur donnée.

12. Par l'un des points d'intersection de deux circonférences sécantes, mener la sécante la plus courte possible.

13. Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui passe à égale distance de trois points donnés non en ligne droite.

14. Décrire une circonférence qui passe à égale distance de quatre points donnés non en ligne droite.

15. Décrire une circonférence qui intercepte sur trois droites données des cordes égales, et d'une longueur donnée.

16. Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui intercepte sur une circonférence donnée une corde parallèle et égale à une droite donnée.

17. Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui intercepte sur deux droites données des longueurs données.

18. Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui passe par un point donné, et dont la plus courte distance à une circonférence donnée soit d'une longueur donnée.

19. Un chemin de fer MN passe en ligne droite à une certaine distance de deux villages A et B, qui doivent être desservis par une station équidistante de l'un et de l'autre. Déterminer la position de cette station.

20. Deux murs OC et OD forment un angle quelconque; deux personnes placées en A et B dans cet angle, sont tournées l'une vers le mur OC, l'autre vers le mur OD. On demande où il faut placer deux miroirs C et D appliqués aux murs pour que ces deux personnes puissent se voir l'une l'autre.

21. En se basant sur la propriété de l'angle inscrit, mener une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut prolonger.

22. Construire un triangle, connaissant : 1° deux côtés et la médiane qui tombe sur l'un d'eux; — 2° deux côtés et la médiane comprise; — 3° un côté et les deux médianes qui partent de ses extrémités; — 4° deux médianes et le côté sur lequel tombe l'une d'elles; — 5° les trois médianes.

23. Construire un triangle, connaissant les milieux des trois côtés.

24. Construire un triangle connaissant un côté, un angle adjacent, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

25. Construire un triangle, connaissant le périmètre et les angles.

26. Construire un triangle isocèle, connaissant : 1° la base et la hauteur; — 2° la base et l'angle adjacent; — 3° la base et l'angle au sommet; — 4° la

base et le rayon du cercle inscrit; — 5° la base et le rayon du cercle circonscrit; — 6° la hauteur et l'un des angles égaux.

27. Construire un triangle connaissant : 1° deux côtés et la hauteur qui tombe sur l'un d'eux; — 2° deux côtés et la hauteur comprise; — 3° un côté et les deux hauteurs qui partent de ses extrémités; — 4° deux hauteurs et le côté sur lequel tombe l'une d'elles.

28. Construire un triangle connaissant : 1° un angle, un côté de cet angle, et la hauteur qui tombe sur ce côté; — 2° un angle, un côté de cet angle, et la hauteur qui part du sommet de ce même angle; — 3° un angle et les deux hauteurs opposées; — 4° un angle, la hauteur qui tombe sur le côté opposé, et l'une des deux autres hauteurs.

29. Construire un triangle connaissant : 1° un côté, un angle adjacent, et la médiane qui tombe sur ce côté; — 2° un côté, un angle adjacent, et la médiane qui tombe sur l'autre côté de cet angle.

30. Construire un triangle, connaissant les centres des cercles ex-inscrits.

31. Construire un triangle, connaissant les pieds des trois hauteurs.

32. Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

33. Construire un triangle rectangle, connaissant : 1° les rayons des cercles inscrit et circonscrit; — 2° l'un des angles aigus et le rayon du cercle inscrit; — 3° un côté de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit; 4° la somme des côtés de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit.

34. Construire un triangle rectangle connaissant : 1° un côté de l'angle droit et la hauteur qui tombe sur l'hypoténuse; — 2° l'un des angles aigus, et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit; — 3° la médiane et la hauteur qui tombent sur l'hypoténuse.

35. Construire un triangle équilatéral, connaissant : 1° la hauteur; — 2° le rayon du cercle inscrit ; — 3° le rayon du cercle circonscrit.

36. Construire un quadrilatère, connaissant les milieux de trois côtés, et une droite parallèle et égale au quatrième côté.

37. Construire un pentagone, connaissant les milieux des côtés.

38. Construire un parallélogramme, connaissant : 1° un côté et les deux diagonales; — 2° deux côtés, et l'une des diagonales; — 3° deux côtés adjacents et leur angle; — 4° les diagonales et leur angle.

39. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés, et l'une des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

40. Trois points, A, B, C, étant donnés, trouver un point d'où les distances AB et BC soient vues sous des angles donnés r et s.

41. Raccorder deux lignes données, droites ou circulaires, par un arc d'un rayon donné.

42. Raccorder deux lignes données CD et EF, en deux points donnés D et E par deux arcs de cercles, l'un des rayons étant donné, et la courbe devant passer par un point donné.

43. Tracer une scotie entre deux parallèles données, les points de raccordement étant donnés, ainsi que la profondeur de la moulure.

44. Étant donnés des pieds-droits CD et EF, les raccorder aux points D et F, par un arc rampant, qui touche une ligne donnée AG en un point donné B.

45. Tracer la scotie ou l'arc rampant par deux quarts de circonférence, les points de raccordement étant donnés.

46. Trouver un point d'où deux cercles donnés sont vus sous un angle donné.

47. Un angle de 47 degrés est formé par deux tangentes à une même circonférence; quel est le nombre des degrés du petit arc compris entre ses côtés?

LIVRE III

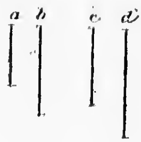
FIGURES SEMBLABLES

---

§ I. — LIGNES PROPORTIONNELLES

174. On appelle *lignes proportionnelles* des lignes dont les longueurs, comparées deux à deux, donnent des *rapports égaux*.

Par exemple, si les quatre lignes a, b, c, d, ont respectivement pour longueurs 8, 12, 10, 15 millimètres, la première est les $^2/_3$ de la deuxième, et la troisième est aussi les $^2/_3$ de la quatrième; on peut donc poser la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



Proposition I. — Lemme.

175. *Lorsqu'un point se meut d'une extrémité à l'autre d'une droite donnée, le rapport du premier segment au second varie de zéro à l'infini, en passant par toutes les valeurs intermédiaires.*

Soit AB la droite donnée, que nous supposerons avoir une longueur de 30 millimètres; et soit M un point qui se meut de A vers B.

A l'origine du mouvement, le segment MA est nul, et MB a 30 millimètres; le rapport $\frac{MA}{MB}$ égale $\frac{0}{30} = 0$.

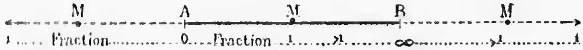
Lorsque le point M s'éloigne de A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ croît peu à peu, car le numérateur va en augmentant, et le dénominateur en diminuant.

Ce rapport $\frac{MA}{MB}$ égale 1, lorsque le point mobile est au milieu de la droite AB; au delà, le rapport continue à croître indéfiniment.

Quand le point mobile sera en B, le rapport $\frac{MA}{MB}$ deviendra $\frac{30}{0}$ ou l'*infini*, que l'on représente par ∞.

Donc, *lorsqu'un point se meut...*

176. **Scolie.** 1° Il y a toujours, sur la droite AB, une position du point mobile, et une seule, pour laquelle le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal à un nombre donné. Car dès que l'on déplacera le point M, l'un des termes du rapport augmentera et l'autre diminuera...



2° Si le point M continue son mouvement au delà du point B, la distance MA variera de 30 à *l'infini*, et la distance MB de *zéro* à *l'infini*. Le rapport $\frac{MA}{MB}$, partant de *l'infini*, diminuera, et tendra vers *l'unité*.

Si le point M allait indéfiniment sur la gauche du point A, la distance MA croîtrait de *zéro* à *l'infini*, et la distance MB, de 30 à *l'infini*. Le rapport $\frac{MA}{MB}$, partant de zéro, augmenterait, et tendrait vers *l'unité*.

3° *Il y a toujours deux positions du point mobile, et deux seulement, pour lesquelles le rapport* $\frac{MA}{MB}$ *est égal à un nombre donné.*

Si le nombre donné est inférieur à *l'unité*, les deux positions du point mobile sont à gauche du milieu de la ligne donnée, et si le nombre donné est supérieur à *l'unité*, les deux positions du point mobile sont à droite du milieu de la ligne donnée.

Par exemple, la droite AB étant supposée de 30 millimètres, si le point mobile est considéré dans les deux positions M et N, telles que MA égale 9, et que NA égale $22\,^1/_2$, on aura

$$\frac{MA}{MB} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}; \quad \text{et} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{22\,^1/_2}{52\,^1/_2} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

D'où la proportion $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$, que l'on traduit par l'énoncé suivant : *Les distances du point* M *aux deux points* A *et* B *sont entre elles comme les distances du point* N *aux mêmes points* A *et* B.

Toutes les fois que l'on a cette relation remarquable, on dit *que les points* M *et* N *divisent harmoniquement la droite* AB; on dit aussi *que les points* M *et* N *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B.

La proportion $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ peut s'écrire : $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}$

Ainsi *les distances du point A aux deux points M et N sont entre elles comme les distances du point B aux mêmes points M et N; les points A et B divisent harmoniquement la droite MN, et ces points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points M et N.*

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer si le rapport est su-

périeur à l'unité. Par exemple, si l'on prend le point M à 21 millimètres du point A, et le point N à $22\,{}^1/_2$ au delà de B, on aura :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}=2\,{}^1/_3;$$

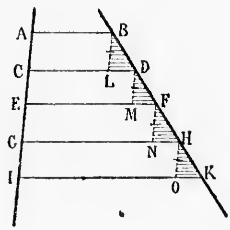
on aura aussi : $$\frac{NA}{NB}=\frac{52\,{}^1/_2}{22\,{}^1/_2}=\frac{105}{45}=2\,{}^1/_3;$$

Donc, $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$; et $\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{BN}$

Proposition II. — Lemme.

177. *Les parallèles qui déterminent des parties égales sur une sécante quelconque déterminent aussi des parties égales sur toute autre sécante.*

Soient AB, CD, EF, GH, IK, des parallèles qui déterminent sur AI des parties égales, et soit BK une autre sécante quelconque.



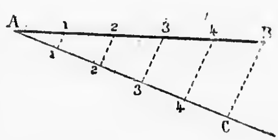
Si l'on mène parallèlement à AI les droites BL, DM, etc., toutes ces droites sont égales respectivement aux segments AC, CE, etc. (nº 90), et par conséquent égales entre elles.

Donc les triangles BLD, DMF, etc., sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux (nºs 71 et 77). Ainsi l'on a

$$BD=DF=FH=HK...$$

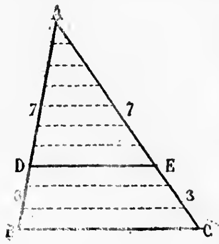
Donc, *les parallèles qui déterminent...*

178. **Corollaire.** Pour *diviser une droite donnée AB en un nombre quelconque de parties égales*, par exemple en 5, on trace une droite indéfinie AC, sur laquelle on porte 5 parties quelconques égales entre elles, on mène CB, puis, par les points de division, des parallèles à CB.



Proposition III. — Théorème.

179. *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise dans un même rapport les deux autres côtés de ce triangle.*



Soit ABC un triangle quelconque, et soit DE une parallèle au côté BC. Il s'agit de prouver que si le point D est, par exemple, aux $^7/_{10}$ de la longueur AB, le point E sera aussi aux $^7/_{10}$ de la longueur AC.

Si l'on divise AB en 10 parties égales, 7 de ces parties se trouveront sur AD, et 3 sur DB. Par tous les points de division, menons des parallèles à BC; le côté AC sera divisé en 10 parties égales, dont 7 sur AE et 3 sur EC (nº 177). Ainsi AE sera les $^7/_{10}$ de AC, comme AD est les $^7/_{10}$ de AB.

Le théorème est toujours vrai, quelle que soit la position du point D sur le côté AB.

Donc, *toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle...*

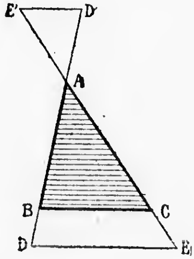
180. **Scolie.** 1º En appliquant les propriétés connues des proportions, on a les trois relations suivantes, que l'on peut d'ailleurs, trouver immédiatement sur la figure :

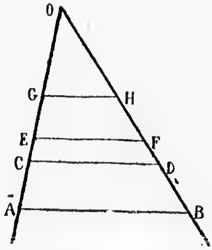
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \qquad \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC} \qquad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

2º Les trois proportions qui précèdent donnent aussi :

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$$

3º La parallèle DE peut être menée en dehors du triangle, soit au delà de la base, soit au delà du sommet. Le théorème est toujours vrai, et peut se démontrer comme dans le cas ci-dessus;



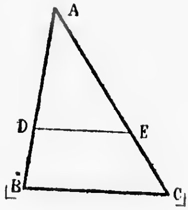


4º *Si deux droites quelconques* OA *et* OB *sont traversées par une* *série de parallèles*, AB, CD, EF, GH, *les segments de la première droite sont tous dans un même rapport avec les segments correspondants de la seconde.* Car on peut écrire (nº 180, 2º) :

$$\frac{OG}{OH}=\frac{GE}{HF}=\frac{OE}{OF}=\frac{EC}{FD}=\frac{OC}{OD}=\frac{CA}{DB}=\frac{OA}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{OG}{OH}=\frac{OE}{OF}=\frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}$$

Proposition IV. — Théorème.

181. *Toute droite qui coupe dans un même rapport deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.*



Soit DE une droite qui coupe dans un même rapport les deux côtés AB et AC du triangle ABC, de sorte que l'on ait $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

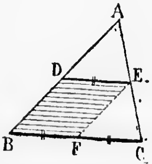
Si par le point D on menait une parallèle à BC, cette parallèle diviserait AC dans un rapport égal à $\frac{DA}{DB}$. Or il n'y a, entre A et C, qu'un seul point pour lequel le rapport des distances aux deux points A et C soit égal au rapport $\frac{DA}{DB}$ (nº 176); donc la parallèle passera nécessairement en E, et se confondra avec DE.

Donc, *toute droite qui coupe...*

Scolie. La droite DE peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle (voir nº 180, 3º).

Proposition V. — Théorème.

182. *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et égale à sa moitié.*



Soit DE joignant les milieux des deux côtés AB et AC.

1º Cette droite coupe dans un même rapport les deux côtés AB et AC; donc elle est parallèle au troisième côté BC (nº 181);

2º Menons EF parallèle à AB; les deux côtés CA et CB sont coupés dans un même rapport (nº 179); et puisque le point E est le milieu de CA, le point F est aussi le milieu de CB. Mais les droites DE et BF sont égales comme côtés opposés d'un parallélogramme (nºs 89 et 90).

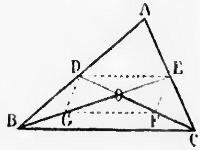
Donc, *la droite qui joint les milieux...*

Proposition VI. — Théorème.

183. *Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, qui est aux $2/3$ de chacune d'elles, en partant des sommets.*

Soit le triangle ABC; considérons d'abord deux médianes BE et CD.

Dans le triangle OBC, si l'on mène la droite GF par les milieux des côtés OB et OC, cette droite sera parallèle au côté BC, et égale à sa moitié (nº 182).



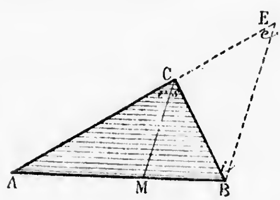
De même, dans le triangle ABC, la droite DE est parallèle au côté BC, et égale à sa moitié. Donc le quadrilatère DEFG est un parallélogramme, comme ayant deux côtés égaux et parallèles. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux; on a donc OD = OF = FC; de même OE = OG = GB.

Ainsi le point O est aux $^2/_3$ de chacune des médianes BE et CD; et la médiane qui partirait du sommet A rencontrerait aussi la médiane BE aux $^2/_3$ de cette dernière, c'est-à-dire en O.

Donc, *les trois médianes...*

Proposition VII. — Théorème.

184. *La bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle divise le côté opposé en deux parties proportionnelles aux deux autres côtés.*



Soit ABC un triangle quelconque, et CM la bissectrice de l'angle C. Il s'agit de prouver que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$$

Prolongeons AC, et menons BE parallèle à CM. Les angles e et r sont égaux comme correspondants, r et s par hypothèse, s et i comme alternes-internes; donc $e = i$, le triangle BCE est isocèle, et CB = CE.

Or, les parallèles CM et BE donnent (nº 179) : $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CE}$; en remplaçant CE par CB, on a $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, *la bissectrice d'un angle intérieur...*

185. **Scolie.** Réciproquement, *si l'on donne la proportion* $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$, *la droite* CM *est bissectrice de l'angle* C. Car entre A et B, il n'existe qu'un point dont les distances aux deux points A et B soient entre elles dans le rapport $\frac{CA}{CB}$; et la bissectrice de l'angle C aboutit à ce point (nº 176).

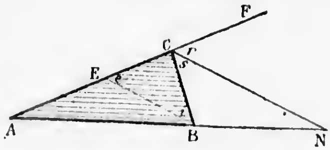
Proposition VIII. — Théorème.

186. *La bissectrice d'un angle extérieur d'un triangle détermine, sur le prolongement du côté opposé, un point dont les distances aux*

extrémités de ce côté sont entre elles comme les deux autres côtés du triangle.

Soit ABC un triangle quelconque, et CN la bissectrice de l'angle extérieur BCF. Il s'agit de prouver que

$$\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}.$$



Menons BE parallèle à CN.

Les angles e et r sont égaux comme correspondants, r et s par hypothèse, s et i comme alternes-internes; donc $e=i$, le triangle BCE est isocèle, et $CB=CE$.

Or, les parallèles CN et BE donnent (nº 180) : $\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CE}$; en remplaçant CE par CB, on a $\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, *la bissectrice d'un angle extérieur...*

187. **Scolie.** Réciproquement, *si l'on donne la proportion* $\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}$, *la droite* CN *est bissectrice de l'angle extérieur* BCF. Car, à droite de la ligne AB, il n'existe qu'un point dont les distances aux deux points A et B soient entre elles dans le rapport $\frac{CA}{CB}$; et la bissectrice de l'angle extérieur BCF aboutit à ce point (nº 176, 3º).

§ II. — POLYGONES SEMBLABLES

Définitions.

188. On appelle *polygones semblables* des polygones qui ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues dans un même rapport.

On appelle *côtés homologues*, dans les figures semblables, les côtés qui sont adjacents aux angles respectivement égaux.

On appelle *rapport de similitude* le nombre qui exprime le rapport des côtés homologues.

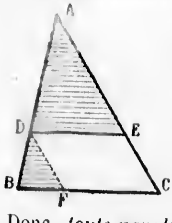
Deux polygones sont *équiangles entre eux* lorsqu'ils ont les angles respectivement égaux; — *équilatéraux entre eux* lorsqu'ils ont les côtés respectivement égaux.

Proposition IX. — Théorème.

189. *Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.*

Soit ABC un triangle quelconque, et DE une parallèle au côté BC. Il s'agit de prouver que les deux triangles ADE et ABC ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues dans un même rapport.

1° L'angle A est commun; les angles D et B sont égaux comme correspondants, ainsi que E et C ;



2° Menons DF parallèle à AC. La figure DECF est un parallélogramme, et ainsi DE $=$ FC (n° 90). A cause des parallèles DE et BC on a (n° 180) : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. Les parallèles DF et AC donnent également :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{FC}{}\text{ ou }\frac{DE}{BC};\quad\text{d'où}\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Donc, *toute parallèle menée à un côté...*

Scolie. Le théorème est encore vrai lorsque la parallèle est en dehors du triangle.

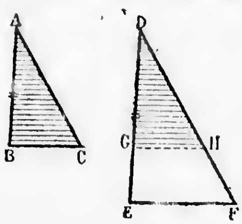
Proposition X. — Théorème de Thalès.

190. *Deux triangles sont semblables :*

1° *Lorsqu'ils ont deux angles respectivement égaux;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés proportionnels.*



1er Cas. Soient les deux triangles ABC et DEF, qui ont l'angle A égal à D, et l'angle B égal à E. Prenons DG $=$ AB, et menons GH parallèle à EF. Le triangle DGH est semblable à DEF (n° 189), et il suffit de prouver l'égalité des deux triangles ABC et DGH.

Les angles B et E sont égaux par hypothèse; E et G sont égaux comme correspondants; ainsi B $=$ G; d'ailleurs A $=$ D par hypothèse; donc les deux triangles ABC et DGH sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux.

2e Cas. Soient les deux triangles ABC et DEF, tels que l'on ait : A $=$ D, et $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$. Prenons DG $=$ AB, et menons GH parallèle à EF. Le triangle DGH est semblable à DEF, et il suffit de prouver l'égalité des deux triangles ABC et DGH.

Les parallèles GH et EF donnent $\frac{DG}{DE}=\frac{DH}{DF}$. Or, comme DG $=$ AB, et que, par hypothèse, on a $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$, on en déduit $\frac{AC}{DF}=\frac{DH}{DF}$, d'où AC $=$ DH. Donc les deux triangles ABC et DGH sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux.

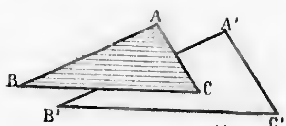
3ᵉ Cas. Soient les deux triangles ABC et DEF, tels que l'on ait : $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$. Prenons $DG=AB$, et menons GH parallèle à EF. Le triangle DGH est semblable à DEF, et il suffit de prouver l'égalité des deux triangles ABC et DGH.

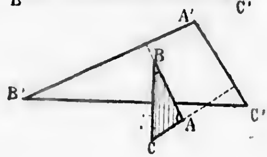
La similitude des triangles DGH et DEF donne $\frac{DG}{DE}=\frac{DH}{DF}=\frac{GH}{EF}$. Or, comme $DG=AB$, le premier de ces trois rapports est le même que le premier des trois rapports donnés; donc les autres rapports sont égaux de part et d'autre; et puisque les dénominateurs sont respectivement égaux dans les deux suites, les numérateurs le sont aussi : $AC=DH$, $BC=GH$. Donc les deux triangles ABC et DGH sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux.

191. **Scolie.** Les *trois cas de similitude* qui viennent d'être établis entre les triangles, présentent une analogie remarquable avec les *trois cas d'égalité* (nº 47). Dans la démonstration de chaque cas de similitude, le cas d'égalité correspondant a été appliqué entre le triangle donné ABC et le triangle auxiliaire DGH.

Proposition XI. — Théorème.

192. *Deux triangles qui ont les côtés respectivement parallèles ou respectivement perpendiculaires sont semblables.*





Soient ABC et A'B'C' deux triangles qui ont les côtés respectivement parallèles ou respectivement perpendiculaires. Il suffit de prouver qu'ils sont équiangles entre eux (nº 190).

Deux angles qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun sont égaux, ou supplémentaires (nº 77); on a donc

$$A=A' \quad \text{ou bien} \quad A+A'=2 \text{ droits},$$
$$B=B' \quad \text{ou bien} \quad B+B'=2 \text{ droits},$$
$$C=C' \quad \text{ou bien} \quad C+C'=2 \text{ droits}.$$

Et si l'on ne peut faire que l'une des trois hypothèses suivantes :

1º $A+A'=2$ droits, $B+B'=2$ droits, $C+C'=2$ droits;
2º $A=A'$ $B+B'=2$ droits, $C+C'=2$ droits;
3º $A=A'$ $B=B'$, d'où résulte $C=C'$.

Or la première hypothèse donnerait 6 droits pour la somme des angles des deux triangles; la seconde donnerait plus de 4 droits; la troisième est donc seule admissible.

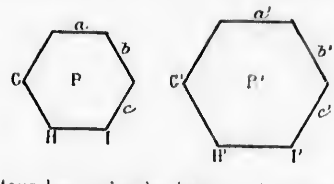
Donc, *deux triangles qui ont les côtés...*

Scolie. Dans ces triangles, *les côtés homologues sont parallèles ou perpendiculaires entre eux.*

Proposition XII. — Théorème.

193. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

Soient P et P' deux polygones réguliers de n côtés. Il s'agit de prouver que les angles sont respectivement égaux, et que les côtés homologues sont dans un même rapport.

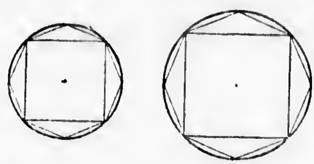


1° Dans chacun de ces polygones, la somme des angles dépend du nombre n des côtés (n° 86), et cette somme égale $(n-2)2$ droits; et comme tous les angles de chaque polygone sont égaux, chacun de ces angles égale $\frac{(n-2)\ 2 \text{ droits}}{n}$;

2° Les côtés a, b, c,... du premier polygone étant égaux entre eux, aussi bien que les côtés a', b', c',... du second, on a identiquement : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Donc, *deux polygones réguliers...*

194. **Corollaire.** *Deux cercles quelconques sont deux figures semblables.* Car ces cercles sont les *limites* vers lesquelles tendent deux polygones réguliers semblables, dans lesquels le nombre des côtés augmente indéfiniment. — Et les *cercles* eux-mêmes *peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'un nombre indéfini de côtés.*



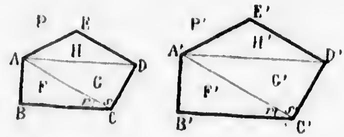
Pour justifier cette considération, concevons un polygone régulier de 360 côtés dans un cercle de 1 000 mètres de rayon; le côté du polygone aura pour longueur 17^{m} 453 07, et l'arc sous-tendu aura 17^{m} 453 29; ainsi ces deux longueurs ne diffèrent que de 22 centièmes de millimètre.

Dans deux cercles quelconques, on appelle *arcs semblables, secteurs semblables, segments semblables,* des arcs, secteurs ou segments, qui correspondent à des angles au centre égaux.

Proposition XIII. — Théorème.

195. *Deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Soient P et P' deux polygones semblables. De deux sommets homologues A et A', menons les diagonales AC, AD, A'C', A'D'. Il faut prouver que les triangles F, G, H, sont respectivement semblables à F', G', H'.



Les deux polygones étant semblables, leurs angles sont respectivement égaux, et leurs côtés homologues sont dans un même rapport (nº 188); donc les deux triangles F et F' sont semblables comme ayant un angle égal ($B = B'$) compris entre des côtés proportionnels (nº 190, 2º); et il en est de même des triangles H et H'. Il reste à prouver la similitude des triangles G et G'.

Les triangles F et F' étant semblables, l'angle $r = r'$; et puisque l'angle total $C = C'$, il en résulte $s = s'$. Ces mêmes triangles semblables F et F' donnent la proportion $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; et les polygones P et P' donnent $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$; d'où $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$. Ainsi les deux triangles G et G' sont semblables comme ayant un angle égal, s, s', compris entre des côtés proportionnels.

Donc *deux polygones semblables peuvent...*

196. Réciproquement : *Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés sont semblables.*

Soient P et P' deux polygones composés des triangles F, G, H, F', G', H', semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. Nous allons prouver que ces deux polygones ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues dans un même rapport.

1º De la similitude respective des triangles, il résulte que l'angle $B = B'$, et que $E = E'$; on a aussi $r = r'$, $s = s'$; d'où $r + s$ ou C égale $r' + s'$ ou C'; on prouverait de même l'égalité des angles D et D', A et A'.

2º Les triangles F et F' donnent $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$,

les triangles G et G' $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$

les triangles H et H' $\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$

et, à cause des rapports communs, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

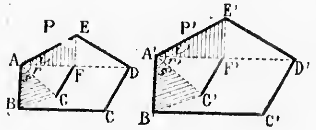
ainsi les deux polygones P et P' ont leurs côtés homologues dans un même rapport.

Donc *deux polygones composés d'un même nombre...*

197. Définitions. Relativement à deux polygones semblables, on appelle *points homologues* des points qui peuvent être rattachés à des côtés homologues par des triangles semblables et semblablement placés. On nomme *droites homologues* des droites qui joignent deux points homologues; par exemple, les diagonales qui joignent les sommets homologues sont des droites homologues.

Proposition XIV. — Théorème.

198. *Dans deux polygones semblables, toutes les lignes homologues sont dans un même rapport, qui est le* rapport de similitude (nº 188).



Soient P et P' deux polygones semblables, et soit $\frac{m}{n}$ le *rapport de similitude*.

1º Deux *diagonales homologues* AD et A'D' appartiennent à des triangles semblables ADE et A'D'E' (nº 195); on a donc

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AE}{A'E'}=\frac{m}{n}$$

2º Les points F et F', pris de manière à diviser dans un même rapport les deux diagonales AD et A'D', sont des *points homologues* (nº 197); car les triangles AEF et A'E'F' sont semblables comme ayant un angle égal ($i=i'$) compris entre des côtés proportionnels.

Soient G et G' deux autres *points homologues*, déterminés par les triangles semblables ABG et A'B'G', les droites FG et F'G' seront deux *lignes homologues* (nº 197); il faut donc prouver que leur rapport est le même que celui des côtés.

Les triangles semblables ABG et A'B'G' donnent $\frac{AG}{A'G'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}$. L'angle $s=s'$; et comme l'angle total $A=A'$, si l'on retranche i et s du premier, i' et s' du second, les angles restants r et r' seront égaux. Donc les triangles AFG et A'F'G' sont semblable comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels; et l'on a $\frac{FG}{F'G'}=\frac{AG}{A'G'}=\frac{m}{n}$, ce qu'il fallait démontrer.

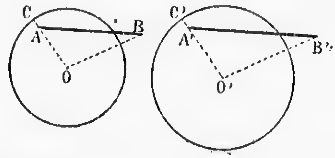
Donc *dans deux polygones semblables...*

199. **Corollaire.** *Dans deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les rayons et les apothèmes sont dans le même rapport que les côtés.*

200. **Scolie.** Dans deux cercles quelconques, deux *points* isolés sont *homologues* lorsque, joints aux centres, ils divisent les rayons dans un même rapport. Ils peuvent être dans le cercle, comme A et A, ou hors du cercle, comme B et B'.

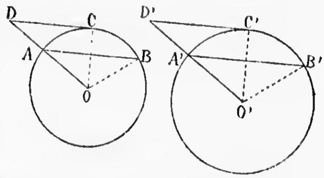
Deux *droites* AB et A'B' sont *homologues* par rapport à deux cercles, lorsqu'elles partent de deux points homologues A et A', et qu'en joignant leurs extrémités aux centres O et O', on obtient des triangles semblables.

Deux droites AB *et* A'B', *homologues par rapport à deux cercles,*



sont entre elles comme les rayons de ces mêmes cercles. Car les triangles semblables ABO et A'B'O' donnent $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}$; et puisque les points A et A' sont homologues, on a $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OC}{O'C'}$; donc $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OC}{O'C'}$.

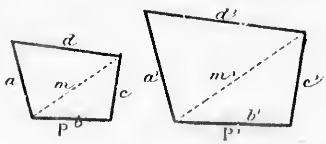
Les lignes homologues les plus remarquables dans deux cercles sont les cordes homologues (AB, A'B'), les tangentes homologues (CD, C'D'), les sécantes homologues (OD, O'D').



Par les triangles semblables AOB et A'O'B', OCD et O'C'D', on prouve directement que ces lignes sont entre elles comme les rayons des deux cercles.

Proposition XV. — Théorème.

201. *Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux comme deux côtés homologues, ou comme deux lignes homologues quelconques.*



Les polygones P et P' étant semblables, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

d'où

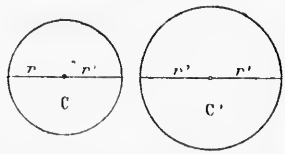
$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \frac{a}{a'} \cdots = \frac{m}{m'}$$

Donc *les périmètres de deux polygones...*

202. **Corollaire.** *Dans deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les périmètres sont entre eux comme les rayons ou comme les apothèmes*; car ces polygones sont semblables (nº 193).

Proposition XVI. — Théorème.

203. *Deux circonférences quelconques sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres.*



En effet, deux circonférences quelconques C et C' sont les limites vers lesquelles tendent les périmètres des polygones réguliers semblables que l'on peut inscrire dans l'une et dans l'autre, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment. Et ces circonférences elles-mêmes peuvent être considérées comme les périmètres de deux polygones réguliers d'un nombre indéfini de côtés. On a donc, en appliquant la propriété des polygones réguliers : $\frac{C}{C'}=\frac{r}{r'}=\frac{2r}{2r'}$.

Donc *deux circonférences quelconques...*

204. **Corollaire.** *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.* Car l'égalité $\frac{C}{C'}=\frac{2r}{2r'}$, donne $\frac{C}{2r}=\frac{C'}{2r'}$.

Ce rapport constant est

$$3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643...$$

On le représente ordinairement par la lettre grecque π (*pi*).

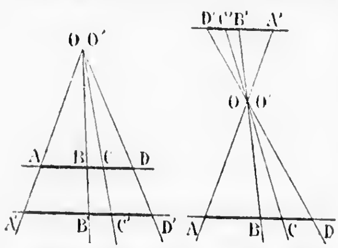
205. **Scolie.** De l'égalité $\frac{\text{circ.}}{2r}=\pi$, on tire $\text{circ.}=2\pi r$. Ainsi la longueur de la circonférence est exprimée par $2\pi r$.

Le diamètre égale la circonférence divisée par π, ou multipliée par son inverse $\frac{1}{\pi}$, ou $0,318\,309\,886\,183\,790\,671\,537\,768...$

Diamètre $d=\frac{\text{circ.}}{\pi}=\text{circ.}\frac{1}{\pi}$.

Proposition XVII. — Théorème des droites concourantes.

206. *Si un faisceau de droites issues d'un même point est traversé par deux parallèles, ces dernières lignes sont coupées en parties proportionnelles.*



Soient AD et A'D' deux parallèles coupées par un faisceau de droites issues du point O.

Les triangles OAB, OBC, OCD, sont respectivement semblables aux triangles OA'B', OB'C', OC'D', et l'on a :

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'},\quad \frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'},\quad \frac{OC}{OC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{OD}{OD'}$$

Ces proportions ayant deux à deux un rapport commun, tous les rapports sont égaux, et l'on a $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc *si un faisceau de droites...*

Scolie. La valeur des rapports ci-dessus est la même que celle des rapports $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$, $\frac{OC}{OC'}$, $\frac{OD}{OD'}$; et comme on peut toujours supposer une sécante perpendiculaire aux deux parallèles, les rapports qui viennent d'être considérés sont égaux au rapport des distances du point O aux deux parallèles.

207. Réciproquement, *si plusieurs sécantes coupent proportionnellement deux droites parallèles, ces sécantes concourent en un même point.*

Soient les parallèles AD et A'D' coupées par les sécantes AA', BB', CC' DD', de telle sorte que l'on ait :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$

Appelons k la valeur commune de ces rapports.

Soit O le point de rencontre des deux sécantes AA' et BB' et soit O' le point de rencontre des deux sécantes BB' et CC'.

Les triangles OAB et OA'B' sont semblables, ainsi que O'BC et O'B'C'; on a donc

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=k, \quad \frac{O'B}{O'B'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

Ainsi $\frac{OB}{OB'}=\frac{O'B}{O'B'}=k$. Or sur la direction BB', il n'y a que deux positions du point O pour lesquelles le rapport $\frac{OB}{OB'}$ soit égal au nombre k (n° 176, 3°), savoir une en dehors des deux parallèles (1re figure), et une entre ces mêmes parallèles (2e figure). Donc les deux points O et O' se confondent, tant dans la première figure que dans la seconde.

On prouverait de même que la sécante DD' passe par le point O.

Donc *si plusieurs sécantes...*

208. **Scolie.** 1° Si les segments sont disposés d'une manière inverse sur les deux parallèles (2e figure), le point de concours des sécantes se trouve entre les deux parallèles.

2° Si les segments sont disposés de la même manière sur les deux parallèles (1re figure), le point de concours est en dehors de ces deux parallèles, et si l'on suppose que le rapport k tend vers l'unité, le point de concours s'éloigne indéfiniment; si l'on fait $k = 1$, les quadrilatères AB', BC', CD', sont des parallélogrammes, il n'y a plus de rencontre entre les sécantes, ou bien l'on dit que la rencontre a lieu à une distance infinie.

§ III. — RELATIONS NUMÉRIQUES DES LIGNES

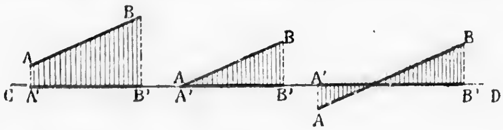
DANS LES TRIANGLES

Définitions.

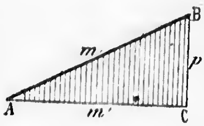
209. On *appelle carré d'une ligne* le carré du nombre qui exprime la longueur de cette ligne.

On appelle *somme, différence, produit, quotient* ou *rapport* de deux lignes, la somme, la différence, le produit, le quotient ou rapport, des nombres qui expriment les longueurs de ces lignes.

210. On appelle *projection* d'une droite AB sur une autre CD, la



partie A'B' de cette dernière comprise entre les perpendiculaires abaissées des deux extrémités de la première droite sur la seconde.



La projection A'B' est d'autant moindre par rapport à la droite AB, que l'angle de cette droite avec sa projection est plus grand.

Si une droite AB ou m et sa projection AC ou m' sont réunies dans un triangle rectangle ABC,

Le rapport $\frac{m'}{m}$ est appelé *cosinus* de l'angle A,

Le rapport $\frac{p}{m}$ *sinus* de l'angle A,

Le rapport $\frac{p}{m'}$ *tangente* de l'angle A.

Nous donnons à la fin du présent volume une table de ces rapports pour les diverses valeurs que peut avoir l'angle A.

211. Dans l'étude des relations numériques, on fait souvent usage des formules algébriques suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Les symboles a et b pouvant représenter des lignes, les formules ci-dessus peuvent être énoncées comme il suit :

1° *Le carré de la somme de deux lignes* égale le carré de la première, plus le carré de la seconde, plus deux fois le produit de ces deux lignes;

2° *Le carré de la différence de deux lignes* égale le carré de la première, plus le carré de la seconde, moins deux fois le produit de ces deux lignes;

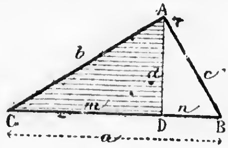
3° *La somme de deux lignes multipliée par leur différence*, égale le carré de la première ligne, moins le carré de la seconde.

Proposition XVIII. — Théorème.

212. *Dans tout triangle rectangle :*

1° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière;*

2° *La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*



Soit ABC un triangle rectangle, et soit AD la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

1° Les deux triangles rectangles ACD et ABC sont semblables comme ayant un angle aigu commun; donc les côtés m et b du premier sont entre eux comme les côtés homologues b et a du second, et l'on a $\frac{m}{b}=\frac{b}{a}$.

Pour la même raison, le triangle partiel ADB et le triangle total ABC sont semblables, et l'on a $\frac{n}{c}=\frac{c}{a}$.

2° Les triangles ADC et ADB, semblables chacun à ABC, sont semblables entre eux, et donnent... $\frac{m}{d}=\frac{d}{n}$.

Donc *dans tout triangle rectangle...*

213. **Scolie I.** De ces proportions, on déduit :

$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} b^2=am \\ c^2=an \end{array} \right. \qquad 2^\circ\ldots\ d^2=mn$$

Donc, *dans tout triangle rectangle :*

1° *Le carré d'un côté de l'angle droit égale sa projection sur l'hypoténuse, multipliée par l'hypoténuse entière.*

2° *Le carré de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse égale le produit des segments que cette perpendiculaire détermine sur l'hypoténuse.*

214. **Scolie II.** Si l'on additionne membre à membre les deux égalités..

$$b^2=am$$

et... $$c^2=an \qquad (1)$$

il vient... $$b^2+c^2=a(m+n)=aa=a^2 \qquad (2)$$

Donc *le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

215. **Scolie III**. En divisant membre à membre les relations (1) et (2), on a
$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{am}{an}=\frac{m}{n}.$$

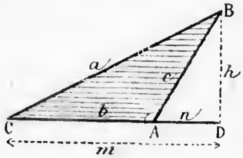
Donc *les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les projections de ces mêmes côtés sur l'hypoténuse.*

En divisant les deux membres des égalités (1) et (2) par a^2, on obtient...
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{am}{aa}=\frac{m}{a} \qquad \frac{c^2}{a^2}=\frac{an}{aa}=\frac{n}{a}$$

Donc *le carré d'un côté de l'angle droit est au carré de l'hypoténuse, comme la projection de ce côté sur l'hypoténuse est à l'hypoténuse entière.*

Proposition XIX. — Théorème.

216. *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté opposé à un angle obtus ou aigu égale la somme des carrés des deux autres côtés, plus ou moins deux fois le produit du second côté par la projection du troisième sur le second.*

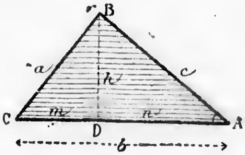


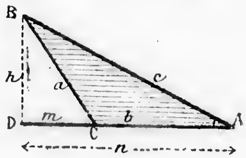
1er cas, l'angle considéré A étant obtus, on a : $m=b+n$

d'où $m^2=b^2+n^2+2bn$

Ajoutons h^2 aux deux membres... $h^2+m^2=h^2+b^2+n^2+2bn$

ou bien (n° 214)... $a^2=b^2+c^2+2bn$





2e cas, l'angle considéré A étant aigu, on a $m=b-n$, ou $n-b$ selon la figure; d'où... $m^2=b^2+n^2-2bn$

Ajoutons h^2 aux deux membres... $h^2+m^2=h^2+b^2+n^2-2bn$

ou bien (n° 214)... $a^2=b^2+c^2-2bn$

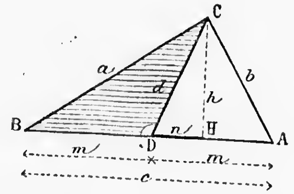
Donc *le carré d'un côté opposé...*

217. **Scolie**. *Un triangle est rectangle, obtusangle ou acutangle,* selon que le carré du plus grand côté est égal, supérieur ou inférieur à la somme des carrés des deux autres côtés.

Proposition XX. — Théorème.

218. *La somme des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle égale deux fois le carré de la médiane du troisième côté, plus deux fois le carré de la moitié de ce même côté.*

Soit ABC un triangle quelconque, et CD ou d la médiane du côté AB.



Menons la hauteur CH. Les angles en D sont l'un aigu et l'autre obtus; on a donc (nº 216):

Dans le triangle CDB... $a^2 = d^2 + m^2 + 2\,mn$ (1)

Dans le triangle CDA... $b^2 = d^2 + m^2 - 2\,mn$ (2)

D'où, en additionnant... $a^2 + b^2 = 2\,d^2 + 2\,m^2$

Donc *la somme des carrés...*

Remarque. Si l'on avait CA = CB, les angles en D seraient droits, et la projection n serait nulle; le théorème serait encore vrai.

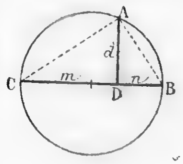
Scolie. Si l'on soustrait membre à membre les égalités (1) et (2) ci-dessus, on a : $a^2 - b^2 = 4\,mn = 2\,cn$. Donc *la différence des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle, égale deux fois la médiane comprise multipliée par sa projection sur le troisième côté.*

§ IV. — RELATIONS NUMÉRIQUES DES LIGNES DANS LE CERCLE

Proposition XXI. — Théorème.

219. *Toute perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur ce diamètre.*

Soit AD une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre BC.



Si l'on mène les droites AB et AC, l'angle BAC sera droit (nº 138, 2º); le triangle ABC sera rectangle, et AD sera la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. On aura donc (nº 212, 2º): $\frac{m}{d} = \frac{d}{n}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc *toute perpendiculaire abaissée...*

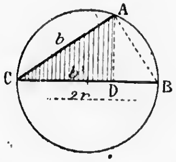
220. **Corollaire** De cette proportion, on tire $d^2 = mn$; donc *le carré de la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur un*

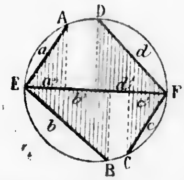
diamètre égale le produit des deux segments qu'elle détermine sur ce diamètre.

221. **Scolie.** Soit b une corde quelconque menée par une extrémité d'un diamètre, et soit b' la projection de cette corde sur le diamètre $2r$. Le triangle rectangle ABC donne $\frac{b'}{b} = \frac{b}{2r}$ (nº 212, 1º); d'où

$$b^2 = 2\ rb'.$$

Donc : 1º *le carré d'une corde menée par une extrémité d'un diamètre égale sa projection sur ce diamètre multipliée par le diamètre entier;*



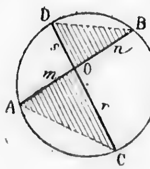


2º *Les carrés des cordes menées par une extrémité d'un diamètre sont entre eux comme les projections de ces mêmes cordes sur le diamètre.* Car si l'on appelle a', b', c', d', les projections des cordes a, b, c, d, sur le diamètre $2r$, les carrés a^2, b^2, c^2, d^2, sont entre eux comme $2ra'$, $2rb'$, $2rc'$, $2rd'$, ou simplement comme a', b', c', d'.

3º *Le carré d'une corde menée par l'extrémité d'un diamètre est au carré du diamètre, comme la projection de cette corde sur le diamètre est au diamètre entier.* Car on a $\frac{a^2}{(2r)^2} = \frac{2ra'}{2r.2r} = \frac{a'}{2r}$.

Proposition XXII. — Théorème.

222. *Lorsque deux cordes se coupent, le produit des deux segments de l'une égale le produit des deux segments de l'autre.*



Soient AB et CD deux cordes qui se coupent en O. Menons les droites AC et BD.

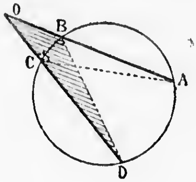
Les triangles AOC et BOD ont les angles A et D égaux, comme ayant même mesure, $\frac{1}{2}$ BC; B = C pour la même raison; donc ces triangles sont semblables, et donnent la proportion : $\frac{m}{r} = \frac{s}{n}$ d'où $mn = rs$.

Donc *lorsque deux cordes se coupent...*

Proposition XXIII. — Théorème.

223. *Si deux sécantes partent d'un même point hors d'un cercle, le produit de la première sécante par sa partie extérieure, égale le produit de la seconde par sa partie extérieure.*

Soient les deux sécantes OA et OD. Menons les droites AC et BD. Les triangles AOC et BOD ont l'angle O commun, et les angles A et D égaux comme ayant même mesure, $^1/_2$ BC; donc ces triangles sont semblables et donnent la proportion:



$$\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}, \quad \text{d'où} \quad OA \times OB = OC \times OD.$$

Donc *si deux sécantes partent...*

224. **Scolie.** 1° La proportion ci-dessus donne $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}$; donc *les sécantes sont entre elles inversement comme leurs parties extérieures.*

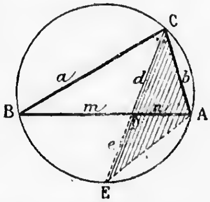
2° Si la sécante OD, tournant autour du point O, s'éloigne de plus en plus du centre, les points d'intersection C et D se rapprochent, et finissent par se confondre; la partie extérieure devient égale à la sécante entière, qui est alors une tangente. Donc *si une tangente et une sécante partent d'un même point hors d'un cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure; — et le carré de la tangente égale le produit de la sécante entière par sa partie extérieure.*

3° Les deux théorèmes précédents peuvent être réunis en un seul énoncé : *Si d'un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on mène à ce cercle une sécante quelconque, le produit des distances du point fixe aux deux points d'intersection est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Proposition XXIV. — Théorème.

225. *Le produit de deux côtés quelconques d'un triangle égale le carré de la bissectrice de l'angle compris, plus le produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.*

Soit ABC un triangle quelconque, et CD la bissectrice de l'angle C. Il s'agit de prouver que $ab = d^2 + mn$. Circonscrivons un cercle au triangle; prolongeons la bissectrice CD jusqu'en E, et menons AE.



Les triangles CDB et CAE sont semblables, car leurs angles en C sont égaux par hypothèse, et les angles B et E ont même mesure, $^1/_2$ AC. On a donc

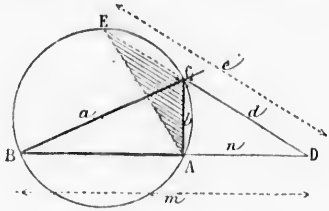
$$\frac{a}{d}=\frac{d+e}{b} \qquad \text{d'où} \quad ab = d^2 + de.$$

Mais à cause des deux cordes AB et CE qui se coupent, le produit de peut être remplacé par son égal mn (n° 222), et l'on aura

$$ab = d^2 + mn$$

Donc *le produit des deux côtés quelconques...*

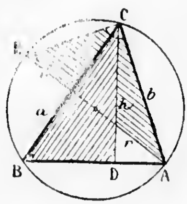
226. **Scolie.** On peut considérer la bissectrice extérieure CD. Par une construction analogue à la précédente, on obtient deux triangles



semblables CDB et CAE, qui donnent : $\frac{a}{d}=\frac{e-d}{b}$, d'où $ab=de-d^2$. Puis, à cause des sécantes DB et DE, le produit de peut être remplacé par son égal mn (n° 223), et l'on a $ab=mn-d^2$.

Proposition XXV. — Théorème.

227. *Le produit de deux côtés quelconques d'un triangle égale la hauteur relative au troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.*



Soit le triangle ABC, CD ou h l'une des hauteurs, et AE ou $2r$ le diamètre du cercle circonscrit. Il faut prouver que $ab=2rh$.

Menons CE. Les deux triangles CDB et ACE sont semblables, car l'un est rectangle en D, et l'autre en C (n° 138, 2°), et les angles B et E ont même mesure, $\frac{1}{2}$ AC. On a donc :

$$\frac{a}{h}=\frac{2r}{b} \quad \text{d'où} \quad ab=2rh.$$

Donc *le produit de deux côtés quelconques...*

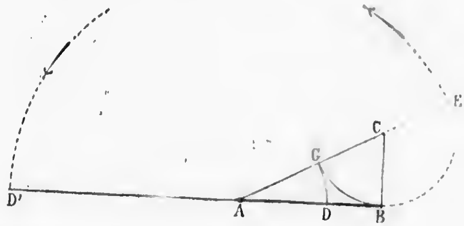
Proposition XXVI. — Problème.

228. *Diviser une droite donnée en moyenne et extrême raison* (c'est-à-dire en deux parties telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la petite partie).

Soit AB la droite donnée; on construit le triangle rectangle ABC, en prenant BC égal à la moitié de AB; du point C on décrit l'arc BG, et du point A l'arc GD. Le point D divisera la droite AB en moyenne et extrême raison; et on aura $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AB}$.

En effet, prolongeons la droite AC et l'arc GB jusqu'à leur rencontre en E. La tangente AB et la sécante AE donnent (n° 224, 2°) :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AG};\quad \text{d'où}\quad \frac{AE-AB}{AB}=\frac{AB-AG}{AG}$$



Or, par construction, AB = GE; ainsi AE — AB égale AG ou AD; et AB — AG égale DB. Et l'on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{DB}{AD}$; d'où $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}$.

229. **Scolie.** Désignons AB par a, AG ou AD par x; d'après la construction, $CG=BC=\frac{a}{2}$.

Le triangle rectangle ABC donne $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

ou
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$$

D'où $x+\frac{a}{2}=\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}$ et $x=-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}=\frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

En effectuant les calculs, on trouve pour x les deux valeurs :

$$a\,(0,618...)$$
$$a\,(-1,618...)$$

Ainsi AD égale environ les 0,618 de a.

L'autre valeur $a\,(-1,618...)$ ou $-1,618\,a$, indique qu'il existe un autre point satisfaisant à la condition, et dont la distance au point A doit être prise en sens inverse de AD, c'est-à-dire sur la gauche du point A; cette distance est représentée par la sécante entière AE; et si on la porte en AD′ on aura $\frac{AB}{AD'}=\frac{AD'}{D'B}$

En effet, la figure donne $\frac{AB}{AE}=\frac{AG}{AB}=\frac{AB+AG}{AE+AB}$

Or AB + AG égale AE ou AD′, et AE + AB égale D′B; on a donc :

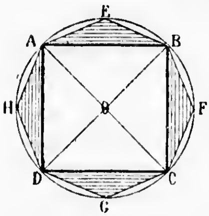
$$\frac{AB}{AD'}=\frac{AD'}{D'B}$$


2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
2.0
1.8
1.0

§ V. — RELATIONS NUMÉRIQUES DES LIGNES

DANS LES POLYGONES RÉGULIERS

Proposition XXVII. — Problème.

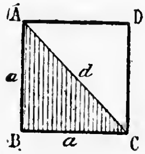


230. *Inscrire un carré dans un cercle donné.*

On trace deux diamètres AC et BD perpendiculaires l'un à l'autre; les quatre angles au centre ainsi formés étant droits, la circonférence se trouve divisée en quatre parties égales (n° 105), et le polygone ABCD est un quadrilatère régulier, c'est-à-dire un carré, inscrit dans le cercle donné (n° 147).

231. **Scolie.** 1° Appelons r le rayon du cercle, et c le côté du carré inscrit; le triangle rectangle AOB donne $c^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$; d'où $c = r\sqrt{2} = r\,(1{,}414\,21...)$;

2° On peut subdiviser les arcs AB, BC... en 2, 4, 8, 16... parties égales, ce qui permet d'inscrire les polygones réguliers de 8, 16, 32, ou 2^3, 2^4, 2^5, et en général 2^n côtés, c'est-à-dire tout polygone régulier ayant un nombre de côtés indiqué par une puissance de 2.



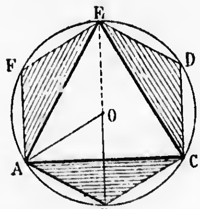
3° On peut également circonscrire le carré, et tout polygone régulier ayant un nombre de côtés exprimé par 2^n (n° 148).

4° Le triangle rectangle ABC donne

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; d'où $d = a\sqrt{2} = a\,(1{,}414\,21...)$

Proposition XXVIII. — Théorème.

232. *Le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit.*



Soit ABCDEF un hexagone régulier inscrit; menons les rayons OA et OB. Il faut prouver que le triangle AOB est équilatéral.

L'angle AOB égale le $^1/_6$ de 4 droits, ou $^2/_3$ d'angle droit; donc les deux autres angles égalent ensemble $^4/_3$ d'angle droit, et comme ils sont égaux entre eux, chacun d'eux égale $^2/_3$ d'angle droit; donc le triangle AOB est équilatéral.

233. **Corollaire.** 1° Pour *inscrire dans un cercle donné un hexagone*

régulier, on porte le rayon six fois comme corde, et on joint les points consécutifs.

2° Si l'on joint de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier, on obtient le *triangle équilatéral* inscrit ACE.

3° En subdivisant les arcs AB, BC, CD... en 2, 4, 8, 16... parties égales, on peut construire les polygones réguliers de 12, 24, 48... côtés.

4° On peut inscrire et circonscrire au cercle tout polygone régulier ayant un nombre de côtés représenté par 3×2^n.

234. **Scolie.** 1° Le triangle ABE, rectangle en A (n° 138, 2°), donne (fig. ci-dessus) :

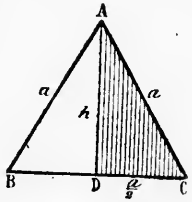
$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

d'où $AE = r\sqrt{3} = r\,(1{,}732\,05...)$

2° Le triangle rectangle ADC donne

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

d'où $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}... = a(0{,}866\,02)$

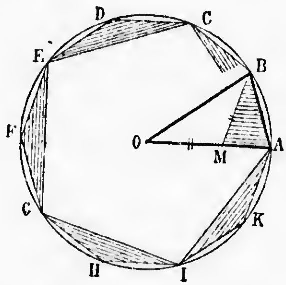


Proposition XXIX. — Théorème.

235. *Le côté du décagone régulier inscrit égale le grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.*

Soit AB le côté du décagone régulier inscrit. Menons les rayons OA et OB; puis BM bissectrice de l'angle ABO.

Dans le triangle isocèle AOB, l'angle O égale $\frac{4 \text{ droits}}{10}$ ou $2/5$ d'angle droit; donc les deux autres angles A et B égalent chacun $4/5$ d'angle droit; et chaque moitié de l'angle B égale $2/5$ d'angle droit.



L'angle AMB, extérieur au triangle OMB, égale $4/5$ d'angle droit; ainsi le triangle ABM est isocèle; il en est de même du triangle OMB, et l'on a : $AB = BM = OM$.

Dans le triangle ABO, la bissectrice BM donne (n° 184) :

$$\frac{BO}{BA} = \frac{MO}{MA} \quad \text{ou} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{OM}{MA}$$

Donc *le côté du décagone régulier inscrit égale le grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.*

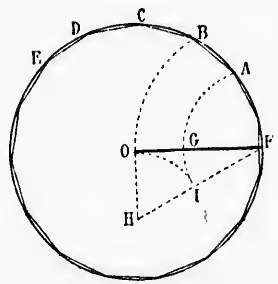
236. **Scolie.** 1° En joignant les sommets de deux en deux, on obtient le pentagone régulier inscrit.

2° En subdivisant les arcs AB, BC, CD,... en 2, 4, 8, 16... parties égales, on obtient les polygones réguliers de 20, 40, 80... côtés. Dans cette série de polygones, le nombre des côtés a pour expression générale 5×2^n.

3° Le côté du décagone régulier inscrit a pour expression $\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ ou $r\,(0{,}618\,03...)$ (voir n° 229).

Proposition XXX. — Problème.

237. *Inscrire dans un cercle donné un pentédécagone régulier, ou polygone régulier de 15 côtés.*



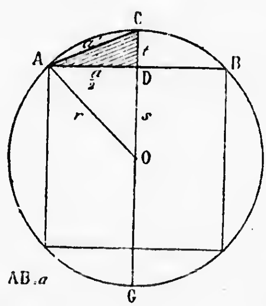
Soit OF le rayon du cercle donné. Divisons ce rayon en moyenne et extrême raison, et soit G le point de division. Du point F comme centre, avec des rayons égaux à FO et à FG, décrivons les arcs OB et GA.

L'arc FB est le $1/_6$ de la circonférence (n° 232), et l'arc FA en est le $1/_{10}$. Ainsi l'arc AB égale $1/_6 - 1/_{10}$ ou $1/_{15}$ de la circonférence. La corde AB est donc le côté du pentédécagone régulier inscrit.

238. **Scolie.** En subdivisant les arcs AB, BC, etc., en 2, 4, 8... parties égales, on obtient les polygones réguliers de 30, 60, 120... côtés. Ces nombres ont pour expression générale $5 \times 3 \times 2^n$.

Remarque. Le géomètre Gauss a démontré que l'on peut construire géométriquement tout polygone régulier ayant un nombre de côtés représenté par $(2^n+1)2^n$, si 2^n+1 est un *nombre premier;* ainsi, indépendamment des quatre séries de polygones do[illegible] été question ci-dessus, on peut encore inscrire les polygones d[illegible]ôtés, de 257 côtés, etc., avec ceux qui en dérivent; mais les constructions sont trop laborieuses pour trouver place dans un cours élémentaire.

Proposition XXXI. — Problème.



239. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, et le rayon du cercle circonscrit, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

Soit AB ou a le côté donné, et r le rayon du cercle. Si l'on mène le diamètre CG perpendiculaire à la corde AB, AC ou a' sera le côté demandé. Il s'agit d'exprimer a' en fonction de a et de r.

Le carré de la corde AC égale sa projection CD sur le diamètre, multipliée par le diamètre CG (n° 221) :

$$a'^2 = 2rt = 2r(r-s) = 2r^2 - 2rs$$

$$\text{d'où} \quad a' = \sqrt{2r^2 - 2rs}$$

Le triangle rectangle ADO donne $s^2 = r^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4r^2 - a^2}{4}$

$$\text{d'où} \quad s = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

En mettant cette valeur de s dans l'expression de a', on obtient :

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

240. **Scolie.** 1° Cette relation est vraie, même lorsque AB est une corde quelconque.

2° Si on suppose le rayon r égal à l'unité, la formule ci-dessus devient

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

3° *Étant donnés le rayon d'un cercle et le périmètre d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle, ainsi que le nombre des côtés, on peut calculer le périmètre du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

4° Ce problème peut être appliqué au *calcul du nombre* π *par la méthode* dite *des périmètres*. Car la circonférence est la limite vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers inscrits, lorsque le nombre des côtés croît indéfiniment. On peut donc, pour un rayon égal à l'unité, calculer le périmètre du carré inscrit, puis celui de l'octogone régulier inscrit, puis ceux des polygones réguliers de 16, 32, 64... côtés, jusqu'à ce que le périmètre puisse être pris pour la circonférence.

Si le rayon est 1, la circonférence égale 2π, et la demi-circonférence égale π; c'est pourquoi on se contente de calculer les demi-périmètres des polygones.

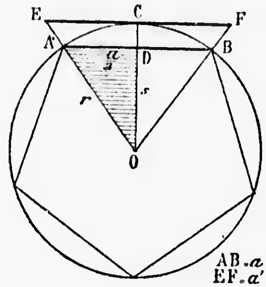
Calcul du nombre π
par la méthode des périmètres. (Méthode d'Archimède.)

(Rayon $r = 1$; demi-circonférence $\pi r = \pi$.)

Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4	2, 828 427 1
8	3, 061 467 4
16	3, 121 445 1
32	3, 136 548 5
64	3, 140 331 1
128	3, 141 277 2
256	3, 141 513 8
512	3, 141 572 9
1 024	3, 141 587 7
2 048	3, 141 591 4
4 096	3, 141 592 3
8 192	3, 141 592 5
16 384	3, 141 592 6
32 768	3, 141 592 6... $= \pi$.

Proposition XXXII. — Problème.

241. *Connaissant le rayon du cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone circonscrit semblable.*



Soit AB ou a le côté donné, et r le rayon $OA = OB$. Par le point C, milieu de l'arc ACB, menons la tangente EF, limitée par les prolongements des rayons OA et OB. Le rayon OC est perpendiculaire à la tangente EF et à la corde AB (nos 120, et 111, 5°); ainsi ces deux droites AB et EF sont parallèles, et la droite EF ou a' est le côté qu'il s'agit de calculer.

Les triangles EFO et ABO étant semblables, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{r}{s}; \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{ar}{s}$$

$$\text{Or } s^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}(4r^2 - a^2) \quad \text{d'où} \quad s = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$\text{Donc} \qquad a' = \frac{ar}{{}^1/_2\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

242. **Scolie.** 1° Cette relation est vraie, même lorsque AB est une corde quelconque.

2° Si l'on suppose le rayon r égal à l'unité, la formule ci-dessus devient

$$a' = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}$$

3° *Étant donnés le rayon d'un cercle et le périmètre d'un polygone régulier inscrit, ainsi que le nombre des côtés, on peut calculer le périmètre du polygone circonscrit semblable.*

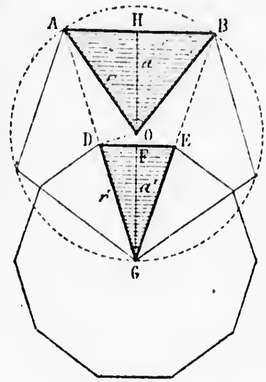
243. **Définition.** On appelle *figures isopérimètres* des figures dont les contours ont la même longueur, quelle que soit d'ailleurs leur forme. Un triangle, un carré, un cercle peuvent être *isopérimètres*.

Proposition XXXIII. — Théorème.

244. *Connaissant l'apothème et le rayon d'un polygone régulier quelconque, on peut calculer l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre d'un nombre double de côtés.*

Soient OH et OA l'apothème et le rayon donnés. Décrivons avec OA la circonférence circonscrite au polygone considéré, dont AB est le côté. AOB est l'angle au centre de ce polygone.

Prolongeons l'apothème HO jusqu'en G; menons GA et GB, OD perpendiculaire à GA, et enfin DE parallèle à AB. Le point D est le milieu de la corde AG (n° 110); ainsi le triangle GDE, semblable à GAB, a toutes ses dimensions moitiés de leurs homologues dans GAB; donc $DE = \frac{1}{2}AB$, et $GF = \frac{1}{2}GH$; de plus l'angle inscrit AGB est moitié de l'angle au centre AOB. Ainsi DE est le côté du polygone demandé; et DGE est l'angle au centre de ce polygone; GF ou a' en est l'apothème, et GD ou r' en est le rayon.



Il s'agit d'exprimer a' et r' en fonction de a et de r.

$$\text{Or} \quad GF = \tfrac{1}{2}GH = \tfrac{1}{2}(GO + OH)$$

$$\text{ou} \quad a' = \frac{a+r}{2}$$

Donc *le nouvel apothème est une moyenne arithmétique entre l'apothème et le rayon précédents.*

Dans le triangle rectangle ODG, on a : $\overline{GD}^2 = GO \times GF$, ou $r'^2 = a'r$; d'où $r' = \sqrt{a'r}$.

Ainsi *le nouveau rayon est une moyenne géométrique entre le nouvel apothème et le rayon précédent.*

Donc *connaissant l'apothème et le rayon...*

245. **Scolie.** 1° Le nouvel apothème est plus grand que l'apothème donné, et le nouveau rayon est plus petit que le rayon donné; cela se voit sur la figure.

2° Le nombre π peut être calculé par les apothèmes et les rayons des polygones réguliers isopérimètres. Car si l'on considère un carré d'un mètre de côté ou de 4 mètres de contour, et si on le transforme successivement en polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32, 64... côtés, le polygone tend vers le cercle, l'apothème et le rayon tendent à se confondre; et si l'on calcule les apothèmes et les rayons jusqu'à ce que ces lignes diffèrent d'aussi peu que l'on voudra, on aura, avec une approximation correspondante, le rayon d'une circonférence de 4 mètres.

Alors on obtiendra le nombre π en divisant la circonférence 4 par le double du rayon trouvé, ou la demi-circonférence 2 par ce rayon lui-même.

Voici les résultats que l'on obtient :

Calcul du nombre π
par la méthode des isopérimètres. (Méthode de Schwab.)

(Périmètre constant : 4^m. Polygone de départ : le carré.)

Nombre des côtés.	Apothèmes.	Rayons.
4	0, 500 000 0	0, 707 106 8
8	0, 603 553 4	0, 653 281 5
16	0, 628 417 4	0, 640 728 9
32	0, 634 573 1	0, 637 643 5
64	0, 636 108 3	0, 636 875 4
128	0, 636 491 9	0, 636 683 6
256	0, 636 587 8	0, 636 635 7
512	0, 636 611 7	0, 636 623 7
1 024	0, 636 617 7	0, 636 620 7
2 048	0, 636 619 2	0, 636 619 9
4 096	0, 636 619 5	0, 636 619 7
8 192	0, 636 619 6	0, 636 619 6

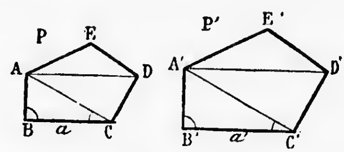
$$\pi = \frac{2}{0{,}636\ 619\ 5} = 3{,}141\ 592\ldots$$

§ VI. — CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

Problème I.

246. *Sur une droite donnée* a', *construire un polygone semblable à un polygone donné* P, *la droite donnée* a' *devant être l'homologue d'une ligne désignée* a.

On décompose en triangles le polygone donné P. Sur a' on construit un triangle A'B'C' semblable à ABC, en reproduisant en B'



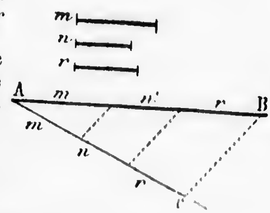
et C' les angles B et C; puis sur A'C' on construit un triangle A'C'D' semblable à ACD, et enfin sur A'D' un triangle A'D'E' semblable à ADE. Les deux polygones sont semblables, puisqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

Remarque. Les droites a et a' pourraient être des diagonales, ou des lignes homologues quelconques.

Problème II.

247. *Diviser une droite donnée* AB *en parties proportionnelles à*

des longueurs données m, n, r, *ou à des nombres donnés* 12, 8, 10, *par exemple.*

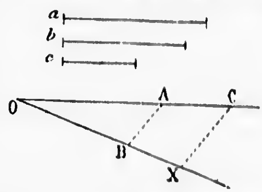


On trace une droite AC faisant avec AB un angle quelconque; sur cette droite AC, on porte consécutivement les longueurs données, m, n, r; on trace CB, puis des parallèles à CB par les divers points de division (nº 180, 4º).

Si ce sont des nombres qui sont donnés, on porte sur AC des longueurs proportionnelles à ces nombres, par exemple 12, 8, 10 millimètres.

Problème III.

248. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données* a, b, c.



On trace un angle quelconque O, sur les côtés duquel on porte OA égal à a, OB égal à b, OC égal à c; on trace AB, puis CX parallèle à AB. La droite OX ou x est la quatrième proportionnelle demandée; car on a

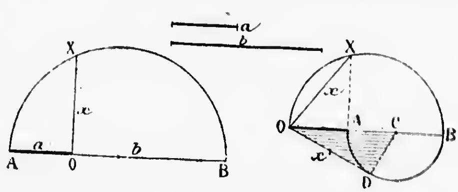
$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OX} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{x} \quad (\text{nº } 179).$$

Scolie. Si l'on demande *une troisième proportionnelle à deux droites données* a *et* b, on cherche une quatrième proportionnelle aux droites a, b, b, de manière à obtenir la proportion $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$.

Problème IV.

249. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données* a *et* b.

1er *procédé*. On trace une droite indéfinie AB, sur laquelle on porte



$OA=a$, et $OB=b$; sur AB comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, et l'on mène la perpendiculaire OX, qui est la ligne demandée.

Car on a $\frac{OA}{OX}=\frac{OX}{OB}$ ou $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ (nº 219).

2° *procédé*. On porte l'une sur l'autre les deux longueurs OA et OB, ou a et b; sur OB on décrit une demi-circonférence; on mène la perpendiculaire AX, puis la corde OX qui est la ligne demandée.

Car on a $\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ (n° 221).

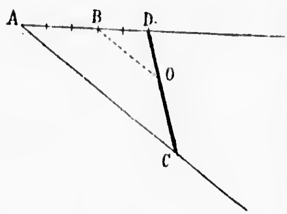
3° *procédé*. Ayant porté l'une sur l'autre les deux longueurs OA et OB (2° figure), on décrit sur AB une demi-circonférence, à laquelle on mène la tangente OD qui est la droite demandée.

On a en effet $\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB}$ ou $\frac{a}{x'} = \frac{x'}{b}$ (n° 224, 2°).

Scolie. Dans le triangle rectangle OCD (2° figure), l'hypoténuse OC est la *moyenne arithmétique* ou la *demi-somme* des deux lignes a et b; CD est la *demi-différence* de ces mêmes lignes, et OD est leur *moyenne proportionnelle* ou *moyenne géométrique*, c'est-à-dire la racine carrée de leur produit. On voit que la moyenne géométrique est moindre que la moyenne arithmétique.

Problème V.

250. *Par un point O donné dans un angle quelconque A, mener une droite qui soit divisée par ce point O dans un rapport donné, $3/2$ par exemple.*



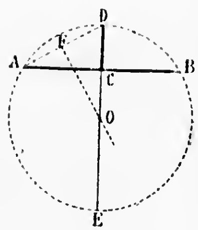
On trace OB parallèle à l'un des côtés de l'angle, à AC, par exemple; on divise AB en 3 parties égales; on porte 2 de ces parties en BD, et l'on trace DOC, qui est la droite demandée. Car les parallèles BO et AC donnent la proportion

$$\frac{AB}{BD} = \frac{CO}{OD} \quad \text{or} \quad \frac{AB}{BD} = \frac{3}{2}$$

donc $\frac{CO}{OD} = \frac{3}{2}$

Problème VI.

251. *Connaissant une corde AB et sa flèche CD, trouver le rayon ou le diamètre du cercle.*



La *flèche* CD est une partie du rayon perpendiculaire à la corde. Les points A et D appartenant à l'arc, AD est une corde, et le centre doit se trouver sur la perpendiculaire FO menée par le milieu de cette corde; donc il se trouve à l'intersection O de cette perpendiculaire avec la flèche prolongée; par suite, OD est le rayon.

EXERCICES SUR LE LIVRE III

Théorèmes à démontrer.

Lignes proportionnelles. — 1. D'un point O on mène quatre droites indéfinies faisant entre elles des angles de 45 degrés; démontrer que toute droite qui traverse ce faisceau y est divisée harmoniquement.

2. Par le milieu d'une droite et par ses extrémités, on mène des parallèles qui vont s'arrêter à une autre droite donnée; démontrer que la parallèle menée par le milieu est égale à la demi-somme des deux autres.

3. La somme des distances des sommets d'un triangle à une droite quelconque égale la somme des distances de cette même droite aux milieux des trois côtés. Extension à un polygone quelconque.

4. La distance d'une droite quelconque au point de concours des médianes d'un triangle est la moyenne arithmétique des distances des trois sommets à cette même droite.

Polygones semblables. — 5. Dans un parallélogramme, les distances d'un point quelconque d'une diagonale aux deux côtés adjacents sont entre elles inversement comme ces côtés.

6. Étant donnés une circonférence et un diamètre MN que l'on prolonge, on prend sur cette circonférence un point C quelconque, et l'on mène la droite CM, puis CA et CB faisant avec CM des angles égaux. Démontrer que si le point C se meut sur la circonférence, le rapport des distances CA et CB est constant.

7. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un cercle, on élève en un point quelconque du diamètre une perpendiculaire allant rencontrer les deux autres côtés du triangle. Démontrer que la partie de cette perpendiculaire comprise entre le diamètre et la circonférence est moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la partie de cette même ligne comprise à l'intérieur du triangle.

8. Étant donnés en grandeur et en position deux cercles quelconques, si l'on conçoit deux rayons qui se meuvent en restant constamment parallèles l'un à l'autre, les droites menées par leurs extrémités rencontrent la ligne des centres en un même point.

9. Toute parallèle à la base d'un triangle a son milieu sur la médiane.

10. Dans un triangle quelconque, on forme des trapèzes par des parallèles à la base. Démontrer que les diagonales de ces trapèzes se rencontrent sur la médiane de ce triangle.

Relations numériques. — 11. Si trois droites indéfinies passent par un même point, et si un point se meut sur l'une d'elles, les distances de ce point aux deux autres droites sont dans un rapport constant.

12. Si deux circonférences quelconques sont concentriques, la somme des carrés des distances d'un point quelconque de l'une aux deux extrémités d'un diamètre quelconque de l'autre est constante.

13. Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales.

14. *Théorème d'Euler.* — Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.

15. Dans un cercle quelconque, on mène une corde CD perpendiculaire au diamètre AB; par un point M mobile sur CD, on mène une corde AME. Démontrer que le produit AM $\times$ AE est constant.

16. 1^er *Théorème de Ptolémée.* — Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.

17. 2^me *Théorème de Ptolémée.* — Dans tout quadrilatère non-inscriptible, le produit des diagonales est moindre que la somme des produits des côtés opposés.

18. 3^me *Théorème de Ptolémée.* — Les diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités : $\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$.

19. Dans un trapèze quelconque, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés non-parallèles, plus deux fois le produit des bases.

20. Dans un quadrilatère quelconque, la somme des carrés des diagonales est double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

21. Dans un triangle équilatéral inscrit, la distance de l'un des sommets à un point quelconque de l'arc opposé égale la somme des distances des deux autres sommets à ce même point de l'arc.

22. Le produit des distances d'un point quelconque d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit égale le produit des distances de ce même point aux deux autres côtés.

23. Si d'un point donné on mène à une circonférence donnée deux sécantes quelconques perpendiculaires entre elles, la somme des carrés des parties intérieures de ces sécantes est constante.

24. Lorsque trois cercles se coupent, les trois cordes d'intersection se rencontrent en un même point.

25. La somme de deux côtés quelconques d'un triangle, multipliée par leur différence, égale la somme de leurs projections sur le troisième côté, multipliée par la différence de ces mêmes projections.

26. La différence des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle égale la différence des carrés de leurs projections sur le troisième côté.

27. Deux côtés quelconques d'un triangle sont entre eux comme leurs projections l'un sur l'autre.

28. Dans un triangle quelconque, on joint les pieds des hauteurs. Démontrer que les trois triangles ainsi formés vers les sommets sont semblables au triangle primitif. — Conclure de là que les hauteurs sont les bissectrices du triangle qui a pour sommets les pieds de ces mêmes hauteurs.

29. La projection d'une ligne polygonale ABCD sur un axe, égale la projection de la droite AD qui joint les extrémités de cette même ligne polygonale.

30. La diagonale et le côté d'un carré sont deux lignes incommensurables, c'est-à-dire n'ayant pas de commune mesure.

Lieux géométriques à trouver.

1. Lieu des points dont les distances à deux droites données sont dans un rapport donné.

2. Lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné.

3. Lieu des points tels que la somme ou la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés soit égale au carré d'une ligne donnée.

4. Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux droites rectangulaires données soit égale au carré d'une ligne donnée.

5. Lieu des points tels que, pour chacun d'eux, les tangentes menées à deux cercles donnés soient égales.

6. Lieu des points tels que, de chacun d'eux, deux cercles donnés soient vus sous un même angle.

7. Une droite d'une longueur variable part d'une extrémité fixe, et l'autre extrémité se meut sur une circonférence ou sur une droite donnée; un second point se meut sur la droite mobile, de manière que le produit des distances du point fixe aux deux points mobiles soit égal au carré d'une ligne donnée. On demande le lieu parcouru par le second point mobile.

8. Une sécante à un cercle donné se meut autour d'un point fixe; aux deux points d'intersection avec la circonférence, on mène des tangentes. On demande le lieu des points de concours de ces couples de tangentes.

9. Un angle d'une ouverture constante se meut autour de son sommet; ses côtés varient de longueur, mais en restant toujours dans le même rapport, ou bien en donnant toujours le même produit; l'un de ces côtés promène son extrémité mobile sur une droite donnée, ou sur une circonférence. On demande le lieu décrit par l'extrémité de l'autre côté.

10. Le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle se meut sur la circonférence décrite sur l'hypoténuse, cette dernière ligne restant fixe, on prolonge l'un des côtés de l'angle droit de sa propre longueur, au delà du sommet mobile, et l'on joint le centre à l'extrémité du prolongement. On demande le lieu de la rencontre de la dernière ligne tracée avec l'autre côté de l'angle droit.

11. Lieu des sommets des triangles qui ont même base, et mêmes segments déterminés sur cette base par les bissectrices intérieure et extérieure.

12. Une droite AB étant donnée comme base d'un triangle, et un point M comme étant sur cette base le pied d'une bissectrice intérieure, trouver le lieu du troisième sommet du triangle.

13. Étant donnés un point A et une droite indéfinie CD, on mène du point à la droite une sécante mobile AM, et en chaque position, on marque un point N tel que l'on ait $AM \times AN = k^2$. Trouver le lieu des points N.

Problèmes.

1. Une droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur un second côté deux segments de 18 et de 7 mètres. Quels sont les segments déterminés sur l'autre côté, dont la longueur totale est de 30 mètres?

2. Deux côtés d'un triangle ont respectivement 158 et 176 mètres, à partir du sommet commun; on porte 120 mètres sur le premier côté. Quelle longueur faut-il porter sur le second, pour que la ligne menée sur les deux points obtenus soit parallèle au troisième côté?

3. Calculer la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre, si les segments qu'elle détermine sur ce diamètre sont respectivement de 7 et de 9 mètres.

4. Les trois côtés d'un triangle ont respectivement 18, 30 et 36 mètres. Calculer les segments déterminés sur ces côtés par les trois bissectrices.

5. Construire un triangle connaissant deux côtés et le pied de la bissectrice qui tombe sur l'un d'eux.

6. Les trois côtés d'un triangle ont respectivement 8^m50, 6^m30 et 4^m90. Calculer de combien il faut prolonger le grand côté pour arriver au pied de la bissectrice de l'angle extérieur.

7. Deux côtés adjacents d'un parallélogramme ont respectivement 17 et 32 mètres, et l'une des diagonales en a 43. Calculer l'autre diagonale.

8. Les deux diagonales d'un parallélogramme ont 25 et 40 mètres, et l'un des côtés 18. Quel est le périmètre de ce parallélogramme?

9. Les côtés d'un quadrilatère ont 20, 30, 35 et 8 mètres, et les diagonales 25 et 36 mètres. Calculer la droite qui joint les milieux des diagonales.

10. Sur une droite indéfinie AN, on donne $AM = 15$, et $AB = 23$. Calculer un point N tel que l'on ait $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$.

11. L'hypoténuse d'un triangle rectangle a 30 mètres, et l'un des segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse a 20 mètres. Calculer cette hauteur et les deux côtés de l'angle droit.

12. Dans un cercle de 8 mètres de rayon, on trace un diamètre, et par une de ses extrémités, une corde de 12 mètres. Calculer la projection de cette corde sur le diamètre.

13. Construire un triangle connaissant deux côtés a et b, et la projection n du troisième côté sur le second.

14. Deux côtés d'un triangle ont 17 et 21 mètres, et la projection du troisième côté sur le second est de 11 mètres. Calculer le troisième côté, et la hauteur qui tombe sur le second.

15. Les trois côtés a, b, c, d'un triangle ont 52, 51 et 25 mètres. Calculer les projections b' et c' des côtés b et c sur a. Calculer ensuite la hauteur h qui tombe sur ce même côté a.

16. Deux cordes se coupent; on donne les deux segments m et n de l'une, et un segment p de l'autre. Trouver l'autre segment de la seconde corde.

17. Deux cordes se coupent, les deux segments de l'une ont 15 et 10 mètres. Calculer les deux segments de l'autre corde, dont la longueur totale est de 28 mètres.

18. Dans un cercle de 17 mètres de rayon, deux cordes se coupent, et le produit des deux segments de chacune d'elles est 145. Calculer la distance du centre au point d'intersection.

19. Deux sécantes partent d'un même point hors d'un cercle; on donne les parties extérieure et intérieure a et b de l'une, avec la partie extérieure c de l'autre. Trouver la partie intérieure de cette dernière.

20. Deux sécantes partent d'un même point; les deux parties extérieure et intérieure de l'une ont 12 et 23 mètres, et la partie extérieure de la seconde 17 mètres. Calculer sa partie intérieure.

21. Une tangente et une sécante partent d'un même point; la tangente a 18 mètres, et la partie intérieure de la sécante 23 mètres. Calculer la partie extérieure de cette sécante.

22. Le diamètre d'un cercle a 32^{m}50, on le prolonge de 4^{m}50. Calculer la longueur de la tangente menée du point obtenu.

23. Le diamètre d'un cercle a 25^{m}40. De combien faut-il le prolonger pour que la tangente menée du point obtenu soit de 12 mètres?

24. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés, et qui soit tangente à une droite donnée.

25. Les trois côtés d'un triangle ont respectivement 11, 18 et 20 mètres. Calculer les trois médianes, les trois bissectrices, les trois hauteurs, et les distances des trois côtés au centre du cercle circonscrit. — Généraliser, en exprimant ces diverses lignes en fonction des trois côtés a, b, c.

26. Les quatre côtés d'un quadrilatère ont 15, 18, 20 et 23 mètres; l'une des diagonales a 30 mètres, et la droite qui joint les milieux des diagonales a 4^{m}50. Calculer l'autre diagonale.

27. Calculer directement le partage d'une ligne de 1 mètre en moyenne et extrême raison.

28. Un arceau en arc de cercle a 3^{m}50 d'ouverture et 0^{m}70 de flèche. Trouver son rayon par une construction graphique, puis par le calcul.

29. Dans un cercle de 2^{m}25 de rayon, on donne une corde de 3 mètres. Calculer la corde qui sous-tend l'arc moitié, ainsi que la corde qui sous-tend l'arc double.

30. A quelle distance du centre se trouve une corde de 2^{m}72, dans un cercle de 3^{m}65 de rayon?

31. Quel rayon faut-il prendre pour que la circonférence décrite ait 1 mètre de longueur?

32. Quelle est la longueur absolue d'un arc de 40 degrés $1/2$ dans une circonférence de 14^m25 de rayon ?

33. Combien y a-t-il de degrés dans l'arc qui aurait la même longueur que le rayon ?

34. Dans un cercle de 1 mètre de rayon, le polygone régulier inscrit de 16 côtés a $0^m390\ 180\ 6...$ pour longueur du côté. Calculer les côtés des polygones réguliers inscrits de 32, 64, 128... côtés, et déduire de ces calculs une valeur rapprochée du nombre π.

35. Dans un hexagone régulier de 1 mètre de côté, le rayon est de 1 mètre, et l'apothème de $0^m866\ 025$. Calculer le rayon et l'apothème des polygones réguliers isopérimètres de 12, 24, 48, 96.... côtés, et déduire de ces calculs une valeur approchée du nombre π.

36. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence du côté et de la diagonale.

37. Quel est le côté d'un carré, si la diagonale et le côté ont ensemble 5^m80 ?

38. Quel est le côté d'un carré, si la différence entre le côté et la diagonale est 5^m80 ?

39. Étant données deux circonférences sécantes, mener, par l'un des points d'intersection, une sécante qui soit divisée par ce point dans un rapport donné.

40. Étant données deux circonférences, trouver un point tel que les tangentes menées à l'une et à l'autre soient égales, et se coupent sous un angle donné.

41. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé, et le rapport des deux autres côtés.

42. Par un point donné, mener une droite qui concoure avec deux autres droites données, sans recourir au point de rencontre.

43. Construire un triangle semblable à un triangle donné, et dont les sommets se trouvent sur trois parallèles données, ou sur trois circonférences concentriques données.

44. Par un point donné dans l'intérieur d'un angle, mener une droite telle que le produit de ses deux segments soit égal au carré d'une ligne donnée.

45. Par un point donné dans le plan d'un cercle, mener une sécante telle que les distances du point donné aux deux intersections soient dans un rapport donné.

46. Décrire une circonférence tangente à une circonférence donnée, et qui passe par deux points donnés.

47. Décrire une circonférence tangente à deux circonférences données, et qui passe par un point donné.

48. Décrire une circonférence tangente à une circonférence et à une droite données, et qui passe par un point donné.

49. Décrire une circonférence tangente à deux droites et à une circonférence données.

50. Décrire une circonférence tangente à une droite et à deux circonférences données.

51. Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données.

52. Étant donnés les périmètres p et P de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, exprimer les périmètres p' et P' des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.

53. Appliquer au calcul du nombre π les formules du problème précédent, en partant des carrés inscrit et circonscrit à un cercle de 1 mètre de rayon.

LIVRE IV

SURFACES

§ I. — ÉVALUATION DES SURFACES

Définitions.

252. Une *surface* est une étendue considérée sous deux dimensions : longueur et largeur.

Pour évaluer les surfaces, on les compare à la surface choisie comme *unité de mesure*, laquelle est généralement le *mètre carré*.

On appelle *aire* d'une figure le nombre qui exprime le rapport de cette figure à l'unité de surface.

On emploie indifféremment les mots *aire* et *surface*.

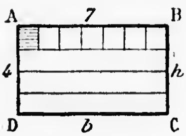
Deux surfaces sont *égales* lorsqu'elles peuvent coïncider par superposition.

Elles sont *équivalentes* lorsqu'elles ont la même étendue, la même aire, sans avoir la même forme.

Proposition I. — Théorème.

253. *L'aire d'un rectangle égale le produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord le cas où l'unité linéaire serait contenue exactement dans la base et dans la hauteur. Soit, par exemple, le rectangle ABCD ayant 7 mètres de base et 4 de hauteur. Il s'agit de prouver que le nombre de mètres carrés contenus dans ce rectangle est exprimé par 7×4 ou 28.



Cette figure peut être décomposée en 4 rectangles de 7 mètres de longueur sur 1 mètre de largeur; et chaque rectangle partiel peut être divisé en 7 parties égales, dont chacune est un *mètre carré*. Le rectangle contient donc 4 fois 7 mètres carrés ou 28 mètres carrés.

Pour généraliser, si l'on appelle b la base et h la hauteur du rectangle, la surface sera exprimée par le produit bh.

2° *Supposons les dimensions fractionnaires*, et soit $b = 7^{m}3$ et $h = 4^{m}2$. Le nombre de mètres carrés contenus dans le rectangle sera $7{,}3 \times 4{,}2$ ou $30{,}66$. En effet, le rectangle considéré peut être décomposé en 42 rectangles contenant chacun 73 décimètres carrés; et ainsi la surface sera 42 fois 73 ou 3066 décimètres carrés, ou $30^{m2}66$.

Ce raisonnement peut d'ailleurs se répéter, quelle que soit la fraction du mètre à laquelle s'arrête l'expression des dimensions; ainsi le théorème est vrai dans tous les cas.

Donc *l'aire d'un rectangle égale...*

254. **Scolie.** 1° *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs :*

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{b'h'}$$

2° *Deux rectangles de même base sont entre eux comme les hauteurs, et deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme les bases.*

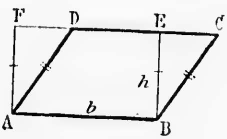
3° *L'aire d'un carré égale le produit du côté par lui-même;* car le carré est un rectangle dont les deux dimensions sont égales. De là vient l'usage d'appeler *carré d'un nombre* le produit de ce nombre par lui-même.

Proposition II. — Théorème.

255. *L'aire d'un parallélogramme égale le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit le parallélogramme ABCD.

Construisons le rectangle ABEF, qui a même base b, et même hauteur h que le parallélogramme.



AD et BC sont égaux comme côtés opposés d'un parallélogramme, AF et BE sont égaux pour la même raison; donc les triangles rectangles ADF et BCE sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un autre côté égal. Ainsi le parallélogramme ABCD équivaut au rectangle ABEF, et l'aire du parallélogramme égale, comme celle du rectangle, le produit de la base b par la hauteur h.

256. **Corollaires.** 1° *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

2° *La base supérieure d'un parallélogramme peut se mouvoir suivant sa propre direction, sans que l'aire du parallélogramme soit altérée.*

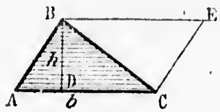
3° *Deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

4° *Deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme les hauteurs, et deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme les bases.*

Remarque. Dans un parallélogramme, on prend pour *base* un côté quelconque; et la *hauteur* est la distance de la base au côté opposé.

Proposition III. — Théorème.

257. *L'aire d'un triangle égale la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*



Soit le triangle ABC.

Menons BE parallèle à AC et CE parallèle à AB. La figure ABEC est un parallélogramme de même base et de même hauteur que le triangle donné.

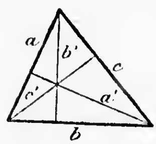
Les deux triangles ABC et BCE sont égaux comme ayant les côtés respectivement égaux (nº 90); donc l'aire du triangle ABC égale la moitié de l'aire du parallélogramme AE, et par conséquent la moitié du produit de la base b par la hauteur h.

258. **Corollaires.** 1º *Un triangle quelconque est la moitié du rectangle qui a même base et même hauteur.*

2º *Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents.*

3º *Le sommet d'un triangle peut se mouvoir parallèlement à la base, sans que l'aire du triangle soit altérée.*

4º *Deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

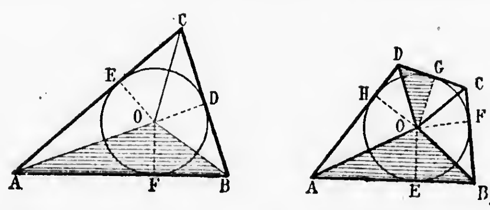


5º *Deux triangles de même base sont entre eux comme les hauteurs, et deux triangles de même hauteur sont entre eux comme les bases.*

6º *Les trois hauteurs d'un triangle sont inversement proportionnelles aux bases correspondantes;* car si l'on appelle a, b, c les trois côtés, a', b', c' les hauteurs correspondantes, on a $aa' = bb' = cc'$ (le double de la surface); donc si $a = b$, il en résulte $a' = b'$; si $a = 2b$, a' égalera $1/_2\, b'$; si $a = mb$, a' égalera $\frac{1}{m}\, b'$...

259. **Scolie.** *L'aire d'un triangle quelconque égale la moitié du produit du périmètre par le rayon du cercle inscrit;*

Et il en est de même pour tout polygone circonscrit à un cercle.

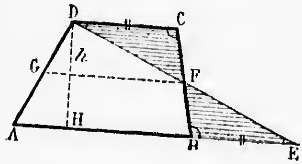


Car ces figures sont décomposables en triangles ayant tous pour hauteur le rayon du cercle inscrit, et pour bases les divers côtés.

Proposition IV. — Théorème.

260. *L'aire d'un trapèze égale le produit de la hauteur par la demi-somme des bases.*

Soit le trapèze ABCD. Prolongeons l'une des bases, AB, par exemple, d'une longueur BE égale à l'autre base CD, et menons DE.



Les triangles FBE et FCD sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux (n° 71); donc le trapèze ABCD équivaut au triangle ADE, et l'aire du trapèze égale la moitié du produit de DH par AE, soit *le produit de la hauteur par la demi-somme des bases.*

261. **Scolie.** L'égalité des deux triangles FBE et FCD montre que le point F est le milieu de BC et de DE. Et si l'on mène FG parallèle à AE, le triangle DGF sera semblable à DAE, et ses dimensions seront moitié de celles du grand triangle; ainsi FG égale la moitié de AE, ou la demi-somme des bases du trapèze.

Donc *l'aire d'un trapèze égale le produit de la hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

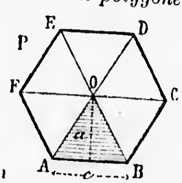
Proposition V. — Théorème.

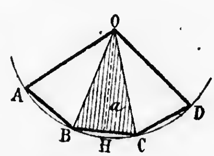
262. *L'aire d'un polygone régulier égale la moitié du produit de son périmètre par l'apothème.*

Soit P un polygone régulier quelconque; soient a l'apothème, c le côté, et n le nombre des côtés. Le périmètre sera cn.

Si l'on mène les rayons OA, OB, OC... le polygone se trouve décomposé en n triangles ayant tous un côté c pour base, et l'apothème a pour hauteur. L'aire du polygone sera donc exprimée par n fois $\frac{ac}{2}$, ou par $\frac{1}{2}\,a.cn$.

Donc *l'aire d'un polygone régulier égale...*

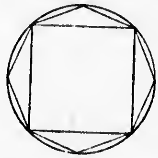




263. **Scolie.** Si l'on porte des cordes égales AB, BC, CD... sur un même arc, et si l'on joint le centre O aux points extrêmes A et D, on obtient un *secteur polygonal régulier, dont l'aire égale la moitié du produit de l'apothème* OH *par la ligne polygonale régulière* ABCD.

Proposition VI. — Théorème.

264. *L'aire du cercle égale la moitié du produit de la circonférence par le rayon.*



En effet, le cercle est la limite du polygone régulier inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment; l'apothème tend vers le rayon du cercle, et le périmètre vers la circonférence.

En appliquant à la limite la propriété du polygone, on conclut que *l'aire du cercle égale la moitié du produit du rayon par la circonférence.*

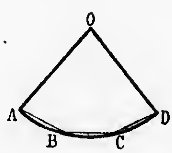
265. **Scolie.** 1° On arrive directement à la formule de l'aire du cercle en le considérant comme un *polygone régulier d'un nombre indéfini de côtés;* à ce point de vue, le cercle est décomposable en triangles infiniment petits, ayant tous le rayon pour hauteur.

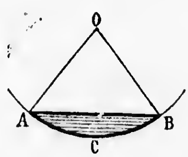
2° La circonférence ayant pour expression $2\pi r$, l'aire du cercle sera $\frac{1}{2}r.2\pi r$ ou πr^2; *ainsi l'aire du cercle s'obtient en multipliant le nombre π par le carré du rayon.*

Si l'on appelle d le diamètre, on a $r=\frac{d}{2}$, $r^2=\frac{d^2}{4}$, et l'aire du cercle est $\pi.\frac{d^2}{4}$ ou $\frac{1}{4}\pi d^2$.

3° Appelons C la circonférence; le rayon sera $\frac{C}{2\pi}$, et l'aire du cercle sera $\frac{1}{2}C\times\frac{C}{2\pi}$ ou $\frac{C^2}{4\pi}$ ou $\left(\frac{C}{2}\right)^2\times\frac{1}{\pi}$; donc *l'aire du cercle égale le nombre inverse de π, ou 0,318 21, multiplié par le carré de la demi-circonférence.*

4° *L'aire d'un secteur circulaire égale la moitié du produit de l'arc par le rayon.* Car le secteur circulaire est la limite vers laquelle tend le secteur polygonal régulier inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment; et le secteur circulaire peut lui-même être considéré comme un secteur polygonal régulier d'un nombre indéfini de côtés.





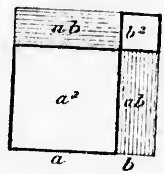
5° Soit n le nombre des degrés de l'arc d'un secteur; l'aire du cercle étant πr^2, l'aire du secteur d'un degré est $\frac{1}{360}\pi r^2$, et l'aire du secteur considéré est $\frac{n}{360}\pi r^2$.

6° *L'aire d'un segment circulaire* ABC *égale l'aire du secteur entier* AOBC *moins l'aire du triangle* AOB *qui a pour sommets les extrémités de la corde et le centre de l'arc.*

§ II. — RELATIONS ENTRE LES SURFACES

266. *Remarque.* Puisque l'aire d'un rectangle égale le produit de ses deux dimensions, et que l'aire du carré égale le produit du côté par lui-même,

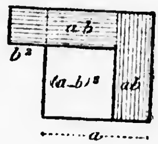
Réciproquement : *le nombre que l'on appelle produit de deux lignes exprime l'aire du rectangle qui a pour dimensions ces deux mêmes lignes ;*



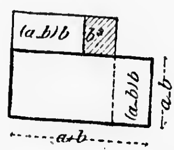
Et le nombre que l'on appelle carré d'une ligne exprime l'aire du carré construit sur cette même ligne.

D'où il suit que toutes les propriétés où il est question de carrés ou de produits de lignes, donnent lieu à une traduction en surfaces. Exemples :

Le carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes, égale la somme des carrés construits sur ces deux lignes, plus ou moins deux fois le rectangle construit avec ces mêmes lignes :

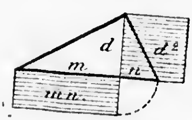


$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$



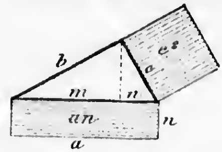
Le rectangle construit avec la somme et la différence de deux lignes, égale la différence des carrés construits sur ces mêmes lignes :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



Le carré construit sur la hauteur d'un triangle rectangle égale le rectangle construit avec les deux segments de l'hypoténuse :

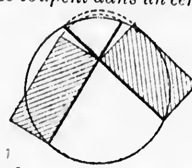
$$d^2 = mn$$



Le carré construit sur un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, égale le rectangle construit avec la projection de ce côté sur l'hypoténuse, et l'hypoténuse entière :

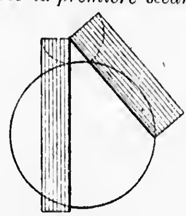
$$c^2 = an$$

Lorsque deux cordes se coupent dans un cercle, le rectangle construit



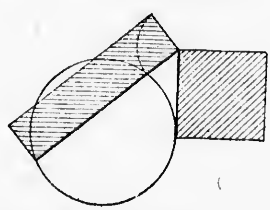
avec les deux segments de l'une égale le rectangle construit avec les deux segments de l'autre.

Lorsque deux sécantes partent d'un même point hors d'un cercle, le rectangle construit avec la première sécante et sa partie extérieure



égale le rectangle construit avec la seconde sécante et sa partie extérieure.

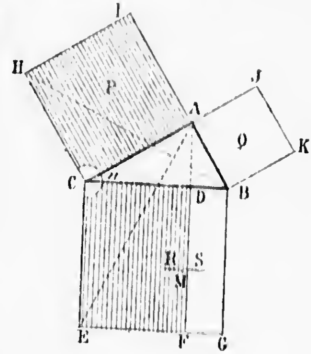
Si une tangente et une sécante partent d'un même point, le carré



construit sur la tangente égale le rectangle construit avec la sécante entière et sa partie extérieure.

Proposition VII. — Théorème de Pythagore.

267. *Le carré contruit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*



Soit le triangle rectangle ABC; et soient M, P et Q, les carrés construits sur les trois côtés. Menons ADF perpendiculaire à CB; menons aussi BH et AE, et considérons les deux triangles ACE et BCH.

Dans l'un et dans l'autre, l'angle en C se compose de l'angle n augmenté d'un angle droit; les côtés CA et CE du premier triangle égalent respectivement CH et CB du second, comme côtés des carrés P et M. Donc ces triangles sont égaux.

Le premier triangle ACE est la moitié du rectangle CEFD ou R qui a même base CE et même hauteur CD; le second triangle BCH est la moitié du carré P, qui a même base CH et même hauteur CA.

Donc le rectangle R et le carré P sont équivalents, comme ayant des moitiés égales. On prouverait de même que le rectangle S est équivalent au carré Q. On a donc R + S ou M = P + Q.

Donc *le carré construit sur l'hypoténuse...*

268. Ce théorème est une *traduction en surfaces* de la relation qui a été établie, par les triangles semblables, entre les trois côtés du triangle rectangle (nº 214).

On peut aussi traduire en surfaces les théorèmes qui expriment la relation entre les trois côtés d'un triangle quelconque (nº 216) : *Le carré construit sur un côté opposé à un angle obtus ou aigu, égale la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, plus ou moins deux fois le rectangle construit avec le second côté et la projection du troisième sur le second.*

Proposition VIII. — Théorème.

269. *Deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal.*

Soient ABC et ADF deux triangles ayant l'angle A commun. Menons CF.

Si l'on prend les bases sur la ligne AF, les deux triangles ABC et ACF ont même hauteur; ils sont donc entre eux comme leurs bases, et l'on a

$$\frac{ABC}{ACF} = \frac{AB}{AF}$$

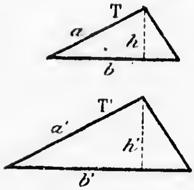
Si l'on prend les bases sur AD, les deux triangles ACF et ADF ont même hauteur; et donnent la relation $\frac{ACF}{ADF} = \frac{AC}{AD}$.

En multipliant membre à membre les deux égalités, on a $\frac{ABC \times ACF}{ACF \times ADF} = \frac{AB \times AC}{AF \times AD}$, ou, en simplifiant le premier membre, $\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AF \times AD}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc *deux triangles qui ont un angle égal...*

Proposition IX. — Théorème.

270. *Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés ou des lignes homologues.*



Soient T et T' deux triangles semblables.

Menons les hauteurs homologues h et h'. Toutes les dimensions homologues sont dans un même rapport; ainsi l'on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

et de même $\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$

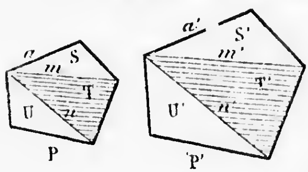
Multipliant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{bh}{b'h'} = \frac{1/_2 bh}{1/_2 b'h'} = \frac{T}{T'}$$

Donc *deux triangles semblables sont entre eux...*

Proposition X. — Théorème.

271. *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des lignes homologues.*



Soient P et P' deux polygones semblables. Décomposons ces deux polygones en triangles respectivement semblables, S et S' T et T', U et U'.

Les triangles semblables étant entre eux comme les carrés des côtés homologues, on a :

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{S}{S'} = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{T}{T'} = \frac{n^2}{n'^2} = \frac{U}{U'}$$

Donc
$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{U}{U'}$$

d'où
$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{S + T + U}{S' + T' + U'} = \frac{P}{P'}$$

Ainsi les deux polygones P et P' sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues a et a'; d'ailleurs, toutes les dimensions homologues étant dans un même rapport, il en est de même de leurs carrés.

Donc *deux polygones semblables...*

272. **Scolie.** 1° Le rapport $\frac{a^2}{a'^2}$ est le carré du rapport de similitude $\frac{a}{a'}$.

2° *Dans deux polygones semblables, toutes les surfaces partielles homologues sont dans un même rapport, qui est le carré du rapport de similitude.*

273. **Corollaire.** 1° Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les carrés des rayons ou comme les carrés des apothèmes; car ces polygones sont semblables (n° 193).

2° Deux cercles quelconques sont entre eux comme les carrés des rayons, ou comme les carrés des diamètres; car on peut appliquer aux cercles les propriétés des polygones réguliers. On a d'ailleurs identiquement, en appelant C et C' deux cercles ayant pour rayons r et r'

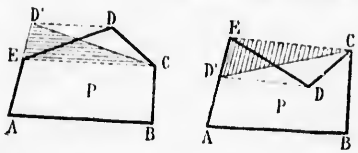
$$\frac{C}{C'} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2}$$

§ III. — CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

Problème I.

274. *Transformer un polygone donné* P *en un triangle équivalent.*

Par une diagonale CE, on isole un triangle CDE; on mène DD' parallèle à la diagonale CE, et on transporte le sommet D en D'. Le triangle CDE est remplacé par le triangle équivalent CD'E (n° 258, 2° et 3°), et le polygone a un côté de moins.

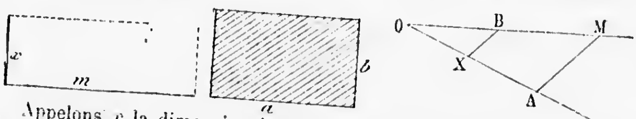


On répète cette opération jusqu'à ce que le polygone n'ait plus que trois côtés.

Dans le cas d'un angle rentrant, c'est un triangle extérieur CDE que l'on remplace par CD'E.

Problème II.

275. *Sur une droite donnée* m, *construire un rectangle équivalent à un rectangle donné* ab.



Appelons x la dimension inconnue. On doit avoir $mx = ab$; d'où

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{x}$$

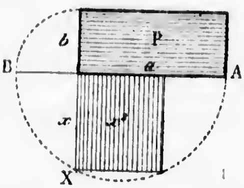
La hauteur inconnue x est donc une quatrième proportionnelle aux trois droites m, a, b.

Si la figure donnée était un carré a^2, on chercherait une troisième proportionnelle aux deux droites m et a.

Problème III.

276. *Construire un carré équivalent à une figure donnée* P.

1° Si la figure donnée est un rectangle ab, le côté x du carré équivalent doit être tel que l'on ait $x^2 = ab$, ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Il suffit donc de chercher une moyenne proportionnelle entre les deux dimensions a et b.



2° Quelle que soit la figure donnée, c'est toujours une moyenne proportionnelle qu'il faut prendre entre les deux lignes dont le produit donne l'aire de la figure, savoir :

Pour un *parallélogramme*, entre la base et la hauteur;

Pour un *triangle*, entre la base et la demi-hauteur, ou bien entre la hauteur et la demi-base;

Pour un *trapèze*, entre la hauteur et la base moyenne;

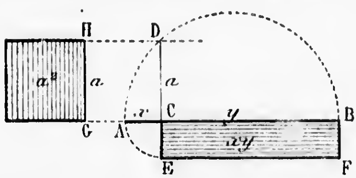
Pour un *polygone régulier* ou pour un *polygone circonscrit*, entre l'apothème et le demi-périmètre;

Pour un *cercle*, entre le rayon et la demi-circonférence.

3° S'il s'agit d'un *polygone quelconque*, on le transforme en un triangle équivalent (n° 274), et on est ainsi ramené à un cas déjà mentionné.

Problème IV.

277. *Transformer un carré donné* a^2 *en un rectangle équivalent, et tel que la somme des deux dimensions soit égale à une ligne donnée* AB.



Sur cette droite AB, on décrit une demi-circonférence; on mène en un point quelconque de cette droite une perpendiculaire GH égale au côté du carré donné; on trace ensuite HD parallèle à AB, et DC perpendiculaire à AB.

Le point C détermine les deux dimensions CA et CB, ou x et y. Car on a (nos 219, 220) : $\frac{x}{a} = \frac{a}{y}$, d'où $xy = a^2$.

278. Scolie. Le problème peut aussi être résolu par le calcul. Par

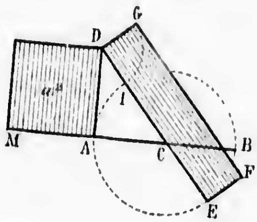
exemple, si $a^2 = 144$ et si $AB = 30$, il s'agit de trouver deux nombres dont la somme soit 30, et le produit 144, et l'on sait que les deux nombres demandés sont les racines de l'équation du second degré... $x^2 - 30x + 144 = 0$, lesquelles racines sont 24 et 6.

Réciproquement, l'équation $x^2 - 30x + 144 = 0$ se trouve résolue graphiquement par la construction ci-dessus; et toute équation analogue peut être résolue de même.

Problème V.

279. Transformer un carré donné a^2 en un rectangle équivalent, et tel que la différence des deux dimensions soit égale à une ligne donnée AB.

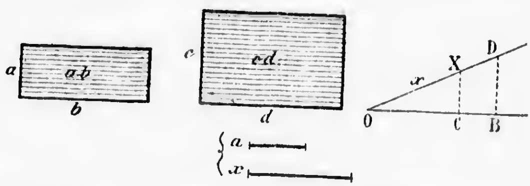
On prolonge le côté MA du carré donné, d'une longueur égale à la ligne donnée AB; sur AB comme diamètre, on décrit une circonférence; par le point D et par le centre, on mène la sécante DCE, qui sera la base du rectangle demandé; la partie extérieure DI en sera la hauteur.



Car on a : $\overline{AD}^2 = \overline{DE} \times \overline{DI}$.

Problème VI.

280. *Trouver deux droites qui soient entre elles comme deux rectangles donnés* ab *et* cd.



Prenons a pour l'une des deux droites demandées; on doit avoir $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{x}$, ou $\frac{b}{c} = \frac{d}{x}$

Ainsi la deuxième ligne demandée sera une quatrième proportionnelle aux trois lignes b, c, d...

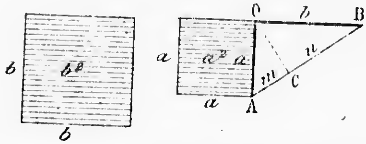
281. **Scolie.** Le même problème peut être posé pour deux figures quelconques; il suffit de considérer les deux dimensions dont le produit donne l'aire de chaque figure, comme étant les côtés d'un rectangle équivalent.

Problème VII.

282. *Trouver deux droites qui soient entre elles comme deux carrés donnés* a^2 *et* b^2.

La solution déjà indiquée pour deux rectangles est applicable au cas de deux carrés.

Mais on résout le problème d'une manière plus directe en disposant

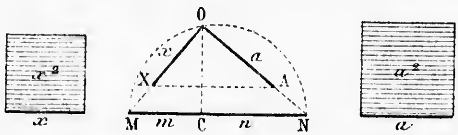


à angles droits les côtés a et b, et en menant l'hypoténuse AB, puis la hauteur OC. Les segments m et n sont entre eux comme les carrés a^2 et b^2 (n° 215).

Problème VIII.

283. *Construire un carré qui soit à un carré donné* a^2 *dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Sur une même droite MN, on porte des longueurs CM et CN égales



aux droites données m et n; sur MN comme diamètre on décrit une demi-circonférence; on mène CO perpendiculaire à MN, puis OM et ON; on porte OA égal au côté du carré donné, et l'on mène AX parallèle à MN. La longueur OX est le côté du carré demandé.

On a, en effet : $\frac{\overline{OX}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{ON}^2} = \frac{m}{n}$

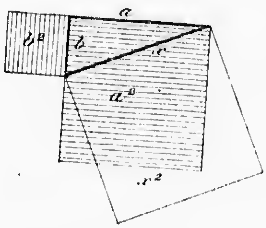
284. **Scolie.** La même construction s'applique au problème général : *Construire une figure semblable à une figure donnée, et qui soit à cette figure dans un rapport donné.* Car les figures semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.

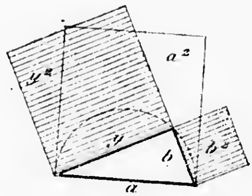
Problème IX.

285. *Construire un carré égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés* a^2 *et* b^2.

1° On construit un triangle rectangle ayant a et b pour côtés de l'angle droit; l'hypoténuse x est le côté du carré égal à la somme des carrés donnés; car $x^2 = a^2 + b^2$.

2° On construit un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse, et



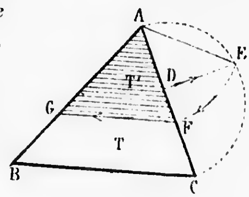


b pour l'un des côtés de l'angle droit; l'autre côté y est le côté du carré égal à la différence des carrés donnés; car $y^2 = a^2 - b^2$.

286. **Scolie.** La même construction s'applique au problème général : *Étant données deux figures semblables, construire une troisième figure semblable aux deux premières, et égale à leur somme ou à leur différence.* Car les figures semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.

Problème X.

287. *Par une parallèle à l'un des côtés d'un triangle* ABC *ou* T, *déterminer un nouveau triangle qui soit dans un rapport donné avec le triangle donné.*



Supposons que le triangle partiel T' doive être, par exemple, les $^2/_5$ du triangle donné.

Sur le côté AC, on décrit une demi-circonférence; par le point D, pris aux $^2/_5$ de AC, on mène DE perpendiculaire sur AC; du point A, on décrit l'arc EF, et l'on mène FG parallèle à BC.

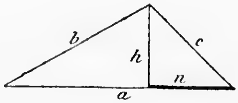
Le triangle AFG est les $^2/_5$ de ABC; car on a :

$$\frac{T'}{T} = \frac{\overline{AF}^2}{\overline{AC}^2} \text{ ou } \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{AD}{AC} \cdots = \frac{2}{5} \cdots \text{ (n}^{\text{os}}\text{ 270, 221} - 3^{\circ}\text{)}.$$

Scolie. Si l'on demandait deux parallèles à la base, menées de manière à diviser le triangle en trois parties qui fussent entre elles comme trois nombres quelconques, 5, 3, 7, par exemple, on ferait une première construction, pour avoir un triangle partiel égal aux $^5/_{15}$ ou au $^1/_3$ du triangle total; puis une seconde construction, indépendante de la première, pour obtenir un triangle partiel égal aux $^8/_{15}$ du triangle donné.

Problème XI.

288. *Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés,* a, b, c.



1° Posons... $a+b+c=2p.$

Si l'on retranche $2c$, il vient $a+b-c=2p-2c=2(p-c)$

De même $a-b+c=2(p-b)$

Et $-a+b+c=2(p-a)$

2°. On a la relation (n° 216) $b^2=a^2+c^2-2an$

De là on tire $n=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ et $n^2=\dfrac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$

On a aussi $h^2=c^2-n^2=\dfrac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$

3° L'aire du triangle a pour expression... $S=\frac{1}{2}ah,$
d'où $2S=ah,$ $4S^2=a^2h^2,$ et $16S^2=4a^2h^2.$

Si l'on remplace h^2 par l'expression trouvée plus haut, il vient :

$$\begin{aligned}16S^2 &= (2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2\\ &= (2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)\\ &= [(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]\\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)\\ &= 2p.\,2(p-b).\,2(p-c).\,2(p-a)\end{aligned}$$

Divisons par 16 de part et d'autre, il vient :

$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$; d'où $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Les diverses transformations qui viennent de se présenter sont des applications faites à propos, des formules relatives au carré d'une somme ou d'une différence, et au produit de la somme de deux quantités par leur différence (211).

Scolie. 1° Si le triangle est équilatéral, on a $2p=3a$, d'où $p=\dfrac{3a}{2}$

$p-a=p-b=p-c=\dfrac{a}{2}$; et $S=\sqrt{\dfrac{3a}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3}=\sqrt{\dfrac{3a^4}{16}}=\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$

2° L'aire de l'hexagone régulier en fonction du côté a est

$$S=\frac{6a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$

EXERCICES SUR LE LIVRE IV

Théorèmes à démontrer.

Évaluation des surfaces. — 1. L'aire d'un trapèze égale le produit de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé.

2. L'aire d'un quadrilatère quelconque égale le produit d'une diagonale par la demi-somme des perpendiculaires abaissées des sommets opposés.

3. L'aire d'une couronne polygonale régulière égale la demi-somme des deux périmètres multipliée par la différence des deux apothèmes.

4. L'aire d'une couronne circulaire égale la demi-somme des deux circonférences multipliée par la différence des deux rayons.

5. L'aire d'une couronne circulaire égale l'aire du cercle qui a pour diamètre la corde menée dans le grand cercle tangentiellement au petit.

6. L'aire d'un secteur régulier de couronne polygonale égale la demi-somme des lignes brisées multipliée par la différence des deux apothèmes.

7. L'aire d'un secteur de couronne circulaire égale la demi-somme des deux arcs multipliée par la différence des rayons.

8. Démontrer directement que deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. En conclure la formule de l'aire du rectangle.

9. Toute droite menée d'une base à l'autre d'un trapèze par le milieu de la base moyenne, divise la figure en deux trapèzes équivalents.

10. Établir la formule de l'aire du trapèze en le considérant comme la différence de deux triangles.

11. La droite indéfinie menée par les milieux des bases d'un trapèze passe au point de concours des côtés non parallèles.

12. Le parallélogramme qui a pour sommets les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, est la moitié de ce quadrilatère.

13. Les droites menées des sommets d'un triangle au point de concours des médianes, divisent ce triangle en trois triangles équivalents.

Relations entre les surfaces. — 14. Par un point O pris à volonté dans un triangle quelconque ABC, on mène des droites AOD, BOE, COF, passant par les sommets. Démontrer que l'on a : $\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$.

15. P, Q, R, étant des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle : 1° chacun des trois triangles que l'on obtient en joignant les sommets extérieurs des carrés est équivalent au triangle rectangle primitif; 2° la somme des carrés des côtés de l'hexagone obtenu égale huit fois le carré de l'hypoténuse.

16. *Lunules d'Hippocrate.* — Si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle pris comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, la somme des surfaces des deux croissants compris entre les demi-circonférences est équivalente à la surface du triangle rectangle.

17. On donne un demi-cercle ayant AB pour diamètre; d'un point C, pris sur ce diamètre, on élève une perpendiculaire CM jusqu'à la circonférence, et on décrit deux demi-circonférences ayant AC et CB pour diamètres. Démontrer que le demi-cercle AB diminué des demi-cercles AC et CB, égale la surface du cercle ayant CM pour diamètre.

18. On prend un point C au tiers du diamètre AB d'un cercle, et l'on décrit sur AC et CB comme diamètres, des demi-circonférences situées de côtés différents du diamètre AB. Démontrer que la courbe ACB divise le cercle primitif

en deux parties qui sont dans le rapport de 1 à 2. Démontrer que si le point C divisait le diamètre en moyenne et extrême raison, le cercle primitif serait lui-même divisé en moyenne et extrême raison.

19. La projection d'une droite sur un axe égale la longueur absolue de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle que fait cette droite avec l'axe.

20. L'aire d'un triangle égale la moitié du produit de deux côtés quelconques et du sinus de l'angle compris.

21. Dans un triangle rectangle, 1° un côté quelconque de l'angle droit égale l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle aigu adjacent; 2° un côté quelconque de l'angle droit égale l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé, ou par la cotangente de l'angle aigu.

22. Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés.

23. Le carré d'un côté quelconque d'un triangle égale la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de ces deux côtés, et du cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

24. Dans un triangle, la somme de deux côtés quelconques est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

25. *Théorème de Varignon.* — Si l'on considère deux côtés consécutifs AB et AD d'un parallélogramme, la diagonale comprise AC, et un point quelconque O pris dans le plan du parallélogramme, le produit de la diagonale par sa distance au point O, égale la somme des produits des deux côtés AB et AD par leurs distances respectives à ce même point O.

26. Le produit des trois côtés d'un triangle égale sa surface multipliée par le double du diamètre du cercle circonscrit.

27. Deux polygones quelconques circonscrits à un même cercle sont entre eux comme leurs périmètres.

Problèmes.

1. Quel côté faut-il donner à une table carrée pour que sa surface soit égale à celle d'une autre table qui a 2^m25, sur 0^m80?

2. Les deux dimensions d'un champ rectangulaire sont entre elles comme les nombres 2 et 5, et la surface est de 4 ares 225. Quelle sont ces dimensions?

3. Construire un rectangle tel que la différence entre la base et la hauteur soit de 1 mètre, et la surface de 1 mètre carré.

4. L'aire d'un trapèze est de 144 mètres carrés; la hauteur est de 8 mètres, et la droite qui joint les milieux des diagonales a 2 mètres. Quelles sont les deux bases?

5. Calculer l'aire d'un hexagone régulier de 1 mètre de côté.

6. Quel côté faut-il donner à un bassin hexagonal régulier pour que sa surface soit de 100 mètres carrés?

7. Calculer l'aire du carré inscrit dans un cercle de 1 mètre carré de surface.

8. Quel est le côté du carré inscrit dans un cercle de 1 mètre de circonférence?

9. Calculer l'aire d'un terrain triangulaire dont les côtés ont respectivement 120^m, 98^m, et 75 mètres.

10. Étant donné un cercle de 1 mètre de rayon, quel nouveau rayon faut-il prendre pour que la circonférence décrite du même centre divise le premier cercle en deux parties équivalentes? Quel rayon faudrait-il prendre si l'on voulait que ce premier cercle fût divisé en moyenne et extrême raison?

11. Quel est le rayon d'un secteur de 18°, si la surface est de 18 centimètres carrés?

12. L'aire d'un secteur est de 12 mètres carrés, et le rayon de 4^m60. On demande le nombre de degrés de l'arc.

13. La rotonde du panorama des Champs-Élysées, à Paris, a 55 mètres de diamètre. Quelle est la surface occupée par cet édifice?

14. Quelle est la surface d'un bassin circulaire qui a 42 mètres de tour?

15. Quelle est la surface du cercle inscrit dans un triangle équilatéral ayant lui-même 1 mètre carré de surface?

16. Quelle est la circonférence du cercle qui a 1 mètre carré de surface?

17. Quelle est l'aire du cercle qui a 1 mètre de circonférence?

18. Deux cercles concentriques ont respectivement pour rayons 6 et 10 mètres. Quelle est l'aire de la couronne comprise?

19. La surface d'une couronne circulaire est de 1 mètre carré, et la distance des deux circonférences est de $0^{m}25$. Quels sont les rayons des deux circonférences?

20. Le plan d'une propriété est dessiné à l'échelle de 1 millimètre pour mètre. Que sont les surfaces du dessin par rapport aux surfaces réelles?

21. Dans un cercle de 1 mètre de rayon, on dessine un secteur de 60 degrés. On veut transformer ce secteur en un triangle équivalent ayant 1 mètre de hauteur. Quelle sera la base de ce triangle?

22. Construire une figure qui donne les côtés des carrés équivalents à 2 fois, 3 fois, 4 fois, etc..., un carré donné.

23. Deux carrés ont respectivement 3 mètres et 4 mètres de côté. Calculer le côté du carré égal à leur somme, et celui du carré égal à leur différence.

24. Le côté d'un hexagone régulier est de 9 mètres. Quel sera le côté d'un autre hexagone régulier dont l'aire doit être les $4/9$ de l'aire du premier?

25. L'aire d'un terrain rectangulaire est de 58 ares 835, et son périmètre est de 365 mètres. Quelles sont ses dimensions?

26. Un terrain rectangulaire de 17 ares a 43 mètres de plus en longueur qu'en largeur. Quelles sont ses dimensions?

27. Dans les débris d'une enceinte circulaire, on a mesuré une corde de $12^{m}50$, et sa flèche de $2^{m}75$. Quelle était la surface du cercle entier?

28. Sur un des côtés d'un angle quelconque O, on porte une longueur OU de 1 centimètre que l'on prend pour unité. On porte sur l'autre côté une longueur OA représentant un nombre quelconque a. On trace UA et l'on reproduit l'angle OUA en OAB par la droite AB qui rencontre l'autre côté en B; à ce point on fait encore un angle égal à l'angle U, et ainsi de suite. On demande d'exprimer les longueurs OB, OC, OD, OE.... en fonction du nombre a.

29. Les trois hauteurs d'un triangle ont respectivement 12, 15 et 20 mètres. Calculer l'aire de ce triangle.

30. Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des trois hauteurs.

31. Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs.

32. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence du côté et de la diagonale.

33. Par un point donné dans un cercle, mener une corde telle que le secteur correspondant à l'arc sous-tendu soit les $5/12$ du cercle entier.

34. Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface.

35. Inscrire un carré dans un triangle équilatéral.

36. Le côté d'un triangle équilatéral est a. Exprimer en fonction de a la surface du carré inscrit dans ce triangle.

37. Sur une droite quelconque on marque deux points A et B distants de 12 mètres. Décrire deux cercles tangents à la droite en A et B, et tangents entre eux, et tels que la somme des aires de ces cercles soit de $232^{m2}50$.

38. Calculer l'aire d'un trapèze en fonction des quatre côtés.

39. La grande diagonale d'un losange a $1^{m}90$ et la petite diagonale est égale au côté. On demande l'aire du losange.

40. Étant donné un carton carré d'un mètre de côté, que faut-il enlever aux quatre coins pour obtenir un octogone régulier?

41. Quel est le côté d'un octogone régulier d'un mètre carré de surface?

42. Les trois côtés d'un triangle sont donnés : $a = 26^m$, $b = 17^m$, $c = 12^m$. Calculer l'aire d'un triangle qui aurait pour côtés les trois hauteurs de ce triangle, ou les trois médianes, ou les trois bissectrices, ou les trois distances des côtés au centre du cercle circonscrit.

43. Exprimer en fonction du côté les aires des polygones réguliers de 6, 12, 8, 10, 5 et 15 côtés.

44. Exprimer en fonction du rayon les aires des polygones réguliers de 6, 12, 8, 10, 5 et 15 côtés.

45. Diviser en parties équivalentes ou dans un rapport donné : 1° un triangle par des droites partant du sommet; — 2° un parallélogramme par des parallèles aux côtés; — un trapèze par des droites joignant les deux bases.

46. Par des parallèles à l'un des côtés d'un triangle, diviser ce triangle en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2, 3, 7.

47. Aux bases d'un trapèze, mener une parallèle qui divise ce trapèze dans un rapport donné.

48. Par un point donné sur le périmètre d'un triangle, mener une droite qui divise ce triangle en deux parties équivalentes.

49. Diviser un triangle en trois parties équivalentes par des droites partant de deux points donnés sur le périmètre.

50. Diviser un quadrilatère en deux parties équivalentes par une droite partant d'un point donné sur le périmètre.

51. Diviser un polygone quelconque en deux parties équivalentes, ou dans un rapport donné, par une droite partant d'un point donné sur le périmètre.

52. D'un point P donné dans une figure quelconque, mener des droites qui divisent cette figure en deux parties équivalentes, ou en deux parties qui soient dans un rapport donné.

53. D'un point P donné dans une figure quelconque, mener des droites qui divisent cette figure en 3, 4, 5.... parties équivalentes, ou en parties qui soient dans un rapport donné.

54. Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une droite perpendiculaire à la base.

55. Diviser un trapèze donné en trois parties équivalentes par des droites parallèles à l'un des côtés non parallèles.

56. Étant donné un point dans l'ouverture d'un angle aigu, construire un triangle ayant l'un des sommets au point donné, et les deux autres sommets sur les deux côtés de l'angle, de manière que le périmètre du triangle soit minimum.

57. On prolonge deux côtés d'un triangle donné au-dessous de la base, de manière que la somme des prolongements soit égale à cette base. Dans quel cas la droite qui joindra les extrémités du prolongement sera-t-elle un minimum ?

58. Étant donné un triangle, trouver sur l'un des côtés le point pour lequel la somme des distances aux deux autres côtés est un minimum.

59. Si un point M se meut sur le diamètre d'un cercle, les deux segments qu'il détermine font une somme constante; mais le produit de ces deux segments varie. Quand est-ce que ce produit sera maximum ?

60. Si une corde MN tourne autour d'un point fixe O, la longueur de cette corde varie, mais le produit des deux segments OM et ON est constant. Quand est-ce que cette corde mobile est au maximum de sa longueur ? Quand est-elle au minimum ?

61. Démontrer que toute figure non convexe peut être transformée en une autre isopérimètre et de surface plus grande.

62. De tous les rectangles isopérimètres, quel est le plus grand ?

63. De tous les rectangles équivalents, quel est celui qui a le plus petit périmètre ?

64. De tous les triangles isopérimètres, quel est le plus grand en surface?

65. De tous les triangles ayant même surface, quel est celui qui a le plus petit périmètre?

66. De tous les polygones réguliers isopérimètres, mais d'un nombre inégal de côtés, quel est le plus grand? — Conclure que le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre.

67. De deux polygones réguliers équivalents, mais d'un nombre inégal de côtés, quel est celui qui a le plus petit périmètre?

68. De tous les triangles formés avec deux côtés donnés et un troisième pris à volonté, quel est le plus grand?

69. A un triangle donné, circonscrire le triangle équilatéral maximum.

70. Quel est le plus grand des triangles qui ont même base et même angle opposé à cette base?

71. Inscrire dans un cercle le rectangle maximum.

72. Construire une figure semblable à une figure donnée, et équivalente à une autre figure donnée.

73. Étant donnés le rayon r d'un cercle, et le côté a d'un polygone régulier de n côtés, exprimer l'aire de ce polygone, puis l'aire du polygone régulier inscrit de $2n$ côtés. Appliquer les formules au cas de $n = 6$.

74. Exprimer le côté, le périmètre et la surface de l'hexagone régulier circonscrit à un cercle dont le rayon est r; puis le côté, le périmètre et la surface du dodécagone régulier circonscrit au même cercle.

75. Étant données les aires p et P de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, exprimer les aires des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.

76. Appliquer au calcul du nombre π les formules du problème précédent, en partant des carrés inscrit et circonscrit à un cercle de 1 mètre de rayon.

77. Étant donnés l'apothème a et le rayon r d'un polygone régulier quelconque, exprimer l'apothème a' et le rayon r' du polygone régulier équivalent, qui a un nombre double de côtés.

78. Appliquer au calcul du nombre π les formules du problème précédent, en partant du carré qui a 1 mètre de côté.

LIVRE V

GÉNÉRALITÉS SUR LES DROITES ET LES PLANS

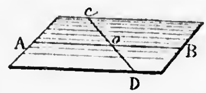
§ I. — DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

289. **Axiome.** On peut concevoir une infinité de plans passant par un point donné dans l'espace, ou par deux points, ou par une droite : une porte qui tourne sur ses gonds peut occuper une infinité de positions.

Proposition I. — Théorème.

290. *Par deux droites qui se coupent, on peut faire passer un plan, et un seul.*

Soient AB et CD deux droites qui se coupent au point O.



Par la droite AB, on conçoit un plan mobile, pouvant tourner autour de cette droite. Parmi toutes les positions que ce plan peut occuper, il y en a une, et une seule évidemment, dans laquelle ce plan passera par un point quelconque D, pris sur la seconde droite en dehors du point O.

La droite CD, ayant alors deux de ses points dans le plan, y sera tout entière, et les deux droites déterminent le plan. Donc...

291. **Corollaire.** Un plan est déterminé :

1° *Par deux droites qui se coupent* (n° 290);
2° *Par une droite et un point pris hors de cette droite;*
3° *Par trois points non en ligne droite, ou par un triangle;*
4° *Par deux parallèles* (n° 62).

Les trois derniers cas se déduisent du premier.

Proposition II. — Théorème.

292. *L'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

En effet, par trois points non en ligne droite on ne peut faire passer qu'un plan; ainsi deux plans distincts ne peuvent se rencontrer que suivant une ligne droite.

293. **Définitions.** Une droite est *perpendiculaire* à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener par son pied dans ce plan.

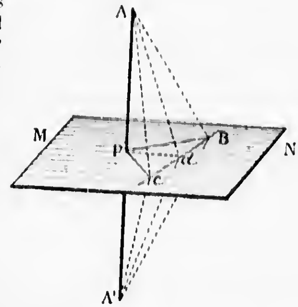
Alors le plan est *perpendiculaire* à la droite.

Une *oblique* à un plan est une droite quelconque qui rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.

Proposition III. — Théorème.

294. *Toute droite perpendiculaire à deux autres droites menées par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.*

Soit la droite AB perpendiculaire aux deux droites PB et PC menées par son pied dans le plan MN. Il suffit de prouver que cette droite AP est aussi perpendiculaire à toute autre droite PD menée par son pied dans le plan MN.



Prolongeons AP d'une longueur PA' égale à PA, et joignons les points A et A' aux points B, C, D.

La droite BP étant perpendiculaire au milieu de AA', on a

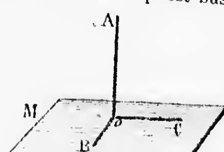
$$BA = BA'$$

De même $CA = CA'$, et les deux triangles BCA et BCA' sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux; donc leurs angles en B sont égaux.

Dès lors les deux triangles BDA et BDA' sont égaux comme ayant en B un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; et par suite $DA = DA'$.

Donc le triangle ADA' est isocèle, et la médiane DP est perpendiculaire à la base AA'. La droite AP est donc perpendiculaire à PD, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Remarque. C'est sur ce théorème qu'est basé l'usage de l'*équerre à*



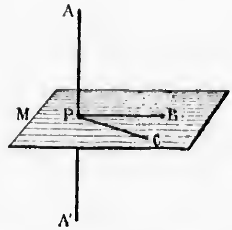
trois branches pour mener des perpendiculaires aux plans; chaque branche est perpendiculaire au plan des deux autres.

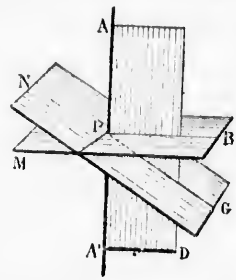
Proposition IV. — Théorème.

295. *Par un point donné, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite donnée, et on ne peut en mener qu'un.*

1° Si le point donné P est sur la droite AA', on mène par ce point, et dans des directions différentes, deux perpendiculaires PB et PC à la droite AA'. Cette droite AA' est perpendiculaire au plan M déterminé par les deux droites PB et PC (n° 294), et le plan M est, à son tour, perpendiculaire à la droite AA'.

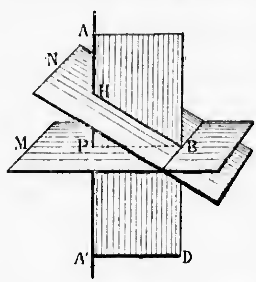
Ce plan est le seul que l'on puisse mener perpendiculairement à AA' par le point P ; car si l'on en supposait un second NG (2e figure), on





mènerait par AA' un plan quelconque AD, dont les intersections PB et PG avec les plans M et N seraient perpendiculaires à AA', ce qui est impossible (nº 22).

2º Supposons que le point soit donné hors de la droite, et soit B ce point (1re figure). Menons BP perpendiculaire à AA', puis dans une autre direction, menons PC perpendiculaire à AA'. Le plan M déterminé par les deux droites PB et PC est perpendiculaire à la droite AA', puisque cette droite est perpendiculaire aux deux droites PB et PC menées par son pied dans ce plan (nos 293 et 294).



Ce plan est le seul que l'on puisse mener perpendiculairement à AA' par le point B ; car si l'on en supposait un second BN, on pourrait mener par AA' un plan quelconque AD, dont les intersections BP et BH avec les plans M et N seraient perpendiculaires à AA', ce qui est impossible (nº 36). Donc...

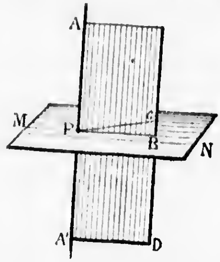
Proposition V. — Théorème.

296. *Les perpendiculaires menées dans tous les sens en un même point d'une droite donnée, sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite.*

Soit MN un plan mené par le point P perpendiculairement à la droite AA'.

Si l'on supposait qu'une droite PC, menée par le point P perpendiculairement à AA', fût en dehors du plan MN, on mènerait, par les droites AA' et PC, le plan AD, dont l'intersection avec MN serait une droite PB différente de PC.

AP, perpendiculaire au plan MN, l'est aussi à la droite PB menée dans ce plan. Il y aurait donc, sur un même plan AD, deux perpen-



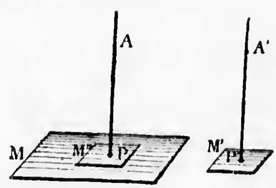
diculaires PB et PC en un même point P de la droite AA', ce qui est impossible. Donc...

297. **Scolie.** *Le plan indéfini mené perpendiculairement au milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.*

Proposition VI. — Théorème.

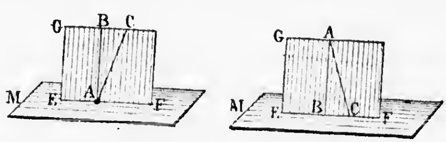
298. *Par un point donné, on peut mener une droite perpendiculaire à un plan, et on ne peut en mener qu'une.*

Soit M le plan donné; le point pourra être donné sur le plan, en P par exemple, ou hors du plan, en A.



1° Prenons un plan auxiliaire M', avec une droite A'P' perpendiculaire à ce plan, et transportons le plan M' sur le plan M, en faisant glisser M' de telle sorte que la droite A'P' passe par le point donné, P ou A. Alors A'P' transportée en AP, sera perpendiculaire au plan M.

2° On ne peut supposer, par le même point A, deux droites AB et AC perpendiculaires au plan M; car si l'on mène, par ces deux droites,



le plan GF, chacune des deux droites AB et AC serait perpendiculaire à la droite EF, ce qui est impossible. Donc...

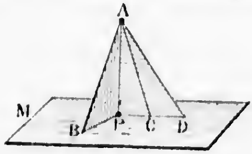
Proposition VII. — Théorème.

299. *Si d'un point pris hors d'un plan, on mène à ce plan une perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales;*

3° *De deux obliques, la plus longue est celle dont le pied s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.*



1° Soit AP une perpendiculaire, et AB une oblique; AP perpendiculaire au plan M, l'est aussi à la droite PB menée par son pied dans ce plan; donc le triangle APB est rectangle en P, et AP est plus petit que AB.

2° Soient les obliques AB et AC telles que l'on ait $PB = PC$; les triangles rectangles APB et APC sont égaux comme ayant en P un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; donc $AB = AC$...

3° Soient deux obliques AB et AD telles que l'on ait $PB < PD$; si l'on prend PC égal à PB, l'oblique AC est égale à AB; mais AC est plus petit que AD; donc $AB < AD$... Donc...

300. **Corollaires.** 1° *Si deux obliques partant d'un même point sont égales, leurs pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire;*

2° *Si deux obliques partant d'un même point sont inégales, le pied de la plus longue est plus éloigné du pied de la perpendiculaire;*

3° *D'un point à un plan, on peut mener un nombre indéfini d'obliques égales, et le lieu des pieds de ces obliques est une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire;*

4° *Les obliques égales menées d'un même point font des angles égaux avec la perpendiculaire qui part de ce même point;*

5° *La distance d'un point à un plan est donnée par la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan;*

6° *La plus courte ligne possible d'un point à un plan est perpendiculaire à ce plan.*

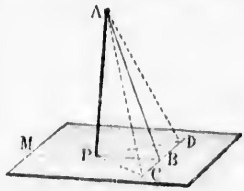
Proposition VIII. — Théorème des trois perpendiculaires.

301. *Étant données : une première droite AP perpendiculaire à un plan M, une seconde droite PB menée dans le plan par le pied de la première, et une troisième droite CD menée dans le plan perpendiculairement à la seconde;*

*Si l'on joint un point quelconque de la première ligne au point de rencontre des deux autres, la droite AB ainsi menée est perpendiculaire à la troisième ligne donnée CD *.*

* En supprimant les lettres, on aura un énoncé général qu'il est bon de retenir.

Portons des distances égales BC et BD, et joignons les points A et P aux points C et D.



Dans la figure CPD, les obliques PC et PD sont égales; donc les obliques AC et AD le sont aussi; le triangle CAD est donc isocèle, et la médiane AB est perpendiculaire à la base CD, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

§ II. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES

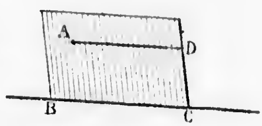
302. **Définitions.** Une *droite* et un *plan* sont *parallèles* lorsque, prolongés indéfiniment, ils ne peuvent se rencontrer.

Deux plans sont *parallèles* lorsque, prolongés indéfiniment, ils ne peuvent se rencontrer.

Il résulte de ces définitions que *si deux plans sont parallèles, toute droite tracée sur l'un de ces deux plans est parallèle à l'autre plan.*

Proposition IX. — Théorème.

303. *Par un point donné dans l'espace, on peut mener une parallèle à une droite donnée, et on ne peut en mener qu'une.*

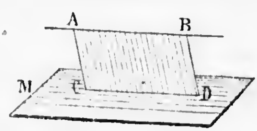


Soit A le point donné, et BC la droite donnée; le point A et la droite déterminent le plan BD; or, dans ce plan, on peut mener, par le point A, une parallèle à BC, et l'on ne peut en mener qu'une. Donc...

Proposition X. — Théorème.

304. *Si deux droites sont parallèles, tout plan mené par l'une de ces droites est parallèle à l'autre.*

Soient les parallèles AB et CD, et soit M un plan quelconque mené par la droite CD. Il faut prouver que la droite AB ne peut rencontrer le plan M.



D'après la définition des lignes parallèles, les droites AB et CD appartiennent à un même plan AD. Prolongée indéfiniment, la droite AB ne pourrait sortir du plan AD; cette droite ne pourrait donc rencontrer le plan M sans rencontrer en même temps la droite CD, ce qui est impossible. Donc...

305. **Corollaire.** *Par un point donné dans l'espace, on peut concevoir une infinité de plans parallèles à une droite donnée.*

Proposition XI. — Théorème.

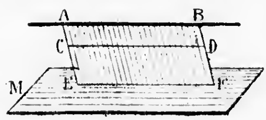
306. *Si une droite et un plan sont parallèles, tout autre plan mené par la droite coupera le premier plan suivant une parallèle à la droite donnée.* (Figure ci-dessus.)

Soit la droite AB parallèle au plan M, et soit AD un plan quelconque mené par la droite et rencontrant le plan M suivant CD. Prouvons que les deux droites AB et CD sont parallèles.

Ces deux droites AB et CD sont dans un même plan AD; et la droite AB ne pourrait rencontrer CD sans rencontrer en même temps le plan M auquel elle est parallèle. Donc.

Proposition XII. — Théorème.

307. *Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une d'elles est parallèle à l'autre.*

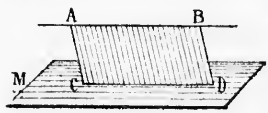


Soient les deux parallèles AB et CD, et soit M un plan parallèle à AB. Il faut prouver que ce plan est parallèle à CD.

Par les deux parallèles données, menons le plan AF; l'intersection EF est parallèle à la droite AB (n° 306); or, dans un même plan, deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles (n° 67, 2°); donc EF est parallèle à CD, et le plan M, qui contient la droite EF, est aussi parallèle à CD (n° 304). Donc...

Proposition XIII. — Théorème.

308. *Étant donnés une droite et un plan parallèles, si l'on mène une parallèle à la droite par un point quelconque du plan, la ligne ainsi tracée sera tout entière dans le plan.*



Soit la droite AB parallèle au plan M, et soit C un point quelconque de ce plan.

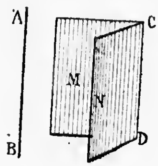
Par la droite AB et par le point C, menons le plan ABC; l'intersection CD des deux plans est parallèle à la droite AB (n° 306); or, par le point C, il ne peut y avoir qu'une seule parallèle à la droite AB (n° 303). Donc la droite menée par le point C parallèlement à AB est tout entière dans le plan M, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Proposition XIV. — Théorème.

309. *Toute droite parallèle à deux plans qui se coupent, est aussi parallèle à leur intersection.*

Soit la droite AB parallèle à chacun des plans M et N. Il faut prouver que l'intersection CD de ces deux plans est parallèle à AB.

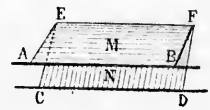
Si par un point quelconque C pris sur l'intersection des deux plans, on mène une droite parallèle à AB, cette droite se trouve tout en-



tière dans chacun des deux plans M et N, et ainsi cette droite se confond avec l'intersection CD. Donc...

Proposition XV. — Théorème.

310. *Lorsque deux plans quelconques menés par deux droites parallèles, se rencontrent, leur intersection est parallèle à ces deux droites.*



Soient les deux plans M et N, menés par les droites parallèles AB et CD; démontrons que leur intersection EF est parallèle aux deux droites AB et CD.

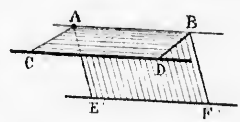
Les deux droites AB et CD étant parallèles, chacune d'elles est parallèle au plan mené par l'autre (n° 304); ainsi la droite AB est parallèle au plan N; donc le plan M mené par AB coupe l'autre plan suivant une droite parallèle à AB (n° 306).

Pour la même raison CD est parallèle à EF. Donc...

Proposition XVI. — Théorème.

311. *Deux droites parallèles à une troisième dans l'espace sont parallèles entre elles.*

Soient AB et CD deux droites parallèles à EF; nous allons prouver que ces deux droites AB et CD sont parallèles entre elles.

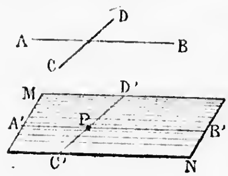


Prenons sur la première droite un point quelconque A; menons un plan AD par la droite CD et par le point A, et un autre plan AF par la droite EF et par le même point A.

Les deux droites CD et EF étant parallèles, l'intersection des deux plans AD et AE est parallèle à chacune des droites CD et EF (n° 310); mais la droite AB est donnée parallèle à EF; donc l'intersection des plans AD et AF se confond avec AB (n° 303); ainsi cette droite AB est parallèle à CD, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Proposition XVII. — Problème.

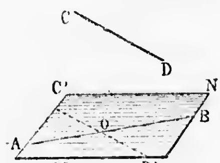
312. *Par un point donné mener un plan parallèle à deux droites données.*



Soit P le point donné, et soient AB et CD les deux droites données; pour plus de généralité supposons que ces droites ne se coupent pas.

Par le point P, on peut mener les droites A'B' et C'D' respectivement parallèles aux droites données AB et CD (nº 303); or si deux droites sont parallèles, tout plan mené par l'une d'elles est parallèle à l'autre (nº 307); donc le plan MN, déterminé par les droites A'B' et C'D', est parallèle à chacune des droites AB et CD...

Proposition XVIII. — Problème.



313. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Soit à mener, par la droite AB, un plan parallèle à la droite CD.

Par un point quelconque O, pris sur AB, menons C'D' parallèle à CD; le plan MN déterminé par les deux droites AB et C'D' est parallèle à CD (nº 307)...

Scolie. L'*angle de deux droites* qui ne se rencontrent pas est l'angle formé par l'une de ces droites, et une parallèle menée à l'autre par un point quelconque de la première. L'angle AOC' est l'angle des deux droites AB et CD.

Proposition XIX. — Théorème.

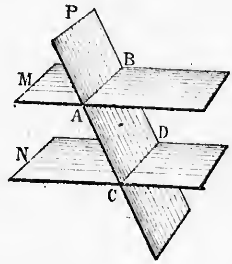
314. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Soient M et N deux plans perpendiculaires à la droite AB.

Si l'on suppose que ces plans se rencontrent, il y aura, par un même point O, pris sur leur intersection, deux plans distincts OM et ON perpendiculaires à une même droite AB, ce qui est impossible (nº 295). Donc...

Proposition XX. — Théorème.

315. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les intersections sont parallèles.*



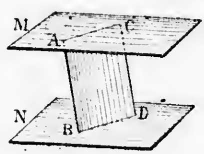
Soient M et N deux plans parallèles coupés par un troisième plan P; il faut prouver que les intersections AB et CD sont parallèles.

Ces droites AB et CD sont dans un même plan P, et, de plus, elles appartiennent aux deux plans M et N qui sont donnés parallèles, donc elles ne peuvent se rencontrer.

Donc...

Proposition XXI. — Théorème.

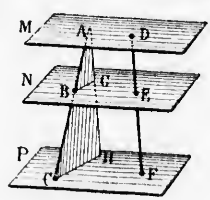
316. *Deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*



Soient AB et CD deux droites parallèles comprises entre les plans parallèles M et N.

Ces deux droites déterminent un plan AD, dont les intersections AC et BD avec les deux autres plans sont parallèles (nº 315); la figure ABDC est donc un parallélogramme, et l'on a $AB = CD$. Donc...

317. **Scolie.** *Deux droites quelconques* AC *et* DF *comprises entre trois plans parallèles* M, N, P, *sont divisées dans un même rapport.* Car si l'on mène AH parallèle à DF, on a



$$AG = DE, \quad GH = EF \text{ (nº 316)};$$

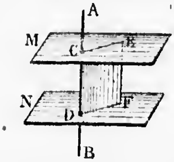
or dans le triangle ACH, les lignes BG et CH sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles N et P par un troisième plan ACH; on a donc

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BC}{GH}, \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Proposition XXII. — Théorème.

318. *Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Soient M et N deux plans parallèles, et soit AB une droite perpendiculaire au premier plan M. Pour démontrer que cette droite AB est perpendiculaire au plan N, il suffit de prouver que AB est perpendiculaire à toute droite DF menée de son pied dans le plan N.

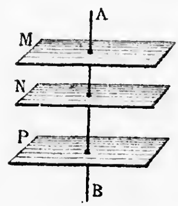


Par les droites AB et DF, menons le plan CF; les intersections CE et DF sont parallèles (n° 315); la droite AB, perpendiculaire au plan M, l'est aussi à la droite CE menée par son pied dans ce plan, et par suite à la droite DF parallèle à CE.

Le même raisonnement peut se répéter pour toute autre position de la droite DF; donc AB est perpendiculaire au plan N, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Corollaire. *Les perpendiculaires comprises entre deux plans parallèles sont égales, et mesurent la distance des deux plans.*

Proposition XXIII. — Théorème.



319. *Deux plans parallèles chacun à un troisième sont parallèles entre eux.*

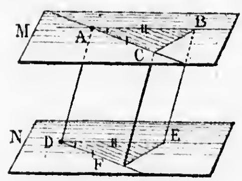
Soient les deux plans M et N, parallèles chacun au plan P. Si l'on mène une droite AB perpendiculaire au plan P, cette droite est aussi perpendiculaire aux plans M et N (n° 318).

Les deux plans M et N sont donc perpendiculaires à une même droite AB, et par conséquent parallèles entre eux (n° 314).

Proposition XXIV. — Théorème.

320. *Deux angles qui ont les côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles.*

1° Soient A et D deux angles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun.



Portons sur les côtés des longueurs égales AB et DE, AC et DF.

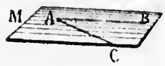
Les quadrilatères AE et AF sont des parallélogrammes, chacun d'eux ayant des côtés opposés égaux et parallèles; ainsi AD est égal et parallèle à BE, et à CF; donc le quadrilatère CE est lui-même un parallélogramme, et BC égale EF.

Dès lors, les triangles ABC et DEF sont égaux comme ayant les côtés respectivement égaux, et l'angle A de l'un égale l'angle D de l'autre, ce qu'il fallait démontrer.

Si, avec l'angle D, on prend l'un des angles obtus formés en A, les deux angles considérés sont supplémentaires.

2° Soit M le plan déterminé par les côtés de l'angle A; par le point

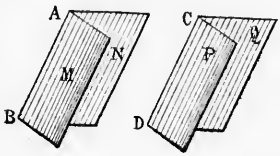
D, sommet du second angle, menons un plan N parallèle au plan M, et par suite aux droites AB et AC contenues dans ce plan.



La droite DE étant parallèle à AB, est tout entière dans le plan N (n° 308); de même DF parallèle à AC, est tout entière dans le plan N. Et ainsi le plan N mené parallèlement au plan M, n'est autre que le plan déterminé par les côtés de l'angle D. Donc...

Proposition XXV. — Théorème.

321. *Si deux plans sont respectivement parallèles à deux autres plans qui se coupent, les intersections sont parallèles.*



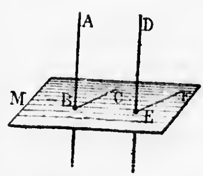
Soient les plans M et N, respectivement parallèles aux plans P et Q, qui se coupent suivant CD. Il faut prouver que l'intersection AB est parallèle à CD.

Les deux plans M et P étant parallèles, la droite AB, qui appartient au premier de ces plans, est parallèle au second (n° 302); de même les plans N et Q étant parallèles, la droite AB, qui appartient au premier de ces plans, est parallèle au second.

Dès lors la droite AB, parallèle aux deux plans P et Q qui se coupent, est parallèle à leur intersection (n° 309). Donc...

Proposition XXVI. — Théorème.

322. *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*



Soient AB et DE deux droites parallèles, et soit M un plan perpendiculaire à AB.

Pour prouver que ce plan est perpendiculaire à DE, menons, dans le plan M, et par les points B et E, deux parallèles quelconques BC et EF. Les angles B et E sont égaux comme ayant les côtés respectivement parallèles (n° 320); et puisque B est droit, E l'est aussi.

La droite DE étant perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans le plan M est perpendiculaire à ce plan. Donc ..

Proposition XXVII. — Théorème.

323. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.*

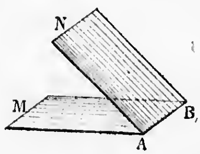
Soient les deux droites AB et DE perpendiculaires au plan M.
(Figure précédente.)

Si par le point E on mène une droite parallèle à AB, cette droite est, comme AB, perpendiculaire au plan M (nº 322), et se confond, par conséquent, avec ED (nº 303); ainsi DE est parallèle à AB. Donc...

§ III. — ANGLES DIÈDRES

Définitions.

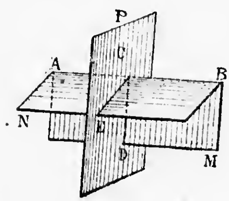
324. On appelle *angle dièdre* l'ouverture comprise entre deux plans qui se rencontrent.



Ces deux plans sont les *faces* du dièdre, et leur intersection en est l'*arête.*

Un angle dièdre se désigne par son arête, ou bien par ses faces et son arête; la désignation de l'arête étant placée au milieu. On dit l'*angle dièdre* AB, ou le *dièdre* MABN.

325. L'*angle plan correspondant à un angle dièdre* est l'angle formé par deux droites menées dans les deux faces perpendiculairement en un même point de l'arête.



L'angle dièdre MAEN a pour angle plan l'angle DCE.

L'*angle plan* d'un dièdre est déterminé par les intersections des deux faces du dièdre avec un troisième plan P mené perpendiculairement à l'arête.

L'angle plan d'un dièdre est le même à quelque point de l'arête qu'on le construise.

326. Un *angle dièdre* est *droit*, *obtus* ou *aigu*, selon que l'angle plan correspondant est lui-même droit, obtus ou aigu.

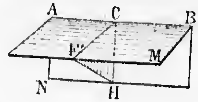
Deux *plans* sont *perpendiculaires* l'un à l'autre lorsqu'ils forment des dièdres droits.

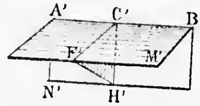
Proposition XXVIII. — Théorème.

327. *Deux dièdres égaux ont des angles plans égaux; et réciproquement, deux dièdres qui ont des angles plans égaux sont égaux.*

1º Soient AB et A'B' deux dièdres égaux, et soient C et C' leurs angles plans.

Les deux dièdres étant égaux peuvent coïncider : portons le dièdre AB sur son égal A'B', de manière que l'arête AB coïncide avec A'B', et le point C avec C'. Les droites CF et C'F' coïncident, comme étant dans un même plan, et perpendiculaires en un même point de la droite A'B'; et il en est de même des deux droites CH et C'H'. Ainsi les angles plans C et C' sont égaux.



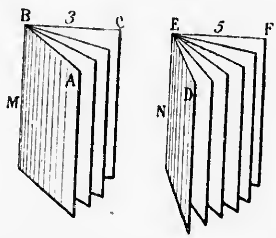


2° Soient AB et A'B' deux dièdres ayant leurs angles plans C et C' égaux. Ces angles plans FCH et F'C'H' déterminent des plans perpendiculaires aux arêtes AB et A'B'.

Transportons la première figure sur la seconde, de manière que le plan AM soit sur A'M', l'arête AB sur A'B', et le point C sur C'. Les deux plans FCH et F'C'H' coïncident, comme étant perpendiculaires en un même point de la droite A'B'; ainsi CF se confond avec C'F', et CH avec C'H'; donc les plans ABN et A'B'N' coïncident, puisqu'ils passent par les mêmes droites A'B' et C'H'; et les deux dièdres sont égaux. Donc...

Proposition XXIX. — Théorème.

328. *Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.*



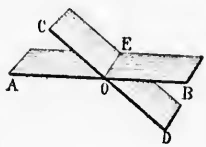
Soient M et N deux dièdres quelconques, ABC et DEF leurs angles plans.

Admettons que ces angles plans aient une commune mesure, qui soit contenue 3 fois exactement dans le premier, et 5 fois dans le second; ces angles seront entre eux comme les nombres 3 et 5, et l'on aura $\frac{\text{angle ABC}}{\text{angle DEF}} = \frac{3}{5}$

Menons des plans par les arêtes BM et EN et par les lignes de division des deux angles plans; les angles plans partiels étant égaux, ils déterminent des dièdres égaux (n° 327); mais l'angle M contient 3 de ces dièdres égaux, et l'angle N en contient 5; donc $\frac{M}{N} = \frac{3}{5}$. Ainsi les dièdres considérés sont entre eux comme leurs angles plans.

Cette démonstration est applicable, quel que soit le rapport que l'on suppose entre les angles plans. Donc...

329. **Corollaires.** 1° *Un angle dièdre quelconque a la même mesure que l'angle plan qui lui correspond.*



2° *Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux;* car si AB et CD sont obtenus par une section perpendiculaire à l'intersection OE, les dièdres opposés correspondent à des angles plans égaux comme opposés par le sommet.

3° *Deux dièdres adjacents dont les faces extérieures forment un même plan sont supplémentaires; réciproquement, si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs faces extérieures sont dans un même plan* (nos 29 et 31).

4° *La somme de tous les dièdres que l'on peut former autour d'une même droite est égale à 4 angles droits* (n° 30, 3°).

5° *Lorsque deux plans se coupent de manière que l'un des dièdres soit droit, les trois autres le sont aussi* (n° 30, 4°).

6° *Si un premier plan est perpendiculaire à un second, celui-ci est perpendiculaire au premier* (n° 30, 5°).

7° *Le plan bissecteur d'un dièdre est le lieu géométrique des points équidistants des deux faces de ce dièdre* (n° 61, 2°).

8° *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, ces plans forment :*

Des dièdres correspondants égaux,

Des dièdres alternes-internes égaux,

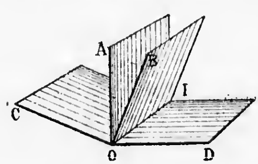
Des dièdres alternes-externes égaux,

Des dièdres intérieurs d'un même côté, dont la somme est égale à deux dièdres droits (n° 71).

9° *Deux dièdres qui ont les faces respectivement parallèles ou perpendiculaires sont égaux, ou supplémentaires* (n° 77).

Proposition XXX. — Théorème.

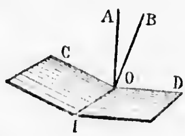
330. *Si par l'arête d'un dièdre obtus, on mène deux plans respectivement perpendiculaires aux deux faces de ce dièdre, le dièdre aigu obtenu sera supplémentaire du dièdre donné.*

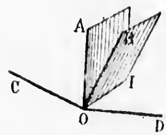


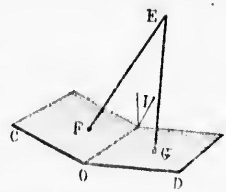
Soient les deux dièdres AOIB et COID, ayant même arête OI, et tels que la face AI soit perpendiculaire à DI, et la face BI perpendiculaire à CI.

Supposons les droites OA, OB, OC, OD, obtenues par une section faite perpendiculairement à l'arête OI : l'angle aigu AOB et l'angle obtus COD sont supplémentaires, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires (n° 78, 2°) ; il en sera de même des angles dièdres auxquels ces angles plans correspondent. Donc...

331. **Corollaire.** *Lorsque les côtés d'un angle plan sont perpendiculaires aux faces d'un angle dièdre, ces deux angles sont supplémentaires, ou égaux.* Car les angles dièdres sont entre eux comme les







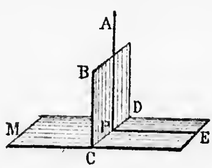
angles plans qui leur correspondent. Dans la troisième figure ci-dessus, les angles E et I sont égaux, comme ayant les côtés respectivement parallèles.

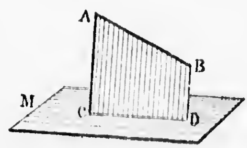
Proposition XXXI. — Théorème.

332. *Si une droite et un plan sont perpendiculaires, tout plan mené par la droite est perpendiculaire au premier plan.*

Soit la droite AP perpendiculaire au plan M, et soit BD un plan quelconque mené par AP. Menons, dans le plan M, la droite PE perpendiculaire à CD.

La droite AP, perpendiculaire au plan M, est aussi perpendiculaire aux deux droites CD et PE qui passent par son pied dans ce plan; ainsi l'angle APE, qui est l'angle des deux plans, est droit, et les deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre. Donc...





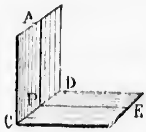
333. **Corollaire.** *Pour mener, par une droite* AB, *un plan perpendiculaire à un plan donné* M, on abaisse d'un point quelconque A de la droite, une perpendiculaire AC au plan donné; le plan BC, déterminé par ces deux droites, est perpendiculaire au plan M.

Proposition XXXII. — Théorème.

334. *Si dans une face d'un dièdre droit, on mène une perpendiculaire à l'arête, cette droite est perpendiculaire à l'autre face du dièdre.*

Soit ACDE un dièdre droit, et soit AP perpendiculaire à l'arête CD.

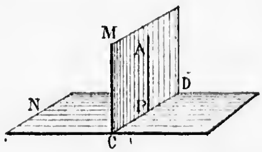
Dans le plan CDE, menons PE perpendiculaire à CD. Le dièdre étant



droit, son angle plan l'est aussi; ainsi AP est perpendiculaire aux deux droites CD et PE, et par suite à leur plan CE. Donc...

Proposition XXXIII. — Théorème.

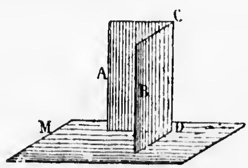
335. *Deux plans étant perpendiculaires l'un à l'autre, si, par un point du premier plan, on mène une droite perpendiculaire au second, cette droite est tout entière dans le premier plan.*



Soient M et N deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, et soit A un point quelconque du premier plan.

Si, dans le plan M, on mène AP perpendiculaire à l'intersection CD, cette droite AP est perpendiculaire au plan N (n° 334); or, du point A, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan N; ainsi la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan N se confond avec AP. Donc...

336. **Corollaire.** *Si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est aussi perpendiculaire à ce troisième plan.*



Car si, d'un point quelconque de l'intersection des deux premiers plans, on abaisse une perpendiculaire sur le troisième plan, cette perpendiculaire doit se trouver sur chacun des deux premiers plans; elle se confond donc avec leur intersection.

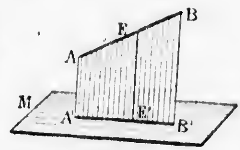
337. **Définitions.** On appelle *projection d'un point* sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

La *projection d'une figure* quelconque sur un plan est l'ensemble des projections des différents points de cette figure sur le plan.

Proposition XXXIV. — Théorème.

338. *La projection d'une droite sur un plan est une ligne droite.*

Soit AB une droite à projeter sur le plan M. Par la droite AB, menons un plan AB' perpendiculaire au plan M (n° 333); si l'on projette sur le plan M un point quelconque E de la droite, la ligne projetante EE' est tout entière dans le plan AB' perpendiculaire au plan M (n° 335); et ainsi la projection E' du point E est sur la droite A'B', qui est l'intersection des deux plans. Donc...

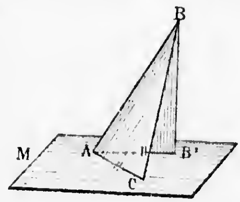


339. **Scolie.** *Une droite quelconque et sa projection sur un plan sont dans un même plan perpendiculaire au plan de projection.*

Proposition XXXV. — Théorème.

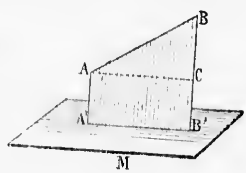
340. *L'angle que fait une droite avec sa projection sur un plan est moindre que l'angle qu'elle fait avec toute autre droite menée par son pied dans ce plan.*

Soit AB une droite quelconque, AB' sa projection sur le plan M, et AC une autre droite menée dans le plan; il faut prouver que l'angle BAB' est moindre que BAC. Portons la longueur AB' sur AC, et menons la droite BC. BB' est perpendiculaire au plan M; donc BC est une oblique: par suite BB' < BC. Dès lors les deux triangles BAB' et BAC ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième BB' < BC; donc l'angle BAB' est plus petit que BAC (n° 51). Donc...



341. **Définition.** *On appelle angle d'une droite et d'un plan* l'angle que fait cette droite avec sa projection sur le plan.

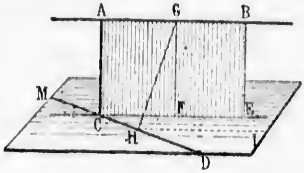
On trouve cet angle en prolongeant la droite jusqu'au plan, ou bien en menant, par un point quelconque de la droite, une parallèle à sa projection.



Proposition XXXVI. — Théorème.

342. *Entre deux droites quelconques données dans l'espace, on peut mener une perpendiculaire commune, et une seule; et cette perpendiculaire est la plus courte distance des deux droites.*

Soient AB et CD deux droites quelconques données dans l'espace. Par la droite CD menons le plan M parallèle à l'autre droite AB (nº 313), et projetons AB sur ce plan M (nº 339); par le point C, rencontre de la droite CD avec la projection de AB, menons CA perpendiculaire à AB. Nous allons prouver que cette droite CA est une perpendiculaire commune aux deux droites données.



1º La droite AB étant parallèle au plan M, l'est aussi à sa projection CE (nº 306); dès lors, la droite AC, perpendiculaire à AB, l'est aussi à la parallèle CE (nº 68).

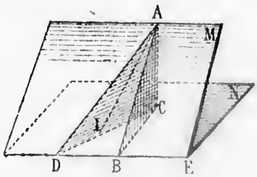
Les deux plans AE et MD sont perpendiculaires l'un à l'autre; donc la droite AC, menée dans le premier perpendiculairement à l'intersection CE, est perpendiculaire à l'autre plan M (nº 334), et par suite à la seconde droite CD, qui passe par son pied.

2º La droite AC est la seule perpendiculaire commune; car si une autre droite GH était supposée perpendiculaire à AB et à CD, elle serait aussi perpendiculaire à HI parallèle à AB (nº 308); étant perpendiculaire à HI et à CD, elle le serait au plan M; or GF parallèle à AC, est déjà perpendiculaire au plan M (nº 322); il y aurait donc deux perpendiculaires au plan M, partant du même point G, ce qui est impossible.

3º On a $AC = GF$, et $GF < GH$ (nº 299); la droite AC est donc plus courte que toute autre droite menée de AB à CD. Donc...

Proposition XXXVII. — Théorème.

343. *Si une droite assujettie à passer par un point fixe se meut dans l'une des faces d'un angle dièdre, l'angle qu'elle forme avec sa projection sur l'autre face est maximum, lorsque cette droite est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.*



Soit MDEN un angle dièdre, M la face sur laquelle se trouve la droite mobile, AB et AD deux positions de cette droite l'une perpendiculaire à l'intersection DE, et l'autre quelconque. Si l'on mène AC perpendiculaire au plan N, puis CB et CD, ces deux dernières droites sont les projections des droites AB et AD. Démontrons que l'angle ABC est plus grand que ADC.

Portons sur CD une longueur CI égale à CB, et menons AI. Les deux triangles rectangles ACB et ACI sont égaux, comme ayant au point C un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux: ainsi l'angle ABC égale AIC.

Or l'angle AIC, extérieur au triangle ADI, égale la somme des deux intérieurs opposés; et, par conséquent, l'angle ADC est moindre que AIC ou ABC, ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Scolie. Si N représente un plan horizontal, et M un plan incliné quelconque, la droite DE, ou toute autre droite parallèle à DE que l'on tracerait dans le plan M, est appelée *une horizontale de ce plan;* et toute droite AB menée perpendiculairement aux horizontales du plan est appelée *ligne de pente du plan.*

§ IV. — ANGLES SOLIDES OU POLYÈDRES

Définitions.

344. On appelle *angle solide* ou *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans qui se coupent en un même point.

Ce point est le *sommet* de l'angle solide; les *faces* sont des angles plans; et à chaque *arête* se trouve un *angle dièdre.*

Les faces et les dièdres s'évaluent en degrés; les arêtes sont indéfinies.

345. Un *angle solide* est *convexe* lorsque toute section plane qui rencontre toutes les arêtes est un polygone convexe.

346. Si l'on prolonge au delà du sommet toutes les arêtes d'un angle solide, on obtient un nouvel angle solide *symétrique du premier.*

Dans deux angles solides symétriques, les faces sont respectivement égales comme angles plans opposés par le sommet, et les dièdres sont respectivement égaux comme opposés par l'arête.

Deux angles solides symétriques sont dits *égaux par symétrie* parce qu'ils ont tous leurs éléments respectivement égaux, quoiqu'ils ne puissent coïncider, par suite de la disposition inverse de ces mêmes éléments.

347. Un *trièdre* est un angle solide de trois faces. On y considère six éléments : *trois faces* et *trois dièdres.* Les dièdres peuvent être désignés par les arêtes SA, SB, SC; ou simplement A, B, C, et les faces respectivement opposées par les mêmes lettres minuscules, a, b, c.

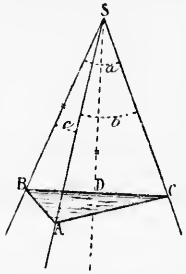
348. On appelle *trièdres supplémentaires* deux trièdres tels que les faces de chacun d'eux soient les suppléments des dièdres de l'autre.

Proposition XXXVIII. — Théorème.

349. *Chaque face d'un trièdre est plus petite que la somme des deux autres, et plus grande que leur différence.*

Soit l'angle trièdre S, et soient a, b, c, les trois faces, a étant la plus grande.

1° Construisons sur BSC, l'angle BSD égal à BSA ou c; portons sur les arêtes SA et SD des longueurs égales; et par les points obtenus, A et D, menons un plan quelconque ADBC.



Les triangles BSA et BSD sont égaux comme ayant en S un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; donc $BD = BA$. On a d'ailleurs $BC < BA + AC$; en retranchant BD au premier membre et BA au second, il vient $DC < AC$.

Et alors les deux triangles CSD et CSA ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième côté inégal, $CD < CA$; donc l'angle CSD est plus petit que CSA; et si l'on ajoute de part et d'autre les angles égaux DSB et ASB, il vient $BSC < CSA + ASB$,

ou $$a < b + c$$

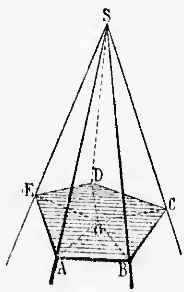
Ainsi la plus grande face est moindre que la somme des deux autres. La propriété est évidente pour chacune des autres faces.

2° L'inégalité précédente revient à celle-ci $b + c > a$
d'où, en retranchant b aux deux membres $c > a - b$
et si c'est c que l'on retranche, on a $b > a - c$

Donc *chaque face d'un trièdre...*

Proposition XXXIX. — Théorème.

350. *La somme des faces de tout angle solide convexe est moindre que 4 angles droits.*



Soit S un angle solide de 5 faces; coupons-le par un plan quelconque AD.

En joignant les sommets A, B, C, D, E, à un point intérieur quelconque O, on décompose le pentagone en 5 triangles, dont les angles égalent ensemble 10 dr. — La somme des angles des 5 triangles latéraux ASB, BSC, etc. égale aussi 10 dr. Or dans l'angle trièdre A, la face inférieure EAB est moindre que la somme des faces latérales EAS, SAB; il en est de même aux angles solides B, C, D, etc. La somme des angles inférieurs EAB, ABC, etc., étant moindre que la somme des angles latéraux EAS, SAB, etc., par compensation la somme des angles en O, qui vaut 4 droits, sera plus grande que la somme des angles en S. Donc...

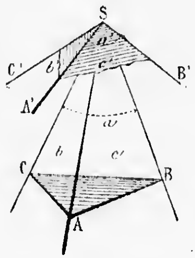
Proposition XL. — Théorème.

351. *Si deux trièdres sont l'un dans l'autre, de telle sorte que les arêtes de l'un soient perpendiculaires aux faces de l'autre, ces deux trièdres sont supplémentaires* (n° 348).

Pour abréger, appelons a, b, c, les faces du premier trièdre, A, B, C, les dièdres opposés, a', b', c', les faces du second trièdre, et A', B', C', les dièdres opposés.

La droite SA' est d'ailleurs supposée perpendiculaire au plan a, SB' au plan b, et SC' au plan c.

1° Les droites SA' et SB' étant perpendiculaires aux plans a et b, leur angle c' est le supplément du dièdre SC (n° 331). De même la face b' est le supplément du dièdre SB, et la face a', du dièdre SA. Ainsi les faces du trièdre extérieur sont les supp[...] 'nents des angles du trièdre intérieur.



2° SA' est perpendiculaire à la face a, et par suite aux droites SB et SC situées dans ce plan. De même SC', perpendiculaire à la face c, l'est aussi aux droites SB et SA. Ainsi SB est perpendiculaire sur SA' et sur SC', et par suite sur la face b'.

Pareillement SC est perpendiculaire à la face c' et SA à la face a'.

Ainsi les positions relatives des arêtes et des faces des deux trièdres sont dans une complète réciprocité. Donc...

Proposition XLI. — Théorème.

352. *Dans tout trièdre :*

1° *La somme des angles dièdres est comprise entre 2 droits et 6 droits;*

2° *La différence entre le petit dièdre et la somme des deux autres est moindre que 2 droits.* (Figure précédente.)

1° Soit SABC un trièdre quelconque, et SA'B'C' le trièdre supplémentaire.

Appelons A, B, C, les dièdres du premier, et a', b', c', les faces du second. On a (n° 348) :

$$\begin{cases} A + a' = 2\ dr. \\ B + b' = 2\ dr. \\ C + c' = 2\ dr. \end{cases}$$

donc $$(A + B + C) + (a' + b' + c') = 6\ dr.$$

d'où $$A + B + C = 6\ dr. - (a' + b' + c')$$

Or la somme des faces a', b', c', est comprise entre zéro et 4 $dr.$ (n° 350); donc si l'on retranche cette somme de 6 dr., le reste, qui sera la valeur de $A + B + C$, sera compris entre 2 droits et 6 droits.

2° Soit C le plus petit dièdre du trièdre considéré; c' sera la plus grande face du trièdre supplémentaire (n° 348).

Or on a $c' < a' + b'$: remplaçant chacune de ces valeurs par les suppléments, on a $2\ dr. - C < (2\ dr. - A) + (2\ dr. - B)$

ou $$2\ dr. - C < 4\ dr. - (A + B)$$

Ajoutons $A + B + C$ aux deux membres, et retranchons 2 $dr.$, il vient :

$$A + B < 2\ dr. + C$$

D'où $$A + B - C < 2 \text{ droits.}$$ Donc...

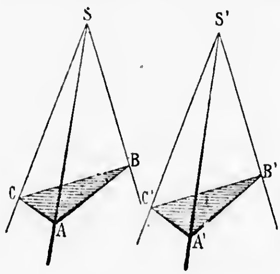
Proposition XLII. — Théorème.

353. *Deux trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à des dièdres respectivement égaux ;*

2° *Lorsqu'ils ont un dièdre égal, compris entre des faces respectivement égales ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois faces respectivement égales.*



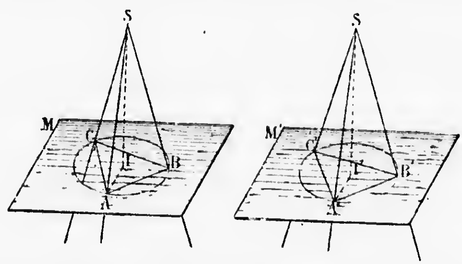
1° Soient les deux trièdres S et S′ ayant la face BSC égale à la face B′S′C′, le dièdre SB égal à S′B′, et le dièdre SC égal à S′C′.

Appliquons la face BSC sur son égale B′S′C′. Le dièdre SB étant égal à S′B′, le plan SBA coïncidera avec S′B′A′; et de même SCA avec S′C′A′; donc les deux trièdres sont égaux.

2° Soient les deux trièdres S et S′, ayant le dièdre SA égal à S′A′, la face ASB égale à A′S′B′, et la face ASC égale à A′S′C′.

Le dièdre SA peut coïncider avec son égal S′A′, de manière que le point S soit en S′. Alors la face ASB coïncidera avec son égale A′S′B′, et de même ASC avec A′S′C′. Donc les deux trièdres sont égaux.

3° Soient les deux trièdres S et S′ ayant les trois faces respective-



ment égales. Portons sur toutes les arêtes des longueurs égales SA, SB, SC, SA′, SB′, SC′; et par les points obtenus menons les plans M et M′, sur lesquels nous abaissons les perpendiculaires SI, S′I′.

Les faces des deux trièdres étant respectivement égales, les triangles latéraux de la première figure sont égaux à ceux de la seconde; donc $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, et les circonférences circonscrites aux deux triangles égaux ABC et A′B′C′ sont égales.

Par rapport au plan M, SA, SB, SC, sont des obliques égales, donc les pieds de ces lignes sont équidistants du pied de la perpendiculaire SI, et le point I est le centre de la circonférence. Il en est de même dans la deuxième figure (n° 300, 3°).

Menons AI et A'I'; les deux triangles rectangles SAI et S'A'I' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un autre côté égal; donc $SI = S'I'$.

Supposons maintenant la première figure transportée sur la seconde, le plan M sur M', et le triangle ABC sur son égal A'B'C'.

Les circonférences coïncident, ainsi que leurs centres I et I'. Il en est de même des perpendiculaires IS et I'S', et les deux sommets S et S' coïncident. Donc les trièdres sont égaux.

354. **Scolie.** 1° Les trois cas d'égalité qui viennent d'être établis pour les trièdres présentent une analogie complète avec les cas d'égalité des triangles (n° 47);

2° Voici un autre cas remarquable : *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les angles dièdres respectivement égaux.* En effet, l'égalité des angles des deux trièdres considérés entraîne l'égalité des faces dans leurs trièdres supplémentaires (n° 348); ceux-ci peuvent donc coïncider, puisqu'ils rentrent dans le cas précédent; il en résulte que leurs angles sont respectivement égaux, ce qui entraîne l'égalité des faces des deux premiers trièdres.

3° Deux angles solides égaux sont décomposables en un même nombre de trièdres respectivement égaux et semblablement disposés.

EXERCICES SUR LE LIVRE V

Théorèmes à démontrer.

1. Si une droite et un plan sont parallèles, tout plan perpendiculaire à la droite est aussi perpendiculaire au plan donné, et réciproquement.

2. Une droite et un plan perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

3. Étant donnés un dièdre et un point de l'arête, si un plan se meut par ce point en coupant les deux faces du dièdre, l'angle plan déterminé sur le plan mobile est minimum lorsque ce plan est perpendiculaire à l'arête.

4. Deux trièdres qui ont deux faces respectivement égales et le dièdre compris inégal, ont aussi la troisième face inégale, et réciproquement.

5. Si deux faces d'un trièdre sont égales, les dièdres opposés sont aussi égaux, et réciproquement (le trièdre est dit alors *isocèle*).

6. Dans tout trièdre, à un plus grand dièdre se trouve opposée une plus grande face, et réciproquement.

7. Si un angle solide est coupé par un plan quelconque, variable de position, la somme des angles plans déterminés sur les faces de l'angle solide d'un même côté du plan sécant est constante.

8. Deux angles solides sont égaux lorsqu'ils ont les faces respectivement égales et les dièdres respectivement égaux.

9. Pour qu'on puisse former un trièdre avec trois faces données a, b, c, il

faut et il suffit que la somme des trois faces soit moindre que 4 droits, et que la plus grande face soit moindre que la somme des deux autres.

10. Pour que l'on puisse former un trièdre avec trois angles dièdres donnés, il faut et il suffit que leur somme soit comprise entre 2 et 6 droits, et que le plus petit dièdre augmenté de 2 droits surpasse la somme des deux autres.

11. Les trois plans perpendiculaires aux faces d'un trièdre, menés par les arêtes opposées à ces faces, se rencontrent en une même droite (*plans hauteurs*).

12. Dans un trièdre quelconque, les trois *plans bissecteurs* des dièdres se rencontrent en une même droite, dont chaque point est équidistant des faces.

13. Dans tout trièdre, les trois plans qui passent par les arêtes et les bissectrices des faces opposées, se rencontrent suivant une même droite (*plans médians*).

14. Les trois plans menés perpendiculairement aux faces d'un trièdre par les bissectrices de ces mêmes faces, se rencontrent suivant une même droite, dont chaque point est équidistant des trois arêtes.

15. La projection d'une surface plane quelconque sur un plan égale le produit de cette surface par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan.

Lieux géométriques à trouver.

1. Un plan tourne autour d'une droite fixe (une girouette autour de son axe); d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur le plan mobile en ses diverses positions. Quel est le lieu de ces perpendiculaires?

2. Étant données deux droites quelconques, on fait mouvoir une troisième droite le long de la première et parallèlement à la seconde. Quel est le lieu décrit par la droite mobile?

3. Lieu des points équidistants de deux plans parallèles.

4. Lieu des points équidistants de deux plans quelconques.

5. Lieu des parallèles menées à un plan donné par un point donné.

6. Lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent?

7. Un point fixe est projeté sur un plan mobile autour d'une droite fixe. Quel est le lieu des projections?

8. Lieu des milieux des droites menées entre deux droites données dans l'espace.

9. Lieu des points équidistants de trois points donnés en ligne brisée.

Problèmes.

1. Trouver la distance d'un point donné à un plan donné.

2. La flèche d'un clocher forme un angle solide régulier à 8 faces dont la somme est de 90 degrés. On demande la valeur de chacun des angles des faces latérales, vers la base de la flèche.

3. Un cercle de $0^{m}05$ de diamètre est posé de manière à faire avec un plan donné un angle de 15°. Quelles seront les deux dimensions extrêmes de sa projection sur le plan?

4.*Une droite de $0^{m}04$ est posée de manière que sa projection sur un plan soit de $0^{m}03$. Quel est l'angle de la droite et du plan?

5. Un jalon de 2 mètres étant placé verticalement sur un sol horizontal, donne $2^{m}50$ d'ombre. Quelle est, en degrés, la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon?

6. La somme des huit faces de l'angle solide de la flèche d'un clocher, pouvant varier entre 0 et 360 degrés, on demande entre quelles limites peut varier la somme des angles des faces latérales vers la base de la flèche.

7. Que deviennent ces limites dans le cas général d'un angle solide de n faces ?

8. A quelle hauteur une échelle de 5 mètres touche-t-elle un mur, si le pied est à 2 mètres du mur ?

9. Une salle a 3 mètres de hauteur; on attache au plafond une corde de 4 mètres, et, tenant cette corde tendue, on trace un cercle sur le plancher. On demande la surface de ce cercle.

10. Une tige AP de 1^m30 est perpendiculaire à un plan; du pied de cette tige, on décrit sur le plan une circonférence de 0^m40 de rayon. En un point B de cette circonférence, on mène une tangente BC de 0^m36 de longueur. On demande la distance AC de l'extrémité de cette tangente à l'extrémité de la tige.

11. Par un point donné dans un angle solide à quatre faces, mener un plan sécant tel que la section soit un parallélogramme.

12. Mener un plan qui coupe un trièdre trirectangle de manière que la section soit égale à un triangle donné.

13. Étant données deux droites indéfinies quelconques, mener un plan parallèle à chacune de ces droites, à égale distance de l'une et de l'autre.

14. Par une droite donnée, mener un plan qui passe à égale distance de deux points donnés.

15. Par un point donné, mener un plan qui passe à égale distance de trois autres points donnés.

LIVRE VI

LES POLYÈDRES

---

§ I. — DU PRISME

Définitions.

355. On appelle *polyèdre* un solide complétement limité par des faces planes.

Dans un polyèdre, il y a lieu de considérer les *sommets*, les *arêtes*, les *diagonales*, les *faces*, les *angles dièdres* et les *angles solides*.

Le plus simple des polyèdres est le *tétraèdre* ou polyèdre de 4 faces; l'*hexaèdre* en a 6, l'*octaèdre* en a 8, le *dodécaèdre* en a 12, l'*icosaèdre* en a 20.

356. On nomme *polyèdre régulier* un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux entre eux.

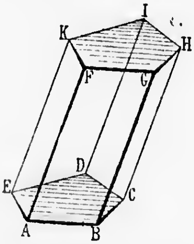
357. On appelle *prisme* un polyèdre compris entre deux polygones égaux et parallèles, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes. Les deux polygones égaux et parallèles sont les *bases* du prisme.

Un *prisme* est *droit* ou *oblique* selon que les arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux bases.

Toutes les *arêtes latérales* d'un prisme sont égales, comme droites parallèles comprises entre des plans parallèles.

Dans un prisme droit, les faces latérales sont des rectangles.

Un prisme est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal,* selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.



Un *prisme régulier* est un prisme droit dont la base est un polygone régulier.

358. Pour *construire un prisme,* on trace d'abord un polygone plan quelconque ABCDE, qui sera une des bases; par tous les sommets A, B, C, D, E, on mène, en dehors du plan de cette base, des droites égales et parallèles AF, BG, etc., qui sont les arêtes latérales; les extrémités de ces droites sont les sommets de l'autre base du prisme. Il résulte de cette construction que les faces latérales sont des

parallélogrammes, car chacune d'elles est un quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles. Les bases sont des polygones égaux et parallèles, car les côtés sont égaux et parallèles deux à deux ; les angles qui se correspondent sont égaux comme ayant les côtés parallèles chacun à chacun, et leurs plans sont parallèles (nº 320).

359. La *hauteur* d'un prisme est la distance des deux bases. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur.

Un *tronc de prisme* est la portion de prisme comprise entre la base et une section non parallèle à cette base, coupant d'ailleurs toutes les arêtes latérales.

360. Un *parallélipipède* est un prisme qui a pour bases des parallélogrammes.

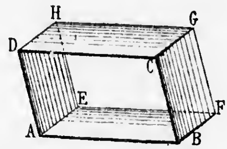
Un *parallélipipède rectangle* est un prisme droit qui a pour bases des rectangles.

Le *cube* est un parallélipipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés. — C'est l'*hexaèdre régulier*.

Proposition I. — Théorème.

361. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles* *.

Soit AG un parallélipipède quelconque, et soient AH et BG deux faces opposées.



Toutes les faces du solide étant des parallélogrammes, les droites AD et BC sont égales et parallèles, et il en est de même des droites AE et BF.

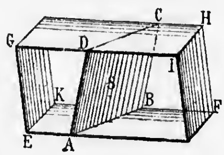
Ainsi les angles DAE et CBF sont égaux, et leurs plans sont parallèles (nº 320). Les parallélogrammes AH et BG ayant un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux sont égaux, car ils pourraient coïncider. Donc...

362. **Corollaire.** *Dans tout parallélipipède, on peut prendre pour bases deux faces opposées quelconques.*

Scolie. Trois droites, AB, AD, AE, partant d'un même point A, et données en position et en longueur, déterminent un parallépipède.

Proposition II. — Théorème.

363. *Toute section plane qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède est un parallélogramme.*



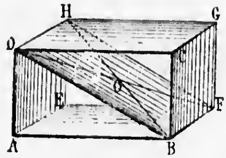
Soit S une section faite dans le parallélipipède GF. Les droites AB et CD sont parallèles, comme étant les intersections du plan sécant S avec les plans parallèles EF et GH (nº 315) ; de même

* Dans le dessin de plusieurs solides nous supposerons certaines faces transparentes, pour que l'on voie l'intérieur de la figure.

les droites AD et BC sont parallèles, comme étant les intersections du plan sécant S avec les plans parallèles EI et KH. Ainsi la figure S est un parallélogramme (nº 89). Donc...

Proposition III. — Théorème.

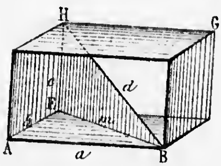
364. *Les diagonales d'un parallélipipède se coupent en leurs milieux.*



Soit le parallélipipède BH. Par deux arêtes opposées, BF et DH, menons un plan. Ces deux lignes BF et DH étant égales et parallèles, le quadrilatère BFHD est un parallélogramme (nº 93), et les diagonales BH et DF se coupent en leurs milieux (nº 94).

Deux diagonales quelconques se coupant en leurs milieux, toutes les diagonales passent par un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.

365. **Scolie.** 1º Le point commun aux diagonales d'un parallélipipède est le *centre* de figure de ce parallélipipède : c'est le milieu commun de toutes les droites que l'on peut mener dans le parallélipipède par ce même point.



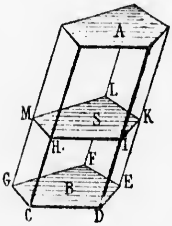
2º Soit AG un parallélipipède rectangle ayant pour dimensions a, b, c, et soit d l'une des diagonales. Le triangle BEH est rectangle en E, et le triangle ABE est rectangle en A. On a donc :

$$d^2 = m^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Ainsi, *dans un parallélipipède rectangle, le carré de la diagonale égale la somme des carrés des trois dimensions.*

S'il s'agit d'un cube, on aura : $d^2 = 3a^2$, d'où $d = a\sqrt{3}$.

Proposition IV. — Théorème.



366. *Toute section parallèle à la base d'un prisme est égale à cette base.*

Soit AB un prisme quelconque, et soit S une section parallèle à la base B.

Les droites CD et HI sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles B et S par un troisième, DH ; donc le quadrilatère CDIH est un parallélogramme, et CD égale HI.

De même, DE est égal et parallèle à IK, EF à KL, etc. Ainsi les deux polygones ont les côtés respectivement égaux ; leurs angles sont égaux deux à deux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens; donc ces deux polygones sont égaux.

367. **Corollaire.** *Si toutes les arêtes latérales d'un prisme sont coupées par deux plans parallèles, les deux sections sont égales.*

368. **Définition.** On appelle *section droite* d'un prisme toute section faite perpendiculairement aux arêtes latérales.

Toutes les sections droites d'un prisme sont parallèles et égales.

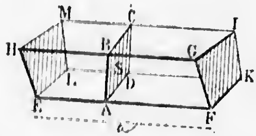
On appelle *surface latérale* d'un prisme l'ensemble des surfaces des parallélogrammes latéraux.

La *surface totale* d'un prisme se compose de la surface latérale augmentée des surfaces des deux bases.

Proposition V. — Théorème.

369. *La surface latérale d'un prisme égale le produit d'une arête latérale par le périmètre de la section droite.*

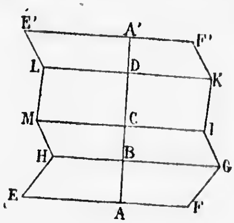
Soient EI un prisme quelconque, EF ou a une arête latérale, et ABCD ou S une section droite, dont le périmètre est p.



Les arêtes latérales EF, GH, etc., sont perpendiculaires à la section droite (nº 368), et par suite aussi aux droites AB, BC, CD, DA, qui sont dans le plan de cette section.

Donc chaque face latérale est un parallélogramme qui a pour base l'arête a du prisme, et pour hauteur l'une des lignes AB, BC, CD, DA. Ainsi la surface latérale aura pour expression l'arête latérale a multipliée par le contour p de la section S, ce que l'on exprime par la formule Surf. lat. $= ap$.

370. **Scolie.** 1º Si l'on développe sur un même plan les différentes faces latérales d'un prisme, on obtient une figure analogue à EF'.



2º Dans un prisme droit, le développement de la surface latérale est un rectangle.

3º Dans un prisme tronqué, la surface latérale se compose de trapèzes qui doivent être évalués séparément.

371. **Définitions.** On appelle *volume* d'un corps la portion de l'espace occupée par ce corps; ce même mot *volume* désigne aussi le nombre qui exprime le rapport de ce solide à l'unité de volume.

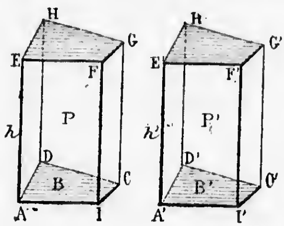
L'unité principale des volumes est le *mètre cube;* les unités secondaires sont les unités dérivées du mètre cube.

Deux solides sont *égaux* lorsqu'ils peuvent coïncider.

Deux solides sont *équivalents* lorsqu'ils ont le même volume sans pouvoir coïncider.

Proposition VI. — Théorème.

372. *Deux prismes droits qui ont des bases égales et même hauteur sont égaux.*

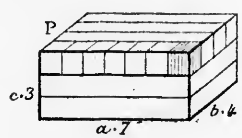


Soient P et P' deux prismes droits ayant deux bases, B et B', égales, et même hauteur h.

Si l'on transporte la figure P sur P', les bases B et B' coïncident, puisque ce sont des polygones égaux. Les arêtes AE et A'E' coïncident, comme étant deux perpendiculaires égales menées en un même point d'un plan; et il en est de même des autres arêtes latérales. Ainsi les bases supérieures coïncident, et par suite aussi les deux prismes. Donc...

Proposition VII. — Théorème.

373. *Le volume d'un parallélipipède rectangle égale le produit de ses trois dimensions.*



1° Considérons d'abord le cas où l'unité linéaire serait contenuê exactement dans les trois dimensions. Soit, par exemple, le parallélipipède P, ayant 7 mètres de longueur, 4 de largeur et 3 de hauteur.

Il s'agit de prouver que *le nombre de mètres cubes contenus dans ce parallélipipède est exprimé par* $7 \times 4 \times 3$ *ou* 84.

Ce solide peut être décomposé en 3 parallélipipèdes de 7 mètres de longueur, 4 de largeur et 1 de hauteur. Chaque parallélipipède partiel peut être partagé en 4 autres de 7 mètres de longueur, 1 mètre de largeur et 1 de hauteur.

Enfin, chacun de ces derniers peut être divisé en 7 parties égales, chacune d'un *mètre cube*. Le nombre total de mètres cubes est donc exprimé par le produit $7 \times 4 \times 3$ ou 84.

2° *Cas de dimensions fractionnaires.* Soit $a = 7^{m}3$, $b = 4^{m}2$, et $c = 3$ mètres.

Il suffit de prendre le décimètre pour unité, et de répéter le raisonnement précédent; on obtiendra 91 800 décimètres cubes, ou 91 mètres cubes 800.

Ce raisonnement est applicable quelle que soit la fraction du mètre à laquelle s'arrête l'expression des dimensions. Donc...

Ce volume a pour formule : $V = abc$.

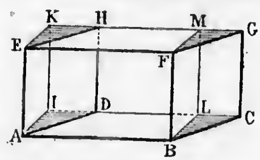
374. **Scolie.** 1° Le produit des deux premières dimensions d'un parallélipipède exprimant la surface de la *base*, on dit aussi que *le volume du parallélipipède rectangle égale le produit de sa base par sa hauteur*, ce qui s'exprime par $V = Bh$.

2° *Le volume d'un cube est exprimé par la troisième puissance de son arête :* $V = a^3$; de là vient l'usage d'appeler *cube d'un nombre* la puissance troisième de ce nombre.

Proposition VIII. — Théorème.

375. *Le volume d'un prisme droit égale le produit de sa base par sa hauteur :* $V = Bh$.

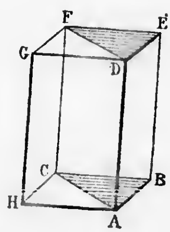
1° Soit d'abord un parallélipipède droit BH, ayant pour base un parallélogramme quelconque ABCD.



Menons les plans AK et BM perpendiculaires aux faces parallèles AF et DG, et comparons les prismes triangulaires droits ADIK et BCLM; leurs bases ADI et BCL sont égales comme ayant un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux (nos 77 et 90); d'ailleurs ces prismes sont droits, et ont même hauteur; donc ils sont égaux (n° 372).

Ainsi, le parallélipipède considéré est équivalent au parallélipipède rectangle ABLIK, qui a la même hauteur et une base équivalente; donc, pour l'un comme pour l'autre, le volume égale le produit de la base par la hauteur.

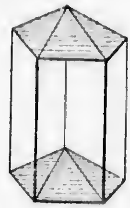
2° Soit un prisme triangulaire droit ABCDEF. Prolongeons les plans des bases et menons le plan DH parallèle à BF, et le plan CG parallèle à BD.



Nous formons ainsi un nouveau prisme triangulaire droit, de même hauteur que le prisme considéré; et les bases ACB et ACH sont égales comme moitiés d'un même parallélogramme. Donc ces deux prismes sont égaux (n° 372). Ainsi le prisme droit ABCF est la moitié du parallélipipède droit ABCHG, qui a même hauteur et une base double.

Donc le volume d'un prisme triangulaire droit égale le produit de sa base par sa hauteur.

3° Un prisme droit quelconque est décomposable en prismes triangulaires droits ayant tous même hauteur, et dont les bases réunies forment la base du prisme total.

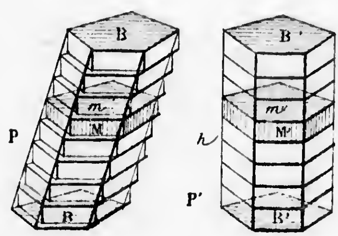


Ainsi le volume total égale le produit de la hauteur commune par la somme des bases, c'est-à-dire par la base du prisme considéré. Donc...

Proposition IX. — Théorème.

376. *Le volume d'un prisme quelconque égale le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit P un prisme oblique quelconque. Construisons un prisme droit P' de même base et de même hauteur, et supposons les deux solides coupés par un même nombre de plans parallèles aux bases, et équidistants entre eux; toutes les sections ainsi déterminées sont égales aux bases, et par suite égales entre elles.



Considérons deux sections correspondantes m et m', et formons-en les bases supérieures de deux petits prismes droits M et M', ayant pour hauteur la distance des plans sécants. Ces prismes droits ayant même base et même hauteur sont égaux (nº 372); et il en est de même de tous les prismes analogues que l'on peut former dans les deux solides.

Ainsi la somme des prismes formés en P est égale à la somme des prismes formés en P', c'est-à-dire au prisme P' lui-même. Et cela est vrai, quel que soit le nombre des plans sécants. Or si le nombre de ces plans croît indéfiniment, l'ensemble des prismes formés en P tend vers le prisme P lui-même; donc ce prisme est équivalent au prisme droit P' qui a même base et même hauteur; et *son volume égale le produit de sa base par sa hauteur.*

377. **Corollaires.** 1° *Deux prismes de même hauteur et de bases équi-*

valentes sont équivalents; car les volumes sont exprimés par les produits de nombres respectivement égaux.

2° *Deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

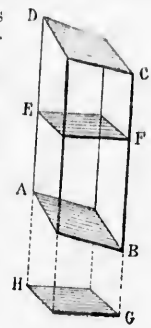
3° *Deux prismes de bases équivalentes sont entre eux comme les hauteurs, et deux prismes de même hauteur sont entre eux comme les bases.*

Proposition X. — Théorème.

Autre formule pour le volume du prisme.

378. *Le volume d'un prisme quelconque égale le produit d'une arête latérale par la section droite de ce prisme.*

Soit AC un prisme oblique quelconque. Prolongeons les arêtes latérales au-dessous de la base AB; prenons une longueur EH égale à l'arête latérale AD, et par les points E et H, menons les plans EF et HG perpendiculaires aux arêtes latérales. Les lignes AH, BG... sont respectivement égales à ED, FC... comme différences de lignes respectivement égales.



Transportons le prisme droit tronqué EFCD sur HGBA; les bases EF et HG coïncident (n° 367); l'arête latérale ED coïncide avec son égale HA, car ces deux lignes égales sont perpendiculaires au même plan HG en un même point H; il en est de même pour les autres arêtes.

Ainsi le tronc de prisme EC est égal à HB; par suite le *prisme oblique* ABCD est équivalent au *prisme droit* EFGH.

Or la mesure de ce dernier est égale à la section droite EF multipliée par EH ou AD. Donc...

379. **Corollaire.** *Dans un prisme quelconque, le produit de la base par la hauteur égale le produit de la section droite par l'arête latérale.*

D'où il suit que *la section droite est à la base comme la hauteur est à l'arête latérale.*

§ II. — DE LA PYRAMIDE

Définitions.

380. Une *pyramide* est un polyèdre ayant une base polygonale quelconque, et des faces latérales triangulaires qui se terminent en un même point.

Ce point est le *sommet* de la pyramide.

La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base.

Une pyramide est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

La pyramide triangulaire est un *tétraèdre* (nº 355). Dans une pyramide triangulaire on peut prendre pour base une face quelconque.

381. Une pyramide est *régulière* lorsque la base est un polygone régulier, et que la hauteur tombe au centre de ce polygone.

Dans une pyramide régulière, toutes les arêtes latérales sont égales; les faces latérales sont des triangles isocèles égaux; la hauteur de chacun de ces triangles se nomme l'*apothème de la pyramide*, apothème qu'il ne faut pas confondre avec celui de la *base*.

382. Un *tronc de pyramide* est la portion de pyramide comprise entre la base et une section qui coupe toutes les arêtes latérales.

Si la section est parallèle à la base, on a un *tronc de pyramide à bases parallèles;* sa *hauteur* est la distance des deux bases.

Un tronc pyramidal régulier est la portion de pyramide régulière comprise entre la base et une section parallèle à cette base. Les faces latérales sont des trapèzes isocèles égaux; la hauteur de chacun de ces trapèzes est appelée *apothème* du tronc.

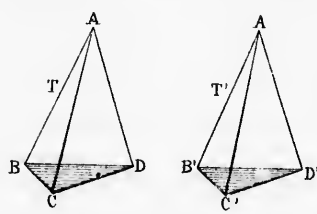
Proposition XI. — Théorème.

383. *Deux tétraèdres sont égaux :*

1º *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à des angles dièdres respectivement égaux, et semblablement disposés;*

2º *Lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre des faces respectivement égales, et semblablement disposées;*

3º *Lorsqu'ils ont trois faces respectivement égales, et semblablement disposées.*



1º Soient les deux tétraèdres T et T', ayant la face BCD égale à B'C'D', le dièdre BD égal au dièdre B'D', le dièdre BC égal à B'C', et le dièdre CD égal à C'D'.

Transportons la première figure sur la deuxième, de manière que la face BCD coïncide avec son égale B'C'D'.

L'angle dièdre BD étant égal à B'D', le plan BDA prend la position B'D'A'; de même le dièdre BC étant égal à B'C', le plan BCA prend la position B'C'A'; et la droite BA devant se trouver à la fois sur les plans B'DA' et B'C'A', coïncide avec leur intersection B'A'.

On prouverait de même que l'arête CA prend la direction C'A', et l'arête DA la direction D'A'. Ainsi les deux tétraèdres coïncident, ce qui prouve leur égalité.

2º Soient les deux tétraèdres T et T', ayant le dièdre AC égal au dièdre A'C', la face ACB égale à A'C'B', et la face ACD égale à A'C'D'.

Transportons la première figure sur la deuxième, de manière que la face ACB coïncide avec son égale A'C'B'; le dièdre AC étant égal à A'C', la face ACD prend la position A'C'D', et comme ces deux faces sont égales, elles coïncident. Dès lors, tous les sommets coïncidant, les tétraèdres sont égaux.

3° Soient les deux tétraèdres T et T', dans lesquels les trois faces qui forment les angles trièdres A et A' sont respectivement égales.

L'égalité de ces trois faces entraîne l'égalité des deux trièdres A et A' (n° 353, 3°). Transportons la figure T sur T', de manière que les angles trièdres A et A' coïncident; la face ABC étant égale à A'B'C', le point B tombe sur B', et le point C sur C'; de même la face ABD étant égale à A'B'D', le point D tombe en D'. Le triangle BCD a donc ses trois sommets en B', C', D', et les deux solides coïncident. Donc...

384. **Scolie.** 1° Les cas d'égalité qui viennent d'être étudiés sont analogues aux cas d'égalité des triangles (n° 47), ainsi qu'aux cas d'égalité des trièdres (n° 353).

2° *Deux polyèdres égaux sont décomposables en un même nombre de tétraèdres respectivement égaux et semblablement disposés.*

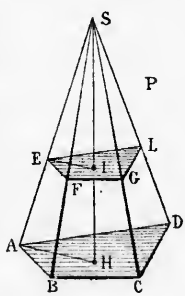
Proposition XII. — Théorème.

385. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à la base,*

1° *Les arêtes latérales et la hauteur sont divisées dans un même rapport;*

2° *La section et la base sont deux polygones semblables;*

3° *Ces deux polygones sont entre eux comme les carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*



Soit P une pyramide quelconque, et soit EG une section parallèle à la base AC; menons, sur ces deux plans, les lignes droites EI et AH.

1° Les droites FG et BC sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles EG et AC avec un troisième plan SBC (n° 315); et il en est de même des droites AB et EF, AD et EL, etc.

Donc le triangle SEF est semblable à SAB, SFG à SBC, etc.; de même le triangle SEI est semblable à SAH, à cause de EI parallèle à AH. Et comme tous ces triangles ont deux à deux des côtés communs, on a :

$$\frac{SF}{SB}=\frac{SG}{SC}=\frac{SL}{SD}=\frac{SE}{SA}=\frac{SI}{SH}\cdots$$

2° Le rapport de similitude étant le même pour tous ces triangles, on a aussi : $\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}=\frac{GL}{CD}=\frac{EL}{AD}$; ainsi les deux polygones EG et

AC ont leurs côtés dans un même rapport; de plus leurs angles sont respectivement égaux (nº 320); donc la section EG est semblable à la base AC...

3º La similitude des triangles qui ont le point S pour sommet commun, donne la relation $\frac{EF}{AB}=\frac{SE}{SA}=\frac{SI}{SH}$; d'où, en élevant au carré :

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{SE}^2}{\overline{SA}^2}=\frac{\overline{SI}^2}{\overline{SH}^2}$$

D'autre part, les deux polygones EG et AC étant semblables, on a :

$$\frac{\text{Polygone EG}}{\text{Polygone AC}}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{SE}^2}{\overline{SA}^2}=\frac{\overline{SI}^2}{\overline{SH}^2}\ldots \quad \text{Donc...}$$

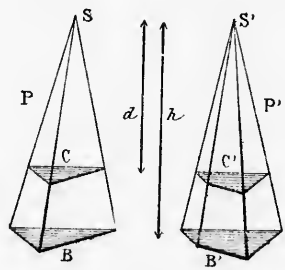
386. **Corollaires.** 1º *Tout plan qui coupe dans un même rapport trois arêtes latérales d'une pyramide est parallèle à la base de cette pyramide.*

2º *Si les arêtes latérales d'une pyramide sont coupées par plusieurs plans parallèles entre eux, les sections obtenues sont des polygones semblables, qui sont entre eux comme les carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

Proposition XIII. — Théorème.

387. *Si deux pyramides ont même hauteur, les sections faites à égale distance des sommets parallèlement aux bases sont entre elles comme ces mêmes bases.*

Soient P et P' deux pyramides ayant même hauteur h, et des bases



quelconques B et B'; soient C et C' des sections faites parallèlement aux bases, à une même distance d du sommet.

La première figure donne (nº 385, 3º) : $\frac{C}{B}=\frac{d^2}{h^2}$; et la deuxième figure : $\frac{C'}{B'}=\frac{d^2}{h^2}$; on a donc $\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$; d'où $\frac{C}{C'}=\frac{B}{B'}$. Donc...

388. **Corollaire.** *Si deux pyramides ont même hauteur et des bases*

équivalentes, les sections faites à égale distance des sommets parallèlement aux bases sont équivalentes.

Proposition XIV. — Théorème.

389. *La surface latérale d'une pyramide régulière égale la moitié du produit du périmètre de la base par l'apothème de la pyramide :*

$$S = \frac{1}{2} pl.$$

Car toutes les faces latérales sont des triangles isocèles égaux, ayant pour hauteur l'apothème de la pyramide, et pour bases les divers côtés de la base de la pyramide. Donc...

390. **Scolie.** 1° Si l'on développe sur un plan la surface latérale d'une pyramide régulière, on obtient un *secteur polygonal régulier* (n° 263).

2° *La surface totale d'une pyramide régulière égale le périmètre de la base multiplié par la demi-somme des deux apothèmes* (n° 381).

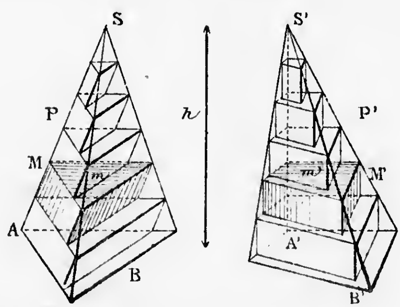
3° *La surface latérale d'un tronc pyramidal régulier égale son apothème multiplié par la demi-somme des périmètres des bases;* car cette surface se compose de trapèzes égaux ayant tous pour hauteur l'apothème du tronc, et pour bases les divers côtés des bases du tronc.

Proposition XV. — Théorème.

391. *Deux pyramides qui ont même hauteur et des bases équivalentes sont équivalentes.*

Soient les deux pyramides P et P' ayant même hauteur h et des bases équivalentes B et B'.

Supposons ces deux pyramides coupées par un même nombre de



plans parallèles aux bases, et équidistants entre eux. Toutes les sections ainsi déterminées sont équivalentes deux à deux (n° 388).

Considérons deux sections correspondantes m et m', et formons-en les bases supérieures de deux petits prismes dont les arêtes latérales seront parallèles à SA et S'A', et dont la hauteur sera la distance de deux plans sécants consécutifs. Ces deux prismes sont équivalents comme ayant même hauteur et des bases équivalentes (n° 377); et il en est de même de tous les prismes analogues que l'on peut former dans les deux solides.

Ainsi la somme des prismes formés en P est égale à la somme des prismes formés en P', et cela est vrai quel que soit le nombre des plans sécants. Or si le nombre de ces plans augmente indéfiniment, le volume formé par l'ensemble des prismes contenus dans la pyramide P croît, et tend vers le volume de cette pyramide; et le volume formé par l'ensemble des prismes contenus dans la pyramide P' croît aussi, et tend vers le volume de cette pyramide. Les deux sommes de prismes étant constamment égales entre elles pendant leurs vaiations, leurs limites P et P' sont aussi égales. Donc...

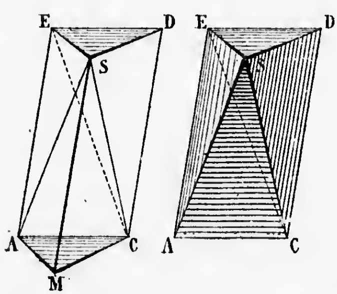
392. **Corollaire.** *Le sommet d'une pyramide peut se mouvoir dans un plan parallèle à la base sans que le volume soit changé.*

Et dans une pyramide triangulaire, chaque sommet peut se mouvoir parallèlement à la face opposée sans que le volume soit changé; car on peut prendre pour base une face quelconque.

Proposition XVI. — Théorème.

393. *Le volume d'une pyramide quelconque égale le tiers du produit de sa base par sa hauteur :* $V = \frac{1}{3} Bh$.

1° Considérons d'abord une pyramide trangulaire SAM[illegible] (nous nommerons toujours en premier lieu le point que nous choisirons comme sommet).

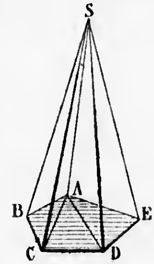


Achevons le prisme AMCDES, et concevons le plan sécant ESC. Le prisme se trouve ainsi formé de trois pyramides triangulaires, que nous allons comparer deux à deux.

Les deux pyramides $\overline{SAMC}$ et $\overline{CDES}$ sont équivalentes, comme ayant des bases égales (les deux bases du prisme), et même hauteur, qui est celle du prisme.

Dans la seconde pyramide, $\overline{CDES}$, on peut prendre pou[illegible] le point S; les deux pyramides $\overline{SCDE}$ et $\overline{SACE}$ sont équivalentes, comme ayant pour hauteur commune la distance du point S au plan AD, et pour bases les deux moitiés du parallélogramme ACDE.

Les trois pyramides sont donc équivalentes; et ainsi la pyramide $\overline{SAMC}$ est le tiers du prisme qui a même base et même hauteur; donc le volume de cette pyramide égale le tiers du produit de sa base par sa hauteur.



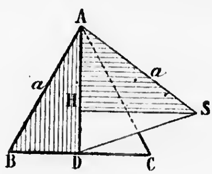
2° Une pyramide quelconque $S\overline{ABCDE}$ est décomposable en pyramides triangulaires ayant toutes même hauteur, et dont les bases réunies forment la base de la pyramide totale. Ainsi le volume total égale le tiers de la hauteur commune, multiplié par la somme des bases, c'est-à-dire par la base de la pyramide considérée. Donc...

394. **Corollaires.** *Deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits des bases par les hauteurs.*

2° *Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides de bases équivalentes sont entre elles comme les hauteurs.*

395. **Scolie.** *Tout prisme triangulaire est décomposable en trois pyramides équivalentes.*

2° *Le volume du tétraèdre régulier, en fonction de son arête* a, *est* $^1/_{12}\, a^3\sqrt{2}$. En effet, soit ABC la base d'un tétraèdre régulier, H le



pied de la hauteur, et ASD le rabattement d'une section faite dans le solide par la hauteur SH et par le point A. On a :

Volume $S\overline{ABC} = {}^1/_3$ surface $ABC \times SH = {}^1/_3 . \overline{BD} . \overline{AD} . \overline{SH}$

Or
$$BD = \frac{a}{2}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; \quad \text{d'où} \quad AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

La hauteur SH s'obtient par le triangle rectangle AHS, dans lequel $SA = a$, et $AH = {}^2/_3\, \overline{AD}$ (n° 183) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

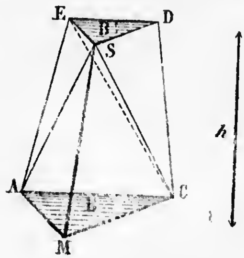
On a donc : $$\overline{SH}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

d'où
$$SH = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Le volume cherché est donc $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

Proposition XVII. — Théorème.

396. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles égale le tiers de la hauteur du tronc, multiplié par la somme des bases et de leur moyenne géométrique.*



1° Soit d'abord un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles, $\overline{AMCDES}$. Menons les plans SAC et ESC; le solide entier se trouve décomposé en trois pyramides triangulaires, $S\overline{AMC}$, $S\overline{CDE}$ et $S\overline{ACE}$, ou P′, P″, P‴.

La première $S\overline{AMC}$, a pour base la base inférieure B du tronc, et pour hauteur la distance des deux bases, c'est-à-dire la hauteur du tronc; son volume est donc $^1/_3\,Bh$.

Dans la deuxième pyramide, on peut prendre le point C pour sommet; la base B′ est la base supérieure du tronc, et la hauteur est encore la hauteur du tronc; le volume de cette seconde pyramide est donc $^1/_3\,B'h$.

La troisième pyramide $S\overline{ACE}$, et la seconde $S\overline{CDE}$, peuvent être considérées comme ayant le point S pour sommet commun; la hauteur commune est la distance du point S au plan AD; ces pyramides sont donc entre elles comme leurs bases ACE et CDE; or ces deux triangles ont même hauteur, savoir la distance entre les deux parallèles AC et DE; ils sont donc entre eux comme leurs bases AC et DE. Ces deux lignes étant des côtés homologues des triangles semblables B et B′, on a :
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{DE}^2}=\frac{B}{B'},\quad \text{d'où}\quad \frac{AC}{DE}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$$

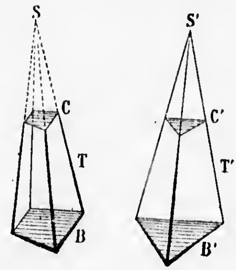
En rapprochant tous ces rapports égaux, on a :
$$\frac{P'''}{P''}=\frac{AC}{DE}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$$

d'où
$$P'''=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}\cdot P''=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}\cdot\frac{1}{3}B'h=\frac{1}{3}h\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}\cdot\sqrt{B'}\sqrt{B'}={}^1/_3\,h\sqrt{BB'}$$

Ainsi la troisième pyramide équivaut à une pyramide qui aurait pour hauteur la hauteur du tronc, et pour base une moyenne géométrique entre les deux bases du tronc.

La somme des trois pyramides donne pour le volume du tronc :
$$V={}^1/_3\,Bh+{}^1/_3\,B'h+{}^1/_3\,h\sqrt{BB'}$$
ou
$$V={}^1/_3\,h\,(B+B'+\sqrt{BB'})$$

2° Soit maintenant un tronc de pyramide quelconque, à bases parallèles B et C. Prolongeons les arêtes latérales de manière à terminer la pyramide en S; construisons une pyramide triangulaire S'B' ayant même hauteur, avec une base B' équivalente à B; et détachons, parallèlement à la base B', une pyramide partielle S'C' de même hauteur que SC.



Les bases B et B' étant équivalentes, les sections C et C' faites à des hauteurs égales sont équivalentes (nº 388). Les pyramides partielles SC et S'C' sont équivalentes, comme ayant même hauteur et des bases équivalentes (nº 391); il en est de même des pyramides totales SB et S'B', et par conséquent aussi des deux troncs T et T'.

Mais les bases étant équivalentes, on a, pour le tronc de pyramide T comme pour le tronc T', $T = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$. Donc...

Scolie. Soient a et a' deux côtés homologues des bases B et B', et soit k le rapport de similitude de ces mêmes bases.

On a $\dfrac{B'}{B} = \dfrac{a'^2}{a^2} = \left(\dfrac{a'}{a}\right)^2 = k^2$, d'où $B' = Bk^2$. En portant cette valeur de B' dans l'expression du volume du tronc, on a

$$V = \tfrac{1}{3}h\,(B + Bk^2 + \sqrt{B^2k^2})$$

ou

$$V = \tfrac{1}{3}h\,(B + Bk^2 + Bk)$$

ou enfin

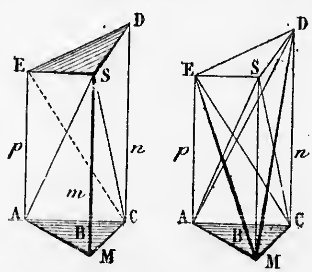
$$V = \tfrac{1}{3}Bh\,(1 + k + k^2)$$

Cette formule est commode pour les calculs pratiques.

Proposition XVIII. — Théorème.

397. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire égale la section droite multipliée par la moyenne arithmétique des trois arêtes latérales.*

1º Considérons d'abord un tronc de prisme triangulaire droit AMC DES; appelons B la base AMC, et m, n, p, les arêtes latérales. Menons les plans ASC et ESC. Le solide entier se trouve décomposé en trois pyramides triangulaires, $\overline{\text{SAMC}}$, $\overline{\text{SCDE}}$ et $\overline{\text{SACE}}$.



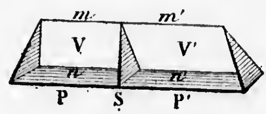
La première pyramide $\overline{\text{SAMC}}$ a B pour base et l'arête m pour hauteur; ainsi son volume est $\frac{1}{3}Bm$.

Dans la seconde pyramide SCDE, on peut transporter le sommet S en M, puis le sommet E en A (n° 392); et alors cette pyramide a pour base AMC ou B, et pour hauteur l'arête n; son volume est donc $^1/_3\,Bn$.

Dans la troisième pyramide $\overline{SACE}$, il suffit de transporter le sommet S en M, et la pyramide a alors pour base AMC ou B, et pour hauteur l'arête p; son volume est donc $^1/_3\,Bp$.

Et le volume total égale $^1/_3\,B\,(m+n+p)$ ou bien $B\,.\,\dfrac{m+n+p}{3}$

2° Si le tronc triangulaire AB n'a pas ses arêtes latérales perpendiculaires à l'une des bases, on fait une section droite S qui partage ce solide en deux troncs de prismes droits V et V'.



On a $V = {}^1/_3\,S\,(m+n+p)$, et $V' = {}^1/_3\,S\,(m'+n'+p')$. Donc le volume total égale $^1/_3\,S\,(m+n+p+m'+n'+p')$, ou la section droite S multipliée par le $^1/_3$ de la somme des trois arêtes latérales. Donc...

§ III. — DES POLYÈDRES SEMBLABLES

398. **Définition.** On appelle *polyèdres semblables* des polyèdres qui ont les faces respectivement semblables, et les angles solides respectivement égaux.

399. Il résulte de cette définition que *dans deux polyèdres semblables*,

1° *Les dièdres homologues sont égaux*, car ces dièdres appartiennent à des angles solides qui peuvent coïncider;

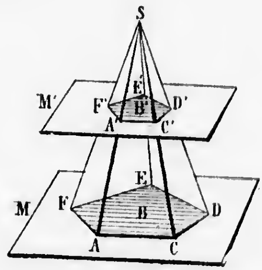
2° Que *toutes les dimensions homologues sont dans un même rapport;* car les arêtes homologues appartiennent à des polygones semblables reliés entre eux par des dimensions communes, et les autres lignes homologues peuvent être reliées aux arêtes homologues par des triangles semblables.

Proposition XIX. — Théorème.

400. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide détermine une nouvelle pyramide semblable à la première.*

Soit SB une pyramide quelconque, et soit M' un plan parallèle au plan M de la base B. Il s'agit de prouver que les deux pyramides SB' et SB ont les faces semblables chacune à chacune, et les angles solides respectivement égaux.

1° Les plans M et M' étant parallèles, les figures B et B' sont semblables (n° 385); les droites AC et A'C' sont parallèles (n° 315); donc les triangles SAC et SA'C' sont semblables, et il en est de même des autres faces latérales.



2° L'angle solide S est commun aux deux pyramides; dans les trièdres A et A', les angles des faces sont respectivement égaux comme appartenant à des polygones semblables; ainsi ces angles trièdres A et A' sont égaux (n° 353, 3°), et il en est de même des autres trièdres Donc...

Scolie. Si l'on suppose les arêtes indéfiniment prolongées, le théorème est vrai quelle que soit la position du plan sécant; si ce plan est mené au delà du sommet, les éléments sont disposés dans un ordre inverse.

Proposition XX. — Théorème.

401. *Deux tétraèdres sont semblables :*

1° *Lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à des dièdres respectivement égaux, et semblablement placés ;*

2° *Lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre des faces respectivement semblables, et semblablement placées ;*

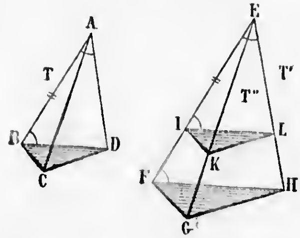
3° *Lorsqu'ils ont trois faces respectivement semblables, et semblablement placées.*

1er *Cas.* Soient les deux tétraèdres T et T', ayant les faces ABD et EFH semblables, et les dièdres AB, AD et BD, respectivement égaux aux dièdres EF, EH, FH. Prenons la longueur EI égale à AB, et menons le plan IKL parallèle à FGH. Le tétraèdre T'' ainsi déterminé est semblable à T' (n° 400), et il suffit de prouver l'égalité des deux tétraèdres T et T''.

Les triangles ABD et EIL, semblables chacun au triangle EFH, sont semblables entre eux; et comme le côté AB égale EI, ces deux triangles sont égaux.

Par hypothèse, les dièdres AB, AD et BD, sont respectivement égaux à EF, EH, FH; les dièdres FH et IL sont égaux comme correspondants; ainsi le dièdre BD égale IL, et les deux tétraèdres T et T'' sont égaux comme ayant une face égale adjacente à des dièdres respectivement égaux (n° 383, 1°). Donc le tétraèdre T est semblable à T'.

2e *cas.* Soient les deux tétraèdres T et T' ayant le dièdre AB égal à EF, la face ABD semblable à EFH, et la face ABC semblable à EFG. Prenons la longueur EI égale à AB, et menons le plan IKL parallèle à FGH. Le tétraèdre T'' ainsi déterminé est semblable à T' (n° 400), et il suffit de prouver l'égalité des deux tétraèdres T et T''.



Les triangles ABD et EIL, semblables chacun au triangle EFH, sont semblables entre eux; et comme le côté AB égale EI, ces deux triangles sont égaux.

De même les triangles ABC et EIK, semblables chacun au triangle EFG, sont semblables entre eux; et comme le côté AB égale EI, ces deux triangles sont égaux. Donc les deux tétraèdres T et T'' sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre des faces respectivement égales (n° 383, 2°); et le tétraèdre T est semblable à T'.

3e *cas.* Soient les deux tétraèdres T et T' ayant les trois faces de l'angle solide A respectivement égales aux trois faces de l'angle solide E. Prenons la longueur EI égale à AB, et menons le plan IKL parallèle à FGH. Le tétraèdre T'' ainsi déterminé est semblable à T' (n° 400), et il suffit de prouver l'égalité des deux tétraèdres T et T''.

Les triangles ABD et EIL, semblables chacun au triangle EFH, sont semblables entre eux, et comme le côté AB égale EI, ces deux triangles sont égaux, et AD = EL.

On démontrerait de même que le triangle ABC = EIK, et que ADC = ELK. Donc les deux tétraèdres T et T'' sont égaux comme ayant trois faces respectivement égales, et le tétraèdre T est semblable à T'. Donc...

402. **Scolie.** Les cas de similitude qui viennent d'être établis pour les tétraèdres sont analogues aux cas de similitude des triangles (n° 190), et même aux cas d'égalité des triangles (n° 47), des trièdres (n° 353), et des tétraèdres (n° 383). Dans chaque cas de similitude des tétraèdres, le cas d'égalité correspondant a été appliqué entre le tétraèdre donné T et le tétraèdre auxiliaire T''.

Proposition XXI. — Théorème.

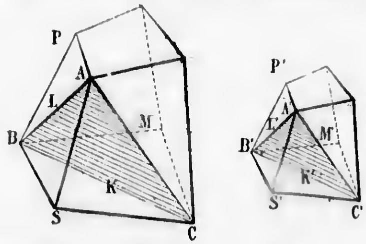
403. *Deux polyèdres semblables sont décomposables en un même nombre de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés.*

Soient P et P' deux polyèdres semblables. Menons les plans ABC et A'B'C'.

Les deux tétraèdres $S\overline{ABC}$ et $S'\overline{A'B'C'}$ sont semblables, comme ayant les faces qui forment les angles S et S' respectivement semblables; car ces faces appartiennent à des polygones semblables (nº 398).

Nous allons prouver que si on enlève ces deux tétraèdres, les polyèdres qui restent sont semblables.

Les faces ABC et A'B'C' sont semblables comme appartenant aux



tétraèdres semblables déjà considérés. Les faces modifiées K et K' ont été diminuées de l'un des triangles semblables dont elles étaient composées, et il en est de même des faces L et L', et des faces M et M' : ainsi les nouvelles faces sont respectivement semblables.

Les angles solides A et A' pouvaient coïncider (nº 398), et il en est de même des parties qui leur ont été enlevées; donc les angles solides restants en A et A' sont égaux. De même les angles solides qui restent en B et B', en C et C' sont égaux.

Donc les polyèdres qui restent après l'enlèvement des deux tétraèdres sont semblables.

Et l'on peut répéter, sur les nouveaux polyèdres, l'opération déjà faite dans les solides primitifs, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux tétraèdres, lesquels sont encore semblables entre eux *. Donc...

404. Réciproquement : *Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés sont semblables.*

En effet, les angles solides sont égaux deux à deux, comme étant formés de trièdres respectivement égaux et semblablement disposés : et les faces sont semblables deux à deux, comme étant formées de triangles respectivement semblables et semblablement disposés. Donc...

Proposition XXII. — Théorème.

405. *Les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des dimensions homologues.*

1º Soient d'abord deux tétraèdres semblables P et P'. Les bases B et B' sont entre elles comme les carrés des lignes homologues (nº 271); et dans les deux solides, toutes les lignes homologues sont dans un même rapport (nº 399, 2º).

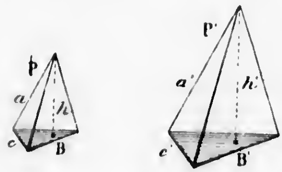
* S'il y a plus de trois arêtes en un même sommet, on peut disposer les sections de manière à obtenir, dans tous les cas, des pyramides triangulaires.

On a donc : $$\frac{h}{h'}=\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=\frac{1/_3 h}{1/_3 h'}$$

On a aussi : $$\frac{h^2}{h'^2}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{c^2}{c'^2}=\frac{B}{B'}$$

D'où, en multipliant membre à membre :

$$\frac{h^3}{h'^3}=\frac{a^3}{a'^3}=\frac{c^3}{c'^3}=\frac{1/_3 Bh \text{ ou } P}{1/_3 B'h' \text{ ou } P'}$$



2° Soient deux polyèdres semblables quelconques P et P'; A, B, C,... A', B', C',... les pyramides semblables qui forment ces polyèdres; et enfin m et m' deux arêtes homologues quelconques.

Toutes les arêtes homologues sont dans le même rapport $\frac{m}{m'}$ (n° 399, 2°), et les pyramides partielles sont entre elles dans le rapport $\frac{m^3}{m'^3}$: ainsi on a : $\frac{m^3}{m'^3}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\dots=\frac{A+B+C\dots \text{ ou } P}{A'+B'+C'\dots \text{ ou } P'}$ Donc...

406. **Scolie.** Soient m et m' deux dimensions homologues de deux polyèdres semblables, S et S' deux surfaces homologues, V et V' deux volumes partiels homologues, P et P' les polyèdres entiers.

On a : $$\frac{P}{P'}=\frac{V}{V'}=\frac{m^3}{m'^3}$$

et $$\frac{S}{S'}=\frac{m^2}{m'^2}$$

Ainsi *le rapport des surfaces homologues est égal au carré du rapport des dimensions homologues,*

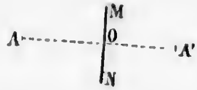
Et *le rapport des volumes homologues est égal au cube du rapport des dimensions homologues.*

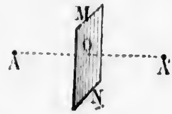
§ IV. — DE LA SYMÉTRIE

Définitions.

407. *Deux points sont symétriques* par rapport à un *centre*, lorsque ce dernier point est le milieu de la droite qui joint les premiers.

Deux points sont symétriques par rapport à une *droite*, lorsque cette ligne est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points. La droite est appelée *axe de symétrie*.





Deux points sont symétriques par rapport à un *plan*, lorsque ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

408. *Deux figures sont symétriques* par rapport à un *centre*, à un *axe* ou à un *plan*, lorsque chaque point de la première a son symétrique dans la seconde, et réciproquement.

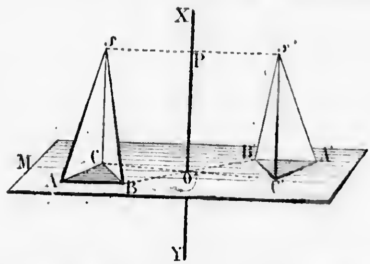
Dans deux figures symétriques, les points symétriques sont aussi appelés *points homologues*.

Proposition XXIII. — Théorème.

409. *Deux figures symétriques par rapport à un axe sont superposables.*

Soient SABC et S'A'B'C' deux polyèdres symétriques par rapport à l'axe XY.

Si l'on fait faire à la figure SABC une demi-révolution autour de



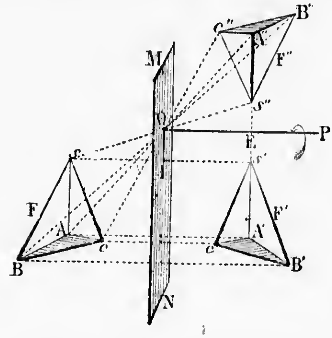
l'axe XY, les points S, A, B, C, viennent se placer respectivement en S', A', B', C', et les deux figures coïncident. Donc...

Corollaire. La symétrie par rapport à un axe ne présente pas d'autres propriétés que celles des figures égales. En conséquence, il ne sera question, dans ce qui va suivre, que des deux autres genres de symétrie.

Proposition XXIV. — Théorème de Bravais.

410. *Si deux figures sont symétriques par rapport à un plan, on peut les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre pris à volonté dans ce plan.*

Soient les deux figures F et F′ symétriques par rapport au plan MN, O un point quelconque pris sur ce plan, et F″ la figure symétrique de F par rapport au point O.



Menons la droite OP perpendiculaire au plan MN; joignons les points homologues des deux figures F et F″, et de même les points homologues des figures F et F″; enfin menons OI et S′S″.

Les droites OP et SS′ sont parallèles comme étant perpendiculaires au même plan MN; donc la droite OP est dans le plan du triangle SS′S″; et comme le point O est le milieu de SS″, le point E est aussi le milieu de S′S″ (nº 179).

D'autre part, dans le triangle SS′S″, la droite OI est parallèle au côté S′S″, comme joignant les milieux des deux autres côtés SS′ et SS″; donc OP, perpendiculaire à OI, est aussi perpendiculaire à S′S″, et les deux points S′ et S″ sont symétriques par rapport à l'axe OP.

On démontrerait de même, par rapport à cet axe OP la symétrie des points A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″..., et par suite la symétrie des deux figures F′ et F″ par rapport à ce même axe.

Or, par une demi-révolution autour de l'axe OP, la figure F′ viendrait coïncider avec F″. Donc...

411. *Réciproquement, si deux figures sont symétriques par rapport à un centre, on peut les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque mené par ce point.*

Soient les deux figures F et F″ (même figure) symétriques par rapport au centre O, MN un plan quelconque mené par ce point, et F′ la figure symétrique de F par rapport au plan MN.

Si l'on mène l'axe OP perpendiculaire au plan M, on démontrera absolument comme au théorème direct, que les deux figures F′ et F″ sont symétriques par rapport à l'axe OP.

Or, par une demi-révolution autour de l'axe OP, la figure F″ viendrait coïncider avec F′. Donc...

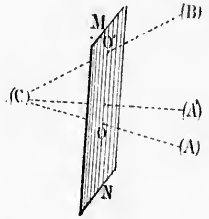
Corollaire. *Si, pour une figure donnée* F, *on considère deux symétriques, l'une* F′ *par rapport à un plan, et l'autre* F″ *par rapport à un centre, ces deux symétriques* F′ *et* F″ *sont superposables.*

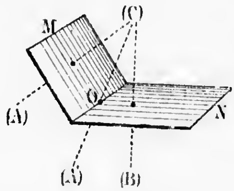
Proposition XXV. — Théorème de Bravais.

412. 1º *Deux figures symétriques d'une même figure par rapport à des centres différents sont égales.*

Soient A et B deux figures symétriques de C, la première par rapport au centre O, et la seconde par rapport au centre O'.

Par les deux points O et O', menons un plan quelconque MN. La figure A peut être transportée en A', de manière à être symétrique de C par rapport au plan MN mené par le point O (nº 411); et de cette position A', la figure peut être transportée en B, de manière à être symétrique de C par rapport au centre O' pris sur le plan MN (nº 410): et alors les deux figures A et B coïncident. Donc...





2º *Deux figures symétriques d'une même figure par rapport à des plans différents sont égales.*

Soient A et B deux figures symétriques de C, la première par rapport au plan M, et la seconde par rapport au plan N. Considérons un point quelconque O de l'intersection des deux plans.

La figure A peut être transportée en A', de manière à être symétrique de C par rapport au point O pris dans le plan M (nº 410); et de cette position A', la figure peut être transportée en B, de manière à être symétrique de C par rapport au plan N qui contient le point O (nº 411); et alors les deux figures A et B coïncident. Donc...

Scolie. Si l'on ne fait attention qu'à la forme des figures, toute propriété démontrée dans la symétrie par rapport à un point, se trouve par là même établie dans la symétrie par rapport à un plan. Cette remarque permet de choisir tel genre de symétrie que l'on voudra, pour la démonstration de chaque propriété.

Proposition XXVI. — Théorème.

413. *Une figure plane quelconque a pour symétrique une autre figure plane égale à la première.*

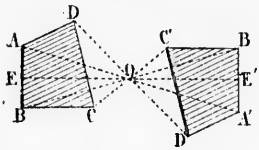
1º Soit AB une droite quelconque, O le centre de symétrie, A' et B' les points symétriques de A et de B.

Menons la droite A'B'. Les points A et A' étant symétriques, on a OA = OA; de même OB = OB', et les triangles OAB et OA'B' sont égaux comme ayant en O un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; donc le côté AB égale A'B', et ces droites sont parallèles, à cause des angles égaux OAB et OA'B' (nº 72).

Soit EE' une sécante quelconque menée par le centre de symétrie : les triangles OAE et OA'E' sont égaux comme ayant un côté égal (OA, OA'), adjacent à des angles respectivement égaux; donc OE = OE' et les deux points E et E' sont symétriques; ainsi les droites AB et A'B' sont symétriques, puisque chaque point de l'une a son symétrique dans l'autre.

Donc *une ligne droite a pour symétrique une autre ligne droite, égale et parallèle à la première.*

2° Soit ABC un angle quelconque, O le centre de symétrie, A'B' et B'C' les droites symétriques de AB et de BC.



Les angles ABC et A'B'C' sont égaux comme ayant les côtés respectivement parallèles et dirigés tous les deux en sens opposés; de plus, les plans de ces angles sont parallèles. Donc *un angle a pour symétrique un autre angle égal au premier, et les plans de ces angles sont parallèles* (n° 320).

3° Soit le plan AC, et soit O le centre de symétrie. Par un point quelconque B pris dans ce plan, menons à volonté, dans ce même plan, les droites BA et BC, puis leurs symétriques B'A' et B'C'.

Ces dernières droites sont parallèles aux premières (1er cas ci-dessus); ainsi les plans AC et A'C' sont parallèles, et un point quelconque de l'un a son symétrique dans l'autre. Donc *un plan a pour symétrique un autre plan parallèle au premier.*

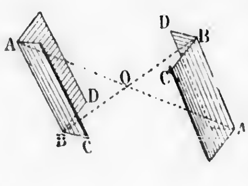
4° Soit le polygone plan ABCD, et soit O le centre de symétrie.

Si l'on prend les points A', B', C', D', symétriques de A, B, C, D, les deux polygones ABCD et A'B'C'D' ont les côtés respectivement égaux et parallèles; les angles sont respectivement égaux, et les plans AC et A'C' sont parallèles; ainsi *ces polygones sont égaux, et leurs plans sont parallèles.*

Donc, *par rapport à un centre, une figure plane quelconque a pour symétrique une autre figure plane, égale et parallèle à la première.*

Le théorème pourrait être démontré d'une manière analogue dans la symétrie par rapport à un plan; mais on remarquera que c'est seulement dans le cas d'un centre que les figures planes symétriques sont parallèles.

Proposition XXVII. — Théorème.



414. *Un angle dièdre a pour symétrique un autre angle dièdre égal au premier.*

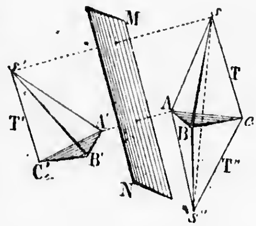
Car si l'on considère la symétrie *par rapport à un centre* O, chaque plan du dièdre AB a pour symétrique un plan qui lui est parallèle (n° 413, 3°), et ainsi les deux dièdres AB et A'B' sont égaux (n° 329, 9°).

415. **Corollaire.** *Deux angles solides symétriques ont leurs faces respectivement égales, et leurs dièdres respectivement égaux.* Mais comme ces éléments sont disposés de part et d'autre dans un ordre inverse, les deux angles solides ne sont pas superposables. On dit alors qu'il y a *égalité par symétrie.*

Proposition XXVIII. — Théorème.

416. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

1° Soient d'abord deux tétraèdres T et T' symétriques par rapport au plan MN; construisons un troisième tétraèdre T'' symétrique de T par rapport au plan de la base ABC.



Les deux points S et S'' étant symétriques, sont équidistants du plan ABC; ainsi les deux tétraèdres T et T'' sont équivalents comme ayant même base et même hauteur.

Or les deux figures T' et T'' symétriques de T par rapport à des plans différents sont égales (n° 412, 2°); donc T' est équivalent à T.

2° Deux polyèdres symétriques quelconques sont décomposables en tétraèdres symétriques équivalents; donc les polyèdres totaux sont eux-mêmes équivalents.

EXERCICES SUR LE LIVRE VI

Théorèmes à démontrer.

1. Le volume d'un prisme triangulaire égale le produit d'une face latérale quelconque par la moitié de la distance de cette face à l'arête opposée.

2. Le volume d'un prisme régulier égale le produit de la surface latérale par la moitié de l'apothème de la base.

3. Le volume d'une pyramide régulière égale la surface latérale multipliée par le $1/3$ de la distance d'une face latérale au centre de la base.

4. Le volume d'un tétraède égale le $1/3$ d'une arête quelconque multipliée par la projection du solide entier sur un plan perpendiculaire à cette arête.

5. Si une pyramide a pour base un trapèze, le volume de cette pyramide égale le $1/3$ de la somme des bases du trapèze, multiplié par la projection du solide entier sur un plan perpendiculaire à ces mêmes bases.

6. Dans un tétraèdre, les 3 droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se rencontrent en un même point qui est le milieu de chacune d'elles.

7. Par un point quelconque de la base d'une pyramide régulière, on mène une perpendiculaire qui rencontre toutes les faces latérales, prolongées s'il est nécessaire. Démontrer que la somme des distances du pied de la perpendiculaire

aux points d'intersection de cette droite avec les faces latérales est constante, quelle que soit la position du point pris sur la base.

8. Dans un tétraèdre quelconque, les 6 plans bissecteurs des dièdres se rencontrent en un même point, qui est équidistant des 4 faces.

9. Sur les trois faces latérales d'une pyramide triangulaire dont le sommet est S, on construit des prismes triangulaires quelconques, dont les bases supérieures prolongées convenablement se rencontrent en un point commun O. Sur la base de la pyramide primitive, on construit un prisme dont les arêtes latérales ont pour longueur et pour direction OS. Démontrer que ce dernier prisme vaut la somme des trois autres.

10. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier servent de sommets à un octaèdre régulier.

11. Si la hauteur d'un prisme triangulaire égale 2 fois le diamètre du cercle circonscrit à la base, le prisme équivaut au parallélipipède qui aurait pour dimensions les trois côtés de cette même base.

12. Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle solide compris sous trois faces respectivement égales, et semblablement placées.

13. Deux droites symétriques par rapport à un plan font avec ce plan des angles égaux.

14. Si deux plans sont symétriques par rapport à un troisième, ce dernier plan est bissecteur de l'angle des deux premiers.

15. Il ne peut exister que 5 polyèdres réguliers convexes.

Problèmes.

1. Calculer la diagonale d'une caisse qui a la forme et les dimensions d'un mètre cube.

2. Calculer la diagonale d'un cube qui a 1 mètre carré de surface totale.

3. Une salle a la forme d'un parallélipipède rectangle; la diagonale a $14^{m}50$, et les 3 dimensions sont entre elles comme les nombres 3, 6 et 7. Quel est le volume d'air contenu dans cette salle?

4. Une caisse d'emballage a été garnie intérieurement d'une enveloppe de zinc présentant un développement superficiel de $3^{m}60$; la longueur de la caisse est double de sa largeur; et les surfaces extrêmes sont des carrés égaux. On demande le volume intérieur.

5. Que coûtera la maçonnerie d'un pavillon octogonal régulier de 3 mètres de côté, 4 mètres de hauteur hors de terre, et 1 mètre de fondation, à raison de 5 francs le mètre carré extérieur de maçonnerie? (Les vides des portes et fenêtres se comptent comme les parties pleines).

6. Une salle de classe a 8 mètres de longueur, 7 de largeur et 4 de hauteur. Le plafond et les murs doivent être peints à la colle, à raison de 0 fr. 30 le mètre carré. Quelle sera la dépense?

7. Les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle étant a, b, c, exprimer le volume de ce parallélipipède, sa surface totale, la diagonale, la somme des arêtes, et enfin l'arête du cube équivalent.

8. L'arête d'un cube étant a, trouver l'expression de la diagonale de ce cube, et de la surface d'une section faite par deux arêtes opposées.

9. La densité du plomb fondu étant 11,35, quelle arête faudrait-il donner à un cube de plomb pour que le poids fût de 1 kilogramme?

10. La couronne d'Hiéron, roi de Syracuse, pesait dans l'air 7 465 grammes, et perdait dans l'eau les 625 millièmes de son poids. Quel était son volume? quelle était sa densité?

11. Un terrain rectangulaire de 130 mètres sur 65, est en contre-haut de 6 mètres par rapport à une route qui le longe. On veut mettre cet emplacement de niveau avec la route, et les terres enlevées seront employées à la construction d'un remblai de chemin de fer.

La coupe de ce remblai est un trapèze de 10 mètres de hauteur; la largeur est de 10 mètres en haut et de 30 mètres en bas. Quelle longueur du remblai fournira le terrain ci-dessus.

12. La grande pyramide de Chéops, en Égypte, a pour base un carré de 230 mètres de côté, et les faces latérales sont des triangles équilatéraux. Quel est le volume?

13. Les deux bases d'un tronc de pyramide ont, l'une 8 mètres carrés, l'autre 2 mètres carrés. On veut construire un prisme équivalent ayant la même hauteur (qu'on ne donne pas), et ayant une base carrée. Quel sera le côté de cette base?

14. L'obélisque de Louqsor, qu'on voit à Paris sur la place de la Concorde, est un monolithe en granit, dont la partie principale est un tronc pyramidal à base carrée, ayant 21m60 de hauteur. Les côtés des bases ont respectivement 2m42 et 1m54. On demande le poids de cette pierre, sachant que la densité du granit est 2,75.

15. Un tas de pierres menues est posé sur un rectangle de 4 mètres sur 1m50; il s'élève à une hauteur de 0m60; les faces latérales sont en talus, et le dessus est un rectangle de 3 mètres sur 0m50. On demande le volume.

16. La densité de la fonte de fer est 7,20. Quel est le volume d'une masse de fonte pesant 25 kilogrammes?

17. De 1795 à 1860, on a fabriqué en France une somme de 5 milliards en pièces d'or au titre $^9/_{10}$. La densité de l'or fondu est 19,258, et celle du cuivre 8,788. Si l'on faisait fondre toute cette monnaie d'or, et si l'on faisait un cube de tout l'or, et un autre de tout le cuivre contenu, quelles seraient les arêtes de ces cubes?

18. Dans le cas où l'on fait les plans d'un bâtiment à l'échelle de 1 centimètre pour mètre, que sont les dimensions, surfaces et volumes, représentés au plan, à l'égard des dimensions, surfaces et volumes réels?

19. Quel est le volume d'un tétraèdre régulier ayant 1 décimètre d'arête?

20. Quelle arête faut-il donner à un tétraèdre régulier pour que le volume soit de 1 décimètre cube?

21. Quelle est la hauteur d'un tétraèdre régulier ayant 1 mètre carré de surface totale?

22. Un dodécaèdre régulier a 0m12 d'arête, quelle est l'arête d'un autre dodécaèdre régulier dont le volume est double du premier?

23. Par chaque sommet d'un tétraèdre quelconque, on mène un plan parallèle à la face opposée. On demande ce qu'est le nouveau tétraèdre à l'égard du premier.

24. Une pyramide de 0m36 de hauteur a pour base un hexagone régulier de 0m12 de côté. 1° A quelle distance du sommet se trouve une section parallèle à la base, si la surface de cette section est de 1 décimètre carré? — 2° A quelle distance est la section si le volume du tronc restant est de 2 décimètres cubes?

25. A quelle distance du sommet faut-il couper une pyramide parallèlement à la base, pour que les deux parties soient équivalentes?

26. Dans quel rapport faut-il couper la hauteur d'une pyramide parallèlement à la base, pour diviser cette pyramide en 3, 4, ... n parties équivalentes?

27. A quelle distance du sommet faut-il couper une pyramide parallèlement à la base, pour que les deux parties du solide soient entre elles comme 5 est à 3?

28. Un tronc pyramidal a pour volume 1 décimètre cube, et pour hauteur 15 centimètres; l'une des bases est un carré de 6 centimètres de côté. Calculer le côté de l'autre base.

29. Un tronc pyramidal a pour volume 1 décimètre cube, et pour bases des triangles équilatéraux de 12 et 7 centimètres de côté. Calculer la hauteur.

30. Un plateau parallélipipède en bois de hêtre de 0^m20 d'épaisseur, est mis en flottaison sur l'eau; on demande l'épaisseur de la partie qui surnage, si la densité de ce plateau est 0,80.

31. Un bassin de 0^m75 de profondeur a la forme d'un prisme droit; la base est un octogone régulier de 6 mètres de côté. Quelle est la contenance de ce bassin?

32. Un prisme droit hexagonal régulier a une hauteur de 1 décimètre et une surface totale de 3 décimètres carrés; ce prisme est en étain (densité 7,29). On demande le volume et le poids du solide.

33. Un parallélipipède rectangle a un décimètre de hauteur et 6 décimètres carrés de surface totale; la longueur est double de la largeur. On demande le volume.

34. Tracer sur un carton le développement de chacun des cinq polyèdres réguliers, en prenant pour chacun une arête de 1 décimètre.

LIVRE VII

LES TROIS CORPS RONDS

---

§ I. — DU CYLINDRE

Définitions.

417. On appelle *solides de révolution* les solides qui sont engendrés par une figure plane tournant autour d'un *axe*.

Cet axe doit être dans le même plan que la surface tournante, et ne doit pas la couper.

Les lignes de la surface tournante engendrent des *surfaces de révolution*.

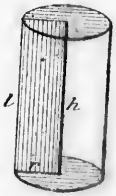
Ces lignes mobiles sont des *génératrices;* chacun de leurs points décrit une circonférence appelée *parallèle;* les plans menés par l'axe coupent la surface de révolution suivant des lignes que l'on nomme *méridiens*.

Tous les méridiens d'une même figure sont égaux, et chacun d'eux peut être regardé comme la génératrice de la surface de révolution.

Le *méridien principal* est le méridien parallèle au plan sur lequel on représente le corps considéré.

Les solides de révolution les plus importants sont : le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*.

418. On appelle *cylindre de révolution* ou *cylindre circulaire droit*, le solide engendré par la révolution complète d'un rectangle autour de l'un de ses côtés.



Le côté h autour duquel tourne le *rectangle générateur* est à la fois l'*axe* et la *hauteur*.

Le côté l opposé à l'axe est la *génératrice* ou le *côté* du cylindre; pendant le mouvement, ce côté engendre la *surface latérale* du cylindre.

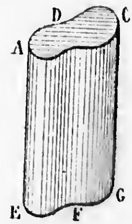
Les deux autres côtés du rectangle générateur sont les *rayons* du cylindre, et ils engendrent les deux cercles qui servent de bases au solide. Ces bases sont perpendiculaires à l'axe.

419. Un *tronc de cylindre* est la portion de cylindre comprise entre la base et une section non parallèle à cette base.

420. *Le cylindre de révolution est la limite du prisme régulier dans lequel le nombre des faces augmente indéfiniment; et il peut lui-même être considéré comme un prisme régulier d'une infinité de faces.*

Il suit de là que l'*on peut appliquer au cylindre de révolution les propriétés du prisme régulier.*

Par exemple : *Toute section faite parallèlement aux bases d'un cylindre de révolution est un cercle égal à ces mêmes bases* (nº 366).



421. En général, on appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par une droite indéfinie AE qui se meut dans l'espace, en restant toujours parallèle à elle-même.

Si la droite génératrice revient à sa position première AE, elle a engendré une *surface cylindrique fermée.*

On considère quelquefois la génératrice comme devant glisser le long d'une ligne donnée ACD, que l'on nomme *directrice.*

Un *cylindre quelconque* est le solide compris entre deux plans parallèles, et terminé latéralement par une surface cylindrique. On peut le considérer comme un prisme quelconque d'une infinité de faces.

Dans un cylindre quelconque, on nomme *section droite* toute section faite perpendiculairement à la génératrice.

422. *Si les génératrices d'un cylindre sont coupées par des plans parallèles, les sections obtenues sont égales entre elles* (nº 367).

Toutes les sections droites d'un cylindre sont égales entre elles (nºs 314 et 367).

Proposition I. — Théorème.

423. *La surface latérale d'un cylindre droit égale la hauteur multipliée par la circonférence de la base.*

Car la formule $S = ap$, qui exprime la surface latérale d'un prisme droit, peut être appliquée au cylindre droit qui en est la *limite.*

424. **Scolie.** 1º En développant sur un plan la surface latérale d'un cylindre droit, on obtient un *rectangle,* qui a pour dimensions la hauteur du cylindre et la circonférence de la base.

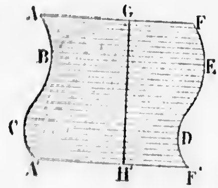
2º Soit r le rayon d'un *cylindre de révolution*, et h sa hauteur : *la surface latérale aura pour expression* $2\pi rh$,

et la surface totale $2\pi r\ (h + r)$

Proposition II. — Théorème.

425. *La surface latérale d'un cylindre quelconque égale le côté multiplié par le contour d'une section droite.*

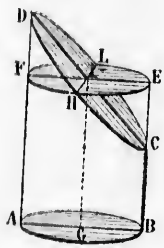
Car la formule qui exprime la surface latérale d'un prisme quelconque (nº 369) peut être appliquée au cylindre qui en est la limite.



426. **Scolie.** Le développement de la surface latérale d'un cylindre quelconque, présente une forme analogue à celle que donne un prisme quelconque (nº 370); mais les lignes brisées données par les périmètres des bases deviennent ici des lignes courbes, ABC, DEF. Le contour de la section droite devient une ligne droite GH perpendiculaire à la génératrice AF.

Proposition III. — Théorème.

427. *Dans un tronc de cylindre de révolution, la surface latérale est égale à l'axe multiplié par la circonférence de la base.*



Soit le tronc cylindrique droit ABCD. Par le point I, extrémité supérieure de l'axe, concevons le plan EF parallèle à la base AB, et prolongeons la surface latérale en HCEL jusqu'à la rencontre de ce plan.

Faisons tourner le solide HLFD autour de HL, jusqu'à ce que le demi-cercle HLF coïncide avec HLE; le triangle rectangle IFD coïncidera avec IEC, les dièdres opposés par l'arête HL coïncideront, aussi bien que les deux solides LHFD et HLEC.

Il suit de là que le tronc donné ABCD est équivalent, tant pour la surface latérale que pour le volume, à un cylindre qui aurait pour base le cercle AB, et pour hauteur l'axe GI. Donc...

428. **Scolie.** L'axe GI égale la demi-somme de deux génératrices diamétralement opposées.

Proposition IV. — Théorème.

429. *Le volume du cylindre égale le produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, la formule $S = Bh$ qui exprime le volume d'un prisme (nº 376) est applicable au cylindre, qui en est la limite.

430. **Scolie.** 1º Le volume d'un cylindre de révolution a pour formule $\pi r^2 h$.

2° *Le volume d'un cylindre oblique égale la section droite multipliée par le côté du cylindre* (n° 378).

3° Soit B la base d'un cylindre oblique, S une section droite, h la hauteur, et l le côté; on a $Bh = Sl$; d'où $\frac{B}{S} = \frac{l}{h}$

Donc *la base est à la section droite comme le côté est à la hauteur.*

4° *Deux cylindres quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

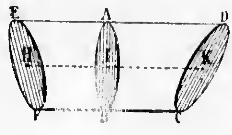
Deux cylindres de même base sont entre eux comme les hauteurs, et deux cylindres de même hauteur sont entre eux comme les bases.

Proposition V. — Théorème.

431. *Le volume d'un tronc de cylindre de révolution égale l'axe multiplié par la base.*

Car ce solide équivaut au cylindre droit qui, avec la même base, aurait l'axe pour hauteur (voir la démonstration relative à la surface latérale, n° 427).

432. **Scolie.** 1° Un cylindre de révolution EC peut être tronqué par les deux extrémités. *Son volume égale la section droite* AB *multipliée par l'axe* HK. Car l'une des parties a pour volume le cercle AB multiplié par IK, et l'autre le même cercle AB multiplié par IH.

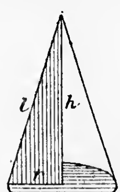


2° *L'axe* HK *est égal à la demi-somme de deux génératrices diamétralement opposées;* car dans le plan qui contient ces trois lignes, les génératrices sont les bases d'un trapèze, et l'axe joint les milieux des côtés non parallèles.

§ II. — DU CONE

Définitions.

433. On appelle *cône de révolution* le solide engendré par la révolution complète d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.



Le côté h, autour duquel tourne le *triangle rectangle générateur,* est à la fois l'*axe* et la *hauteur* du cone.

L'hypoténuse l est la *génératrice* ou le *côté* du cône; pendant le mouvement, ce côté engendre la *surface latérale* du cône.

L'autre côté r du triangle générateur est le *rayon* du cône; il engendre le *cercle* qui lui sert de *base.* La base est perpendiculaire à l'axe.

434. *Le cône de révolution est la limite de la pyramide régulière dans laquelle le nombre des faces latérales augmenterait indéfini-*

ment; et le cône lui-même peut être considéré comme une pyramide régulière d'une infinité de faces.

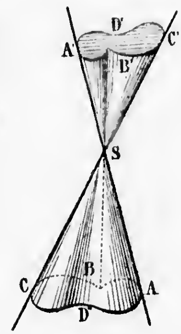
Il suit de là que *l'on peut appliquer au cône de révolution les propriétés de la pyramide régulière.*

Par exemple : 1° *Toute section faite parallèlement à la base d'un cône de révolution est un cercle; et ce cercle est à la base du cône comme le carré de la hauteur du cône partiel est au carré de la hauteur totale* (n° 385);

2° *Tout plan qui coupe dans un même rapport trois génératrices d'un cône est parallèle à la base de ce cône* (n° 386);

3° *Si les génératrices d'un cône sont coupées par plusieurs plans parallèles, les sections obtenues sont des figures semblables, et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet du cône* (n° 386, 2°);

4° *Si deux cônes ont même hauteur, les sections faites à égale distance des sommets parallèlement aux bases sont entre elles comme ces mêmes bases* (n° 387).



435. En général, on appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite indéfinie AA' qui se meut dans l'espace, en passant toujours par un même point S.

La surface conique se compose de deux parties ou deux *nappes* opposées par le sommet.

Si la droite génératrice revient à sa position première AA', elle a engendré une *surface conique fermée.*

On considère quelquefois la génératrice comme devant s'appuyer constamment sur une ligne donnée ABCD, que l'on nomme *directrice.*

436. Un *cône quelconque* est le solide compris entre une surface conique quelconque et un plan qui coupe toutes les génératrices.

On peut le considérer comme une pyramide quelconque d'une infinité de faces.

Les propriétés de la pyramide quelconque peuvent être appliquées au cône quelconque, qui en est la *limite.*

Proposition VI. — Théorème.

437. *La surface latérale d'un cône de révolution égale la moitié du produit de la génératrice par la circonférence de la base.*

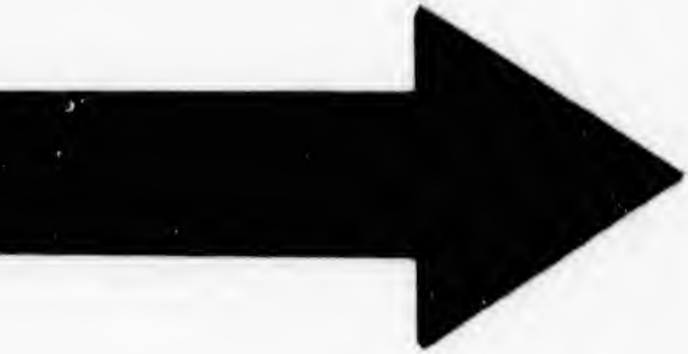
Car la formule $S = {}^1/_2 pl$, qui exprime la surface latérale de la pyramide régulière (n° 389), peut être appliquée au cône, qui en est la *limite.*

438. **Scolie.** 1° Soit r le rayon d'un cône, et soit l le côté; la surface latérale sera exprimée par ${}^1/_2 2\pi rl$ ou πrl.

Et la *surface totale* sera exprimée par $\pi r(l+r)$.

2° En développant sur un plan la surface latérale d'un cône de ré-

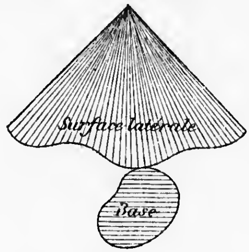
[redacted]




2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
4.0
2.0
1.8
1.6

1.1
1.0

volution, on obtient un *secteur circulaire*, qui a pour rayon le côté du cône, et pour arc la circonférence de la base.



Dans un cône quelconque, le développement de la surface latérale donne un *secteur irrégulier*, que l'on évalue, comme la base, par des méthodes approximatives.

Proposition VII. — Théorème.

439. *Le volume d'un cône égale le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, la formule $V = \frac{1}{3}Bh$, qui exprime le volume de la pyramide (n° 393), peut être appliquée au cône, qui en est la limite.

440. **Scolie.** 1° *Le volume du cône de révolution a pour formule* $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

2° *Un cône quelconque est le tiers du cylindre qui a même base et même hauteur.*

3° *Deux cônes quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs :*

Deux cônes de même base sont entre eux comme les hauteurs, et deux cônes de même hauteur sont entre eux comme les bases.

4° *Deux cônes qui ont même hauteur et des bases équivalentes sont équivalents.*

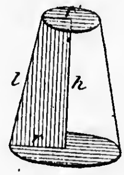
5° *Le sommet d'un cône peut se mouvoir dans un plan parallèle à la base sans que le volume soit changé.*

§ III. — DU TRONC DE CONE

Définitions.

441. Un tronc de *cône de révolution à bases parallèles* est la portion d'un cône de révolution comprise entre la base et une section parallèle à cette base.

Le tronc de cône de révolution à bases parallèles peut être considéré comme engendré par un trapèze rectangle tournant autour du côté qui est perpendiculaire aux bases.



442. *Le tronc de cône de révolution à bases parallèles est la limite du tronc pyramidal régulier dans lequel le nombre des faces latérales augmente indéfiniment; et lui-même peut être considéré comme un tronc pyramidal régulier d'une infinité de faces.*

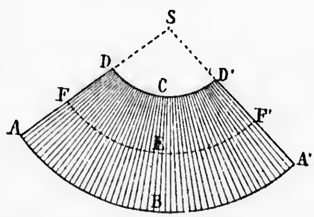
Il suit de là que l'on peut appliquer au tronc de cône de révolution les propriétés du tronc pyramidal régulier.

Proposition VIII. — Théorème.

443. *La surface latérale d'un tronc de cône de révolution égale la génératrice multipliée par la demi-somme des circonférences des bases.*

Car la formule $S = l\left(\frac{p+p'}{2}\right)$ qui exprime la surface latérale d'un tronc pyramidal régulier (nº 390, 3º) peut être appliquée au *tronc de cône*, qui en est la *limite*.

444. **Scolie.** 1º En développant sur un plan la surface latérale d'un tronc de cône de révolution, on obtient un *trapèze circulaire* AD′ qui a pour hauteur le côté AD du tronc, et pour bases les développements des circonférences des bases du tronc de cône.

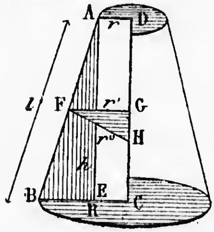


2º La demi-somme des circonférences des bases est égale à la circonférence décrite à égale distance de ces mêmes bases; on peut l'appeler *circonférence moyenne.*

3º En appelant l le côté du tronc de cône, R et r, les rayons des bases, et r' le rayon moyen égal à $\frac{R+r}{2}$, on a pour expression de la surface latérale du tronc de cône : $\left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right)l$ ou $\pi l(R+r)$ ou bien, en fonction de la circonférence moyenne : $2\pi r' l$.

Proposition IX. — Théorème.

445. Autre formule. *La surface latérale d'un tronc de cône de révolution, égale la hauteur du tronc, multipliée par la circonférence qui aurait pour rayon la perpendiculaire élevée au milieu du côté et terminée à l'axe.*



Soit ABCD le trapèze générateur, et soit FH ou r'' la perpendiculaire élevée au milieu du côté AB et terminée à l'axe. Menons AE parallèle à l'axe, et FG perpendiculaire à l'axe.

Les deux triangles AEB et FGH sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires;

on a donc : $\frac{AB}{AE}=\frac{FH}{FG}$ ou $\frac{l}{h}=\frac{r''}{r'}$

De là on tire... $r'l=r''h$; et en multipliant par 2π, on a :

$$2\pi r'l=2\pi r''h.$$

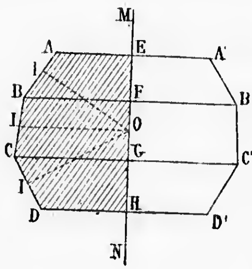
Mais $2\pi r'l$ exprime la surface latérale du tronc de cône (nº 444, 3º); donc cette même surface est aussi exprimée par $2\pi r''h$. Donc...

446. **Scolie.** Le cône entier peut être considéré comme un tronc de cône dont la base supérieure est nulle. Donc *la surface latérale d'un cône de révolution égale la hauteur multipliée par la circonférence qui aurait pour rayon la perpendiculaire élevée au milieu du côté et terminée à l'axe.*

Proposition X. — Théorème d'Archimède.

447. *Si une ligne polygonale régulière tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre,*

La surface engendrée égale la circonférence qui aurait pour rayon l'apothème de la ligne brisée, multipliée par la projection de cette même ligne brisée sur l'axe.



(Nous supposons que l'axe ne coupe pas la ligne mobile.)

Soit ABCD la ligne brisée régulière mobile, O son centre, OI son apothème, et MN l'axe de révolution.

Dans la rotation, le trapèze rectangle ABEF décrit un tronc de cône, qui a pour surface latérale EF $\times$ circ. OI (nº 445); de même la surface engendrée par BC égale FG $\times$ circ. OI; et la surface engendrée par CD égale... GH $\times$ circ. OI.

Donc la surface engendrée par la ligne ABCD a pour expression :

$$\text{circ. OI} \times (\text{EF} + \text{FG} + \text{GH})$$

ou

$$\text{circ. OI} \times \text{EH},$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc...

Proposition XI. — Théorème d'Archimède.

448. *Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles égale le tiers de la hauteur multiplié par la somme des bases augmentée de leur moyenne géométrique.*

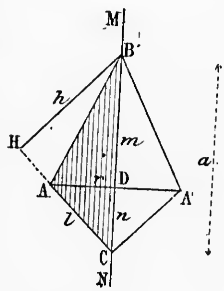
En effet, la formule $V = \frac{1}{3} h (B + B' + \sqrt{BB'})$ qui exprime le volume du tronc de pyramide à bases parallèles (nº 396), peut être appliquée au tronc de cône, qui en est la *limite*.

449. **Scolie.** Soient R et r les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, et h sa hauteur; les bases ont pour expression πR^2 et πr^2; leur moyenne géométrique est πRr, et le volume est $\frac{1}{3} h (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$ ou $\frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$.

Proposition XII. — Théorème.

450. *Si un triangle tourne autour d'un axe mené dans son plan par l'un des sommets,*

Le volume engendré égale le tiers de la hauteur correspondante à ce sommet, multiplié par la surface qu'engendre le côté opposé.



(Nous supposons que l'axe ne coupe pas le triangle tournant.)

1º Considérons d'abord le cas où l'axe se confond avec l'un des côtés du triangle tournant ABC. Soient h la hauteur menée du point B, et AD ou r une perpendiculaire à l'axe de rotation.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme des cônes engendrés par les triangles rectangles ADB et ADC; il aura donc pour expression :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 m + \frac{1}{3} \pi r^2 n = \frac{1}{3} \pi r^2 (m + n) = \frac{1}{3} \pi r^2 a$$

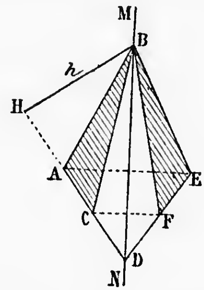
Cette formule peut s'écrire $\frac{1}{3} \pi r r a$; mais le produit ra des deux derniers facteurs exprime le double de la surface du triangle, et peut être remplacé par lh, ce qui donne pour le volume :

$$V = \frac{1}{3} \pi r l h \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} h . \pi r l$$

Or $\pi r l$ exprime la surface latérale du cône inférieur (nº 438), c'est-à-dire la surface engendrée par le côté AC ou l. Ainsi le volume engendré par le triangle ABC égale le $\frac{1}{3}$ de la hauteur qui part du sommet B, multiplié par la surface qu'engendre le côté opposé l.

2º Si le triangle tournant ABC n'a qu'un sommet B commun avec l'axe, le volume sera la différence des volumes engendrés par les triangles BAD et BCD.

Le premier de ces volumes égale $^1/_3\ h$ multiplié par la surface que décrit AD, et le second, $^1/_3\ h$ multiplié par la surface que décrit CD.



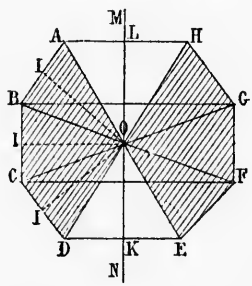
Donc, pour la différence des deux volumes, on aura $^1/_3\ h$ multiplié par surface AD moins surface CD, ou $^1/_3\ h \times$ surface AC.

3° Cette démonstration est indépendante de la position du point D; le théorème est donc encore vrai quand D est à l'infini, c'est-à-dire lorsque la base AC est parallèle à l'axe. Donc...

Proposition XIII. — Théorème.

451. *Si un secteur polygonal régulier tourne autour d'un axe mené dans son plan et par son centre,*

Le volume engendré égale le tiers de l'apothème, multiplié par la surface qu'engendre la ligne polygonale.



(Nous supposons que l'axe ne coupe pas la surface tournante.)

Soit OABCD un secteur polygonal régulier tournant autour de l'axe MN.

Le triangle AOB engendre un volume égal à $^1/_3$ OI $\times$ surf. AB.

Le triangle BOC, un volume égal à $^1/_3$ OI $\times$ surf. BC.

Le triangle COD, un volume égal à $^1/_3$ OI $\times$ surf. CD.

Donc le volume total aura pour expression le $^1/_3$ de OI, multiplié par la surface que décrit la ligne polygonale ABCD. Ce qu'il fallait démontrer. Donc...

452. La surface décrite par la ligne polygonale ABCD égale $\overline{KL} \times \text{circ.}\,\overline{OI}$, ou $\overline{KL} \times 2\pi\overline{OI}$ (n° 447).

Le volume engendré par le secteur OABCD a donc pour formule :

$$2\pi\overline{OI}.\ {}^1/_3\,\overline{OI}.\ \overline{KL} \quad \text{ou} \quad {}^2/_3.\pi\overline{OI}^2.\ \overline{KL}$$

ce qui correspond aux $^2/_3$ du cylindre qui aurait OI pour rayon et KL pour hauteur.

§ IV. — DE LA SPHÈRE

Définitions.

453. La *sphère* est un solide dont la surface a tous ses points équidistants d'un point intérieur nommé *centre*.

On peut aussi considérer la *sphère* comme engendrée par la révolution complète d'un demi-cercle autour de son diamètre.

Dans la rotation, la demi-circonférence décrit la *surface de la sphère*.

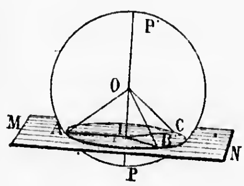
Le centre, le rayon et le diamètre du demi-cercle générateur, sont aussi le *centre*, le *rayon* et le *diamètre* de la sphère.

Toute droite menée par le centre de la sphère et terminée à sa surface, est un diamètre.

454. La surface de la sphère est le *lieu géométrique* des points dont la distance au centre est égale au rayon.

Proposition XIV. — Théorème

455. *Toute section plane d'une sphère est un cercle.*



Soit MN un plan quelconque, coupant la sphère dont le centre est O. Menons OI perpendiculaire au plan sécant, les rayons OA, OB, OC, à divers points de l'intersection du plan M avec la surface de la sphère, et les droites IA, IB, IC.

Les rayons OA, OB, OC étant des obliques égales, on a $IA = IB = IC$ (nº 300); ainsi le point I est équidistant de tous les points de la ligne ABC; donc cette ligne est une circonférence, et la section est un cercle. Donc...

456. **Scolie.** 1º Si la distance du plan sécant au centre de la sphère est nulle, la section est un *grand cercle;* en tout autre cas, la section est un *petit cercle*.

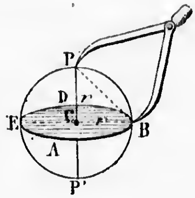
Ainsi, un *grand cercle* est toute section dont le plan passe par le centre de la sphère; et un *petit cercle* est toute section dont le plan ne passe pas par le centre de la sphère.

Tous les grands cercles d'une même sphère sont égaux.

2º On nomme *pôles d'un cercle* de la sphère, les extrémités du diamètre mené perpendiculairement à ce cercle. Les points P et P' sont les pôles du cercle ABCI.

Chaque pôle d'un cercle est équidistant des différents points de la circonférence de ce cercle (nº 299, 2º); et la distance commune est *la distance polaire* de la circonférence.

3° Pour décrire des arcs circulaires sur la surface d'une sphère, on emploie *un compas* à branches brisées ou recourbées.



D'un même pôle, on peut décrire une infinité de cercles, tous parallèles comme étant perpendiculaires à la ligne des pôles.

4° Pour décrire, sur une sphère, un arc de grand cercle, il faut prendre une distance polaire égale au rayon multiplié par la racine carrée de 2; car $PB = r\sqrt{2}$.

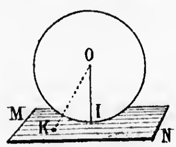
457. **Définitions.** Un *plan* est *tangent à une sphère* lorsque ce plan n'a qu'un point commun avec la sphère.

Deux sphères sont *tangentes* lorsque leurs surfaces n'ont qu'un point commun.

Deux sphères peuvent être *tangentes extérieurement* ou *intérieurement;* elles peuvent aussi être *extérieures, intérieures, concentriques, sécantes.*

Proposition XV. — Théorème.

458. *Tout plan tangent à une sphère est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.*



Soit MN, un plan tangent à la sphère O, et soit OI le rayon mené au point de contact.

Le point I étant le seul point commun au plan et à la sphère, tout autre point K du plan est en dehors de la sphère, et la distance OK est plus grande que OI; donc OI est perpendiculaire au plan MN (n° 300, 6°).

459. Réciproquement: *Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon d'une sphère est tangent à cette sphère.*

Car si le plan MN est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OI, cette ligne OI est aussi perpendiculaire au plan MN; toute autre droite OK est oblique, et par conséquent plus grande que OI. Le plan MN n'a donc que le point I commun avec la sphère; donc il est tangent à cette sphère. Ce qu'il fallait démontrer.

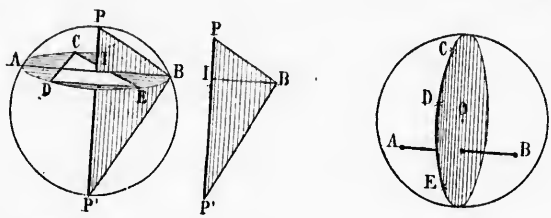
Corollaire. *Par un point donné sur la sphère, on ne peut mener qu'un seul plan tangent;* par un point donné hors de la sphère, on peut mener une infinité de plans tangents à cette sphère; par une droite donnée hors de la sphère, on peut mener deux plans tangents.

Proposition XVI. — Problème.

460. *Trouver le rayon d'une sphère donnée.*

1er moyen. D'un point P, pris à volonté comme pôle, on décrit un cercle quelconque ABC, sur lequel on marque trois points C,D,E. Avec les distances CD, CE, DE, qu'on mesure à l'aide du compas sphérique, on construit un triangle égal à CDE, et l'on circonscrit un cercle à ce triangle. Le cercle ainsi obtenu est égal au petit cercle ADBC, et son rayon est égal à IB.

On peut alors reproduire le triangle PBP′ rectangle en B, car on connaît la hauteur BI et le côté BP... L'hypoténuse PP′ est le diamètre de la sphère.

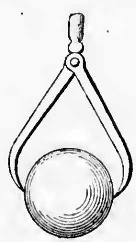


2e moyen. De deux points quelconques A et B, pris comme pôles, on décrit sur la sphère des arcs qui déterminent trois points, C, D, E, dont chacun est équidistant des deux points A et B.

Ces trois points déterminent un plan perpendiculaire au milieu de la corde AB; et ce plan étant le lieu des points équidistants de A et de B (nº 297), passe nécessairement par le centre, et coupe la sphère suivant un grand cercle.

Dès lors il suffit de mesurer les distances CD, CE, DE, et de construire un triangle avec ces trois distances; le rayon du cercle circonscrit à ce triangle sera le rayon de la sphère.

461. **Scolie.** Dans la pratique on trouve le diamètre d'une sphère à



l'aide du *compas d'épaisseur*. Ou bien on place la sphère entre deux plans parallèles dont on mesure la distance.

Définitions.

462. On appelle *zone*, toute partie de la surface de la sphère comprise entre deux plans parallèles, et *segment de sphère* la portion de sphère comprise entre ces mêmes plans.

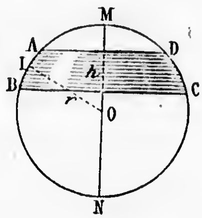
La zone peut être considérée comme la surface latérale du segment sphérique.

Le *segment sphérique* a ordinairement deux bases; mais si l'un des plans sécants devient tangent, le *segment* n'a plus qu'*une base*; la zone correspondante est aussi appelée *zone à une base*, ou encore *calotte sphérique*.

La *hauteur* d'un segment ou d'une zone est la distance des deux plans parallèles qui déterminent le segment ou la zone.

Proposition XVII. — Théorème.

463. *L'aire d'une zone égale sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.*



En effet, la zone ABCD est engendrée par la révolution de l'arc AIB autour du diamètre MN.

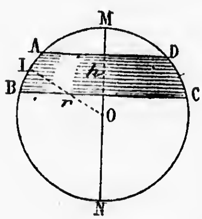
Or cet arc AIB est la *limite* vers laquelle tend une ligne polygonale régulière dont le nombre des côtés augmente indéfiniment; et l'apothème de cette ligne polygonale tend vers le rayon de la sphère.

On peut donc dire, en appliquant à la limite ce qui est constamment vrai pour la variable (nº 447), que l'*aire de la zone égale sa hauteur multipliée par la circonférence qui a pour rayon le rayon même de la sphère.*

464. **Scolie.** 1º L'aire de la zone a pour formule $2\pi rh$; d'où il suit qu'*une zone quelconque équivaut à la surface latérale d'un cylindre qui aurait pour hauteur la hauteur de la zone, et pour rayon le rayon de la sphère.*

2º *Sur une même sphère ou sur des sphères égales, les zones de même hauteur sont équivalentes, et deux zones quelconques sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Proposition XVIII. — Théorème.



465. *L'aire de la sphère égale le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car l'arc AB qui engendre la zone ABCD peut croître sans que la formule de la surface engendrée cesse d'être applicable (nº 464). Si donc cet arc devient égal à MBN, la zone engendrée est la surface entière de la sphère, et sa hauteur égale le diamètre MN. Donc...

466. **Scolie.** 1° Le diamètre d'une sphère étant exprimé par $2r$ et la circonférence par $2\pi r$, l'aire de la sphère a pour expression $4\pi r^2$, ou 4 fois l'aire d'un grand cercle.

Si l'on appelle d le diamètre, la circonférence est πd, et l'aire de la sphère est πd^2.

2° *Les surfaces de deux sphères quelconques sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.* Car on a :

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2}$$

De même
$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi d^2}{\pi d'^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$

3° *La surface de la sphère égale la surface latérale du cylindre circonscrit.* Car ces deux surfaces sont également exprimées par πd^2.

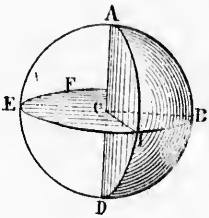
La surface totale du cylindre circonscrit à la sphère égale 6 fois celle d'un grand cercle.

Définitions.

467. On appelle *fuseau* toute partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles; et l'on nomme *onglet sphérique* la partie du volume de la sphère comprise entre ces mêmes demi-grands cercles.

L'angle d'un fuseau ou d'*un onglet sphérique* est l'angle dièdre formé par les plans des deux cercles. L'intersection de ces deux cercles est un diamètre de la sphère.

468. L'angle d'un fuseau ou d'un onglet sphérique se mesure par l'arc de grand cercle décrit de l'un des sommets du fuseau comme pôle, et compris entre les deux arcs.



Un fuseau d'un degré est la 360e partie de la surface de la sphère; et *un fuseau quelconque est à la surface de la sphère, comme l'angle de ce fuseau est à 4 angles droits.* Le même rapport existe entre *l'onglet sphérique* et le *volume de la sphère.*

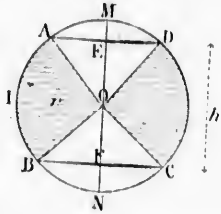
469. On appelle *secteur sphérique* le volume engendré par un secteur circulaire pris dans le demi-cercle qui engendre la sphère.

Proposition XIX. — Théorème.

470. *Le volume d'un secteur sphérique égale le tiers du rayon multiplié par la zone correspondante à ce secteur.*

En effet, le secteur circulaire AOB est la limite vers laquelle tend le secteur polygonal régulier inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment; la ligne polygonale tend vers l'arc AIB, et l'apothème tend vers le rayon OI de la sphère.

Or on peut appliquer à la limite ce qui est constamment vrai pour la



variable (nº 451). Donc *le volume d'un secteur sphérique égale le tiers du rayon multiplié par la zone correspondante à ce secteur.*

471. **Scolie.** 1º La zone engendrée par l'arc AIB a pour expression $2\pi rh$ (nº 464); donc *le volume du secteur sphérique égale* $^1/_3\, r.2\pi rh = {}^2/_3\, \pi r^2 h$, c'est-à-dire les $^2/_3$ *du cylindre* $\pi r^2 h$ *qui a pour rayon le rayon de la sphère, et pour hauteur la hauteur de la zone.*

2º *Deux secteurs sphériques appartenant à une même sphère ou à des sphères égales, sont entre eux comme les hauteurs des zones correspondantes.*

Proposition XX. — Théorème.

472. *Le volume de la sphère égale le produit de sa surface par le tiers du rayon.*

Car, dans le secteur circulaire AOB (figure précédente), l'angle des deux rayons OA et OB peut croître sans que la formule du volume engendré (nº 470) cesse d'être applicable. Si donc le rayon OA arrive en OM, et le rayon OB en ON, le volume engendré devient la sphère elle-même, et la zone correspondante devient la surface entière de la sphère. Donc...

Autre démonstration.

Considérons un polyèdre quelconque circonscrit à la sphère, c'est-à-dire dont toutes les faces soient tangentes à la sphère. Ce polyèdre peut être décomposé en autant de pyramides qu'il y a de faces, avec le centre pour sommet commun; les hauteurs sont égales au rayon; et *le volume du polyèdre égale le* $^1/_3$ *du rayon multiplié par la somme des bases, c'est-à-dire par la surface totale.*

Et si, par des sections faites tangentiellement à la sphère, on coupe successivement les divers angles solides, le polyèdre s'arrondit peu à peu, et tend vers la sphère.

Ainsi la formule qui exprime le volume de ce polyèdre peut s'appliquer à la sphère qui en est la limite. Donc...

473. **Scolie.** 1º La surface de la sphère étant $4\pi r^2$, le volume est $4\pi r^2 . {}^1/_3\, r$ ou $^4/_3\, \pi r^3$.

Si l'on appelle d le diamètre, on a $r=\frac{d}{2}$, $r^3=\frac{d^3}{8}$, et le volume de la sphère est $\frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8}$ ou $\frac{1}{6}\pi d^3$.

2° *Deux sphères quelconques sont entre elles comme les cubes des rayons ou des diamètres*; car

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r'^3}=\frac{r^3}{r'^3}$$

De même

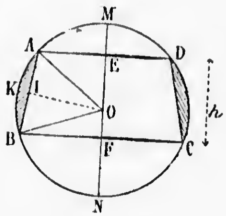
$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{6}\pi d^3}{\frac{1}{6}\pi d'^3}=\frac{d^3}{d'^3}$$

3° Le volume du cylindre circonscrit à une sphère égale $\pi r^2.2r$ ou $2\pi r^3$; ainsi le rapport de la sphère au cylindre est $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3}=\frac{2}{3}$. Le même rapport existe entre la surface de la sphère et la surface totale du cylindre circonscrit. (*Cette relation a été découverte par Archimède.*)

En général, *pour tous les solides circonscrits à la sphère, le rapport des volumes est le même que le rapport des surfaces.*

Proposition XXI. — Théorème.

474. *Si un segment circulaire tourne autour d'un diamètre. Le volume engendré égale le $\frac{1}{6}$ du cercle qui aurait pour rayon la corde du segment, multiplié par la projection de cette même corde sur l'axe de révolution.*



Soit le segment ABK, tournant autour du diamètre MN. Menons les rayons OA et OB, puis OI perpendiculaire à la corde AB, et enfin AE et BF perpendiculaires à l'axe MN.

Le segment ABK est la différence entre le secteur circulaire AOBK et le triangle AOB. Le volume engendré sera donc (nos 470 et 450):

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h.-\frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2\cdot h \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\pi h(r^2-\overline{OI}^2) \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\pi\overline{AI}^2\cdot h,$$

ou $\frac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2\,h$. Donc...

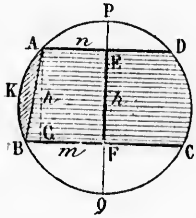
475. **Scolie**. Si la corde AB était parallèle à l'axe, on aurait $AB=h$, et le volume serait $\frac{1}{6}\pi h^3$, ce qui correspond au volume de la sphère qui aurait h pour diamètre.

Proposition XXII. — Théorème.

476. *Le volume d'un segment sphérique égale la demi-somme des bases multipliée par la hauteur, plus le volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre.*

Soit le segment sphérique ABCD, engendré par la figure AEFBK.

Il se compose du volume engendré par le segment circulaire ABK, et du tronc de cône engendré par le trapèze AEFB.



Le premier de ces volumes est $\frac{1}{6}\pi.\overline{AB}^2.h$ (n° 474).

Or $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = h^2 + (m - n)^2$.

Ainsi le volume engendré par ABK est $\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h\,(m - n)^2$.

Le volume du tronc de cône est (n° 449) $\frac{1}{3}\pi h\,(m^2 + n^2 + mn)$.

Le volume total est donc :

$$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h\,(m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{3}\pi h\,(m^2 + n^2 + mn) =$$
$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h\,(m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{6}\pi h\,(2m^2 + 2n^2 + 2mn) =$$
$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h\,(3m^2 + 3n^2) =$$
$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + h\,\frac{\pi m^2 + \pi n^2}{2}$$

Le premier terme représente la sphère qui aurait h pour diamètre, et le second est le produit de la hauteur par la demi-somme des bases. Donc...

477. **Scolie.** Si le segment sphérique n'a qu'une base, n est nul, et la formule devient $\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi m^2 h$.

478. **Remarque sur la similitude.** *Deux solides de révolution sont semblables lorsque les figures génératrices sont semblables, et semblablement reliées à l'axe de révolution.*

Toutes les sphères sont des solides semblables.

479. Dans deux solides semblables :

1° *Toutes les dimensions homologues sont dans un même rapport, qui est le rapport de similitude;*

2° *Toutes les surfaces homologues sont dans un même rapport, qui est le carré du rapport de similitude.*

3° *Toutes les parties homologues des deux volumes sont dans un même rapport, qui est le cube du rapport de similitude.*

EXERCICES SUR LE LIVRE VII

Théorèmes à démontrer.

1. Le volume d'un cylindre circulaire droit égale le produit de sa surface latérale par la moitié du rayon.

2. Le volume d'un cylindre circulaire droit égale la surface du rectangle générateur multiplié par la circonférence décrite par le point de concours des diagonales de ce même rectangle.

3. Dans un cylindre circulaire droit, la surface latérale est à la somme des bases comme la hauteur est au rayon.

4. Dans un cylindre circulaire droit, la section faite suivant l'axe est à la base comme la hauteur est au $^1/_4$ de la circonférence du cylindre.

5. Si la hauteur d'un cylindre égale le diamètre, le volume égale la su[rface] totale multipliée par le $^1/_3$ du rayon.

6. Le volume d'un cône circulaire droit égale la surface latérale multipliée par le $^1/_3$ de la distance du centre de la base au côté du cône.

7. Le volume d'un cône circonscrit à une sphère, égale le produit de sa surface totale par le $^1/_3$ du rayon de la sphère.

8. Le volume d'un cône circulaire droit égale le $^1/_3$ de la surface du triangle générateur multiplié par la circonférence du cône.

9. Le volume d'un tronc conique circonscrit à une sphère égale le produit de sa surface totale par le $^1/_3$ du rayon de la sphère.

10. Deux solides quelconques circonscrits à des sphères égales sont entre eux comme leurs surfaces totales.

11. Si le côté d'un tronc de cône égale la somme des rayons des bases, la hauteur du tronc égale deux fois la moyenne géométrique de ces mêmes rayons, et leur volume égale la surface totale multipliée par le $^1/_6$ de la hauteur.

12. Si la hauteur d'un tronc de cône égale 4 fois la différence des rayons des bases, le volume de ce tronc égale la différence des deux sphères qui auraient ces mêmes rayons.

13. Par deux points donnés sur une sphère, on ne peut faire passer qu'un arc de grand cercle, à moins que les deux points donnés ne soient les extrémités d'un même diamètre.

14. Par 4 points non situés dans un même plan, on peut faire passer une sphère et une seule.

15. On peut inscrire une sphère à un tétraèdre quelconque.

16. Si trois sphères se coupent deux à deux, les plans d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan des trois centres.

17. Si trois droites rectangulaires coupent une même sphère, la somme des carrés des cordes comprises est constante.

18. Dans un triangle sphérique, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence (un triangle sphérique est la partie de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grands cercles).

19. Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

20. Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points.

21. Si un premier triangle sphérique est polaire d'un second, celui-ci est aussi polaire du premier (un premier triangle est dit polaire d'un autre lorsque les sommets du premier sont les pôles respectifs des côtés du second).

22. Dans deux triangles polaires, chaque angle de l'un est le supplément du

côté opposé dans l'autre. Et pour cette raison, deux triangles polaires sont en même temps appelés triangles supplémentaires.

23. A deux triangles polaires correspondent des trièdres centraux supplémentaires, et réciproquement.

24. Deux triangles tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux :

1° Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux; 3° lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.

25. Dans tout triangle sphérique, la somme des côtés est comprise entre 0 et 360 degrés, et la somme des angles entre 2 et 6 droits. (On nomme *excès sphérique* l'excédant variable de la somme des angles d'un triangle sphérique sur deux angles droits.)

26. Un fuseau sphérique est à la surface de la sphère entière comme l'angle dièdre du fuseau est à 4 droits.

27. Dans une sphère quelconque, deux triangles sphériques symétriques par rapport au centre sont égaux en surface.

28. Si deux arcs de grands cercles se coupent dans un même hémisphère, la somme des deux triangles opposés équivaut au fuseau entier qui serait compris entre ces deux arcs.

29. L'aire d'un triangle sphérique est à l'aire de la sphère entière comme son excès sphérique est à 8 angles droits.

30. Sur une même sphère ou sur des sphères égales, deux triangles qui ont la même somme pour leurs angles sont égaux en surface.

31. Si deux sphères se coupent, leur intersection est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres; et le centre de ce cercle se trouve sur cette même ligne.

32. Deux sphères quelconques peuvent avoir l'une par rapport à l'autre cinq positions différentes; et les conditions relatives aux rayons et à la distance des centres sont les mêmes que pour les circonférences.

33. Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que la somme des trois côtés soit moindre qu'une circonférence, et que le grand côté soit plus petit que la somme des deux autres.

34. Sur une même sphère, tous les cercles parallèles ont les mêmes pôles.

35. Dans tout triangle sphérique, si deux côtés sont égaux, les angles opposés sont aussi égaux, et réciproquement.

36. L'arc de grand cercle mené du sommet au milieu de la base d'un triangle sphérique isocèle est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.

37. Sur une même sphère, deux triangles isocèles symétriques sont superposables.

38. Dans tout triangle sphérique, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, et réciproquement.

39. Si l'on prend le triangle sphérique tri-rectangle pour unité de surface, et l'angle droit pour unité d'angle, la surface d'un polygone sphérique est exprimée par la somme des angles, moins le produit de deux droits par le nombre des côtés moins 2.

40. Dans tout prisme triangulaire droit, on peut inscrire un cylindre; à ce même solide, on peut circonscrire un cylindre.

41. A trois plans indéfinis, parallèles à une même droite, et qui se coupent deux à deux, on peut mener quatre cylindres circulaires tangents.

Problèmes.

1. L'hectolitre usité dans le commerce est un cylindre ayant $0^{m}503$ de diamètre et de hauteur. Quelle en est la surface latérale ?

2. Quel diamètre faut-il donner à un cylindre pour que sa surface totale soit de 1 mètre carré, si la hauteur doit égaler le diamètre ?

3. Le diamètre d'un cylindre est à sa hauteur comme 3 est à 5, et la surface latérale est de 83 décimètres carrés. Quelles sont les dimensions ?

4. Quelle est la hauteur d'un cylindre dont la base a 16 décimètres carrés, et la surface latérale 60 décimètres carrés ?

5. Quel est le rayon d'un cylindre dont la hauteur est de 25 centimètres, et la surface totale 25 décimètres carrés?

6. Un tronc de cylindre circulaire droit a $0^{m}18$ de diamètre, et les arêtes extrêmes ont respectivement $0^{m}175$ et $0^{m}295$. Quelle est la surface totale de ce solide, et quel en est le volume ?

7. On veut faire un cuvier cylindrique dont la hauteur soit égale au diamètre, et dont la contenance soit de 1000 litres. Quelle surface de bois ou de tôle faudra-t-il (surface latérale et un fond) ?

8. La contenance d'un seau cylindrique est de 10 litres, et la surface latérale est de 18 décimètres carrés. Quel est le rayon ?

9. Un vase cylindrique a $1^{m}25$ de circonférence ; et la section faite suivant l'axe est de $1^{m}44$. Quelle est la contenance de ce vase?

10. Dans un cône de 7 centimètres de hauteur, on fait une section parallèle à la base, à 3 centimètres du sommet. Qu'est cette section par rapport à la base ?

11. A quelle distance du sommet faut-il faire une section parallèle à la base d'un cône pour que cette section soit la moitié de la base?

12. Dans un cône quelconque on fait deux sections parallèles à la base, de telle sorte que ces deux sections et la base soient dans le rapport des nombres 1, 2, 3. Comment la hauteur a-t-elle été divisée ?

13. A quelle distance du sommet faut-il faire une section parallèle à la base d'un cône, pour que le rapport de cette section à la base soit égal à un nombre donné *k* ?

14. Un cône a 87 millimètres de diamètre et 1 décimètre de hauteur. Quelle est sa surface totale ?

15. La base d'un cône a 42 millimètres de diamètre, et la surface totale est de 2 décimètres carrés. Quelle est la hauteur ?

16. Le côté d'un cône est de 14 centimètres, et la surface de la base est de 80 centimètres carrés. Quelle est la hauteur?

17. Le côté d'un cône est de 345 millimètres, et la surface étant développée sur un plan, forme un secteur de 54 degrés. Quelle est la hauteur du cône ?

18. Quelles dimensions aura un cône circulaire droit de 1 décimètre cube de volume, si la hauteur égale le diamètre ?

19. Un ferblantier doit faire un arrosoir conique de 2 litres de contenance, et la hauteur du cône doit être double du diamètre. Calculer le rayon du secteur circulaire qu'il doit découper préalablement sur le métal.

20. Quel est le volume d'un cône dont la section par l'axe est un triangle équilatéral de 1 mètre carré d'étendue ?

21. La surface totale d'un cône est de $3^{m2}18$, et le triangle rectangle générateur est isocèle. On demande le volume.

22. Avec trois masses égales et homogènes de terre glaise, on construit une sphère, un cône et un cylindre ; dans les trois corps, le diamètre est de 1 décimètre. On demande la hauteur du cône et celle du cylindre.

23. Quelle est la surface totale d'un tronc de cône circulaire droit dont les diamètres ont 48 et 30 millimètres, et la hauteur 72 millimètres ?

24. On veut construire un tronc de cône de 1 mètre carré de surface totale; le diamètre de la grande base doit être égal à la hauteur, et celui de la petite base la moitié de la hauteur. Quel est le volume de ce cône ?

25. S'il faut tracer sur un carton le développement de la surface latérale du cône dont il est question au problème précédent, on demande les rayons des arcs qu'il faut décrire pour découper cette surface latérale.

26. Un abat-jour en papier a la forme de la surface latérale d'un tronc de cône; la petite ouverture a 55 millimètres de diamètre, et la grande en a 197; le côté du tronc est de 106 millimètres. Calculer les rayons des arcs à décrire sur un papier pour découper un abat-jour pareil.

27. Une cuvette a la forme d'un tronc de cône; le fond a un diamètre intérieur de 13 centimètres, et au bord supérieur, le diamètre est 227 millimètres; le talus intérieur a 9 centimètres. Quelle est la contenance de cette cuvette ?

28. Si l'on verse 1 litre d'eau dans cette cuvette, à quelle hauteur s'élèvera l'eau au-dessus du fond ?

29. Quel est le volume d'une sphère circonscrite à un cube de 1 décimètre de côté ?

30. Quelle est la surface d'une sphère circonscrite à un tétraèdre régulier de 1 décimètre d'arête ?

31. Quel doit être le diamètre d'une boule pour que sa surface soit de 1 mètre carré ?

32. Quel est le volume d'une sphère dont la surface est égale à celle d'un cube de 25 centimètres de côté ?

33. Un triangle équilatéral dont le côté est a tourne autour de l'un de ses côtés. Quel est le volume engendré ?

34. Exprimez le volume engendré par ce même triangle, s'il tourne autour d'un axe mené par l'un des sommets parallèlement au côté opposé.

35. Exprimez en fonction du côté a, le volume engendré par un hexagone régulier tournant autour de l'un de ses côtés.

36. Exprimez, en fonction du côté a d'un cube, la surface et le volume de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite.

37. Exprimez, en fonction du côté a d'un tétraèdre régulier, la surface et le volume de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite.

38. Sur le prolongement du diamètre DI d'un cercle donné par son rayon r, on marque un point O, duquel on trace une tangente OT. On suppose que la figure tourne autour de OD, et on demande quelle doit être la distance IO, pour que la surface engendrée par la tangente OT soit à la zone engendrée par l'arc IT comme 3 est à 2.

39. Un triangle équilatéral T tourne autour d'un axe MN, situé dans son plan, perpendiculairement à la base a; la distance de l'axe au triangle est égale au côté a. On demande le volume et la surface du solide engendré.

40. Sur un côté d'un carré, on construit, à l'extérieur, un triangle équilatéral, et l'on fait tourner le pentagone ainsi obtenu autour de l'un des côtés extérieurs du triangle. On demande le volume engendré, en fonction du côté a.

41. Un carré dont le côté est a tourne autour d'un axe mené dans son plan par l'un des sommets, perpendiculairement à la diagonale qui part de ce sommet. On demande la surface et le volume du solide engendré.

42. Un hexagone régulier a pour côté a; on prolonge l'un des côtés d'une longueur égale à a, et par l'extrémité du prolongement, on mène au côté une perpendiculaire qui sert d'axe de rotation à l'hexagone. On demande la surface et le volume du solide engendré.

43. Un hexagone régulier dont le côté est a tourne autour d'un axe mené dans son plan par l'un des sommets, perpendiculairement au rayon qui aboutit à ce sommet. On demande la surface et le volume du solide engendré.

44. Suez est à 30° 16′, et Calcutta à 86°, de longitude orientale. Quel est l'angle formé par les méridiens de ces deux villes ?

45. Quelle est la surface du triangle sphérique compris entre ces deux méridiens et l'équateur (On supposera la terre sphérique, et on se basera sur la définition du mètre) ?

46. Quel est le nombre des degrés d'un fuseau qui est les $^3/_{16}$ de la surface entière de la sphère ?

47. Une boule a 1 mètre de circonférence ; quel est le nombre des degrés d'un fuseau de 4 décimètres carrés tracé sur cette boule ?

48. Trouver le volume engendré par un demi-décagone régulier dont le côté est a, tournant autour du diamètre.

49. Trouver le volume d'un segment sphérique à une base, dans une sphère de 9 centimètres de rayon, l'épaisseur du segment étant de 4 centimètres.

50. Calculer le volume de maçonnerie d'un puits de 9m50 de profondeur et 1m10 de diamètre intérieur, le mur ayant 0m45 d'épaisseur.

51. Un cône de bois de noyer (densité 0,671) a 0m145 de hauteur et 0m095 de diamètre. Il plonge dans l'eau par sa pointe. On demande la hauteur et le diamètre du petit cône immergé.

52. Calculer le diamètre d'un boulet de fonte de 12 hectogr., la densité de la fonte étant de 7,207.

53. Le diamètre de la Lune est les 273 millièmes de celui de la Terre. Qu'est le volume de la Lune par rapport à celui de la Terre ?

54. Un cône circulaire droit a 0m20 de hauteur et 387 centimètres cubes de volume. A quelle distance du sommet faut-il faire une section parallèle à la base pour que le volume du cône partiel soit de 95 centimètres cubes.

55. Un verre à vin de Champagne est conique ; il a 15 centimètres de profondeur, et 6 centimètres de diamètre au bord. On y verse du mercure (densité 13,596), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915) ; ces trois liquides forment trois couches d'égale épaisseur. On demande les poids respectifs de mercure, d'eau et d'huile.

56. Un verre à pied de forme conique a 0m12 de diamètre à l'ouverture, et une contenance de 1/2 litre. On l'emplit avec du mercure et de l'eau, à poids égaux de l'un et de l'autre liquide. Quelle est la hauteur de chaque couche liquide ?

57. Un réservoir a la forme d'un tronc de cône ; le fond a 1 mètre de diamètre ; on y a déjà versé une couche d'eau de 0m68, et le diamètre à la surface de l'eau est de 1m42. De combien montera le niveau de l'eau, si on laisse tomber dans le réservoir un bloc cubique de pierre ayant 0m40 de côté ?

58. Un cylindre massif en fer laminé (densité 7,788) pèse 120 kilog., et a une longueur de 3 mètres. Quel est son diamètre ?

59. Un gramme de mercure pris à la température 0° (densité 13,596) est introduit dans un tube capillaire, et y occupe une longueur de 0m137. Calculer le diamètre du tube.

60. Quel sera le prix d'une conduite en fonte (densité 7,200) ayant 100 mètres de longueur et 0m06 de diamètre intérieur, si l'épaisseur de la fonte est de 6 millimètres, et la valeur de 0 fr. 30 le kilogramme ?

61. Les diamètres des bases d'un tronc de cône ont respectivement 22 et 4 centimètres ; quel diamètre devra avoir un cylindre pour que, sous la même hauteur que le tronc, il ait aussi le même volume ?

62. De 1795 à 1860, on a frappé en France pour 5 milliards de monnaie d'or au titre 0,900. Quels seraient les diamètres des deux sphères de cuivre et d'or pur que l'on pourrait fondre avec tout ce métal ?

Densité de l'or fondu. . . . 19,26.
Densité du cuivre fondu. . . 8,85.

63. On demande le rayon du cercle équivalent à une zone de 4 centimètres de hauteur, appartenant à une sphère de 9 centimètres de rayon.

64. Une zone de 1 décimètre carré appartient à une sphère de 13 centimètres de rayon; l'une des bases de la zone est à 5 centimètres du centre. On demande la surface du cercle qui détermine la seconde base.

65. Le demi-cercle générateur d'une sphère a 0^m40 de diamètre; dans ce demi-cercle, on a tracé parallèlement à l'axe une corde de 0^m20. Quelle est la surface engendrée par cette corde?

66. Un aérostat sphérique a 4 mètres de diamètre; on l'emplit avec de l'hydrogène impur pesant 100 grammes par mètre cube; le taffetas verni qui forme l'enveloppe pèse 150 grammes par mètre carré. Quel poids pourra enlever ce ballon, si l'air atmosphérique pèse 1293 grammes par mètre cube, et si l'on réserve 5 kilog. de force ascensionnelle?

67. Un aérostat vide et plié pèse 63 kilog. 45; le taffetas pèse 0 kilog. 950 par mètre carré. On demande le poids que pourra enlever ce ballon, l'hydrogène et l'air étant dans les conditions données au problème précédent.

68. Un cube de cuivre (densité 8,85) pesant 1 kilog. 75 est placé sur un tour, et réduit à une sphère dont le diamètre est les 3/4 de l'arête du cube primitif. On demande le poids de la tournure de cuivre obtenue.

69. Un boulet de fonte (densité 7,2) pèse 12 kilog. Quel poids d'or faudrait-il pour former autour de ce boulet une couche de $0^m,0006$ d'épaisseur, la densité de l'or étant 19,26 ?

70. Un creuset a la forme d'un tronc de cône; le fond a un diamètre de $0^m 04$, le bord supérieur un diamètre de 0^m07, et la hauteur est de 0^m10. Il contient du métal en fusion; à la surface, ce métal a $0^m 06$ de diamètre. Quel devra être le diamètre d'un moule sphérique que le métal fondu doit remplir exactement?

71. Un cylindre de $0^m 05$ de rayon, et un cône de $0^m 08$ de rayon, reposent sur un même plan, la hauteur commune est de 0^m20. A quelle hauteur faut-il mener un second plan parallèle au premier, pour que les deux volumes inférieurs soient équivalents?

72. Un tronc de cône a 0^m12 de hauteur; les diamètres des bases ont 0^m08 et 0^m05. On veut mener deux plans parallèles aux bases, de manière que la surface latérale soit divisée dans le rapport des nombres 4, 5, 3, en partant de la grande base. A quelle hauteur sera chaque plan?

73. Même problème en appliquant au volume la condition indiquée pour la surface latérale.

74. Une sphère de platine de 0^m03 de diamètre est enveloppée d'une couche de cuivre de 2 centimètres d'épaisseur. On demande le poids total, les densités étant 21,15 et 8,85.

75. Les pièces de deux sous pèsent 10 grammes, et renferment, en poids, 95 centièmes de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc; les densités respectives sont 8,85, 7,29 et 7,19. Combien faudrait-il de ces pièces pour fondre un boulet sphérique de 25 centimètres de diamètre?

76. Un tronc de cône et un cylindre ont 0^m15 de hauteur commune; la base inférieure a 0^m10 de diamètre dans l'un et dans l'autre. Quel doit être le diamètre de la base supérieure du tronc de cône, pour que son volume soit les $3/5$ du volume du cylindre?

77. On trace sur un terrain deux circonférences concentriques distantes de 3 mètres; la circonférence intérieure a 20 mètres de diamètre; entre les deux circonférences on creuse un fossé trapézoïde de 1^m20 de profondeur, 3 mètres de longueur aux bords et 1^m50 au fond. La terre enlevée a été disposée autour du fossé en un remblai trapézoïde isocèle de 3 mètres de largeur inférieure et 1^m50 de largeur supérieure. Quelle sera la hauteur de ce remblai, supposé que la terre y soit battue de manière à reprendre sa densité primitive?

78. Un octaèdre régulier a une surface totale de 1 mètre carré; calculer la surface de la sphère circonscrite.

79. Un cône circonscrit à une sphère de 0m08 de rayon a une surface totale de 50 décimètres carrés. Quelles sont ses dimensions?

80. Dans une sphère de 0m12 de diamètre, on considère un segment à une base, dont la surface totale est de 1 décimètre carré. Quelle est l'épaisseur du segment?

81. Que faut-il faire : 1° pour tracer, sur une sphère, un arc de grand cercle passant par deux points donnés; 2° pour mener, par un point donné sur la sphère, un arc de grand cercle perpendiculaire à un autre arc donné?

82. Trouver l'angle dièdre de chacun des 5 polyèdres réguliers convexes.

83. Pour chacun des 5 polyèdres réguliers convexes, exprimer, en fonction de l'arête a, 1° les rayons des sphères inscrite et circonscrite; 2° la surface et le volume de chacun de ces polyèdres.

LIVRE VIII

LES COURBES USUELLES

PRÉLIMINAIRES

480. On appelle *axe d'une courbe*, une droite par rapport à laquelle les points de la courbe sont symétriques deux à deux (nº 407).

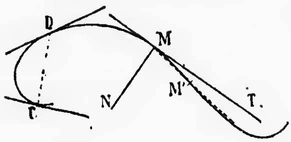
Par suite, l'axe divise en deux parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires, et par une rotation de 180° autour de l'axe, on peut amener une des deux parties de la courbe à coïncider avec l'autre.

On appelle *sommet* le point où l'axe rencontre la courbe.

Le *centre d'une courbe* est un point par rapport auquel les points de la courbe sont symétriques deux à deux (nº 407).

Le centre divise en deux parties égales les cordes qui passent par ce point.

481. La *tangente à une courbe* est la limite MT des positions que prend une sécante MM' tournant autour de l'un des points d'intersection, de telle sorte que le second point M' se rapproche indéfiniment du premier.



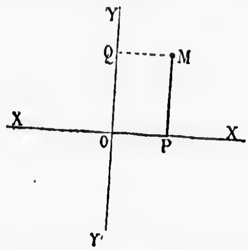
La *normale* est la perpendiculaire MN élevée à la tangente, au point de contact.

La *corde des contacts* est la droite CD qui joint les points de contact de deux tangentes.

482. Une courbe plane est *convexe* lorsqu'elle ne peut être coupée qu'en deux points par une droite. Lorsque les deux points d'intersection se rapprochent indéfiniment, la droite devient tangente, et tous ses points, excepté le point de contact, sont hors de la courbe ; ainsi, une courbe est *convexe* lorsque toutes les tangentes sont extérieures à la courbe.

483. Pour déterminer la position d'un point sur un plan, on mène, par ce point, des lignes parallèles à deux droites rectangulaires tracées sur le plan. Soit M un point quelconque ; la distance MP ou OQ est l'*ordonnée* de ce point, et OP en est l'*abscisse*. OP et MP, considérées simultanément, se nomment les *coordonnées* du point M. Les droites OX et OY se nomment *axes des coordonnées*, leur intersection est l'*origine* des coordonnées.

Les *ordonnées* sont considérées comme *positives* lorsqu'elles sont mesurées sur OY, et *négatives* si elles le sont sur OY'; les *abscisses* sont *positives* à droite de l'origine, et *négatives* à gauche.



Pour étudier facilement les propriétés d'une courbe, on prend pour *axes des coordonnées* des lignes remarquables de la courbe, par exemple, ses *axes de symétrie.*

484. L'*équation* d'une courbe rapportée à deux axes rectilignes, est l'expression de la relation constante qui existe entre l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la courbe.

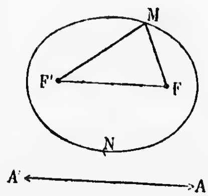
§ I. — ELLIPSE

Définitions.

485. L'ellipse est une courbe plane, telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes situés dans son plan est constante.

Les points fixes se nomment *foyers.*

On appelle *rayons vecteurs* les droites qui joignent un point quelconque de la courbe aux deux foyers.



Soit AA' une longueur constante, F et F' deux points fixes; si, pour chaque point de la courbe MN, on a $MF + MF' = AA'$, cette courbe est une *ellipse.*

La somme *constante* se représente par $2a$.

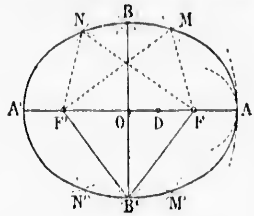
La distance FF' des foyers se nomme *distance focale*, et se représente par $2c$.

Pour que le triangle MFF' soit possible, il faut qu'on ait :

$$FF' < MF + MF' \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2c < 2a.$$

486. Pour *décrire l'ellipse d'un mouvement continu*, connaissant les foyers et la somme constante des rayons vecteurs, on fixe à chaque foyer une des extrémités d'un fil ayant $2a$ pour longueur; puis, au moyen d'un crayon ou d'une pointe à tracer, on tend le fil en tous sens en faisant glisser la pointe à tracer sur le plan.

487. On peut *tracer l'ellipse par points*, connaissant les foyers et $2a$. A partir du milieu O de la distance focale, prenons $OA = OA' = a$; avec AD et DA' dont la somme égale $2a$, décrivons deux circonférences, l'une du point F comme centre, et l'autre du point F'; les points d'intersection appartiennent à l'ellipse.



Remarques. 1° Pour qu'il y ait intersection entre les deux circonférences, il faut qu'on ait $FF' > DA' - DA$ ou $FF' > DA - DA'$.

Cette différence des deux rayons égale $2\overline{OD}$; d'où il suit que le point D doit rester entre F et F'.

2° Quand le point D est en F, la différence des rayons égale FF', et les circonférences décrites des centres F et F' sont tangentes en A ou en A'.

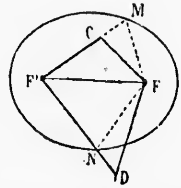
3° Quand le point D est en O, les rayons sont égaux, et ils déterminent les points B et B', qui appartiennent à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'.

488. **Scolie.** Le rayon maximum $F'A = a + c$, et le rayon minimum $FA = a - c$.

Les deux tracés de l'ellipse montrent que la courbe est limitée en tous sens; l'ellipse est donc une courbe *fermée*.

Proposition I. — Théorème.

489. *Lorsqu'un point est intérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux 2 foyers est moindre que 2a; lorsque le point est extérieur, cette même somme est plus grande que 2a.*



1° Joignons aux foyers un point intérieur quelconque C; prolongeons F'C jusqu'à la courbe, et menons MF; nous avons :

$$CF + CF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad < 2a$$

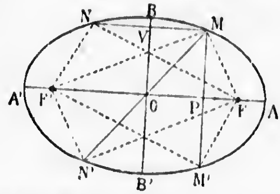
2° Joignons aux foyers un point extérieur quelconque D, et menons FN; nous avons : $DF + DF' > NF + NF'$ ou $> 2a$. Donc...

490. **Corollaire.** Selon que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, ou inférieure, ou égale à $2a$, le point est extérieur ou intérieur à l'ellipse, ou appartient à cette courbe; et l'ellipse est un *lieu géométrique*.

Proposition II. — Théorème.

491. *L'ellipse a pour axes la droite qui passe par les foyers, et la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint les foyers; et elle a pour centre le point de rencontre des axes.*

Soit M un point quelconque de l'ellipse. Prolongeons les perpendiculaires MP et MV, et la ligne MO; et prenons PM′ = PM, VN = VM, ON′ = OM; nous déterminons ainsi les points symétriques de M par rapport à AA′, à BB′ et au point O; il suffit de prouver que ces points appartiennent à la courbe.



1° FF′ est perpendiculaire au milieu de MM′; donc MF = M′F, et MF′ = M′F′; d'où M′F + M′F′ = MF + MF′ = $2a$; donc M′ est un point de l'ellipse (n° 490).

2° Les trapèzes rectangles OFMV et OF′NV sont superposables, car leurs bases sont égales; donc MF = NF′, et les angles en F et F′ sont égaux. Les triangles FF′M et FF′N sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux; donc NF = MF′, et puisque NF′ = MF, on a NF + NF′ = MF + MF′ = $2a$; donc le point N appartient à l'ellipse.

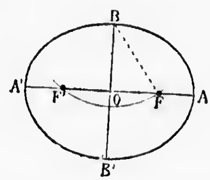
3° Les droites MN′ et FF′ se coupant en leurs milieux, la figure MFN′F′ est un parallélogramme, et l'on a

$$N'F + N'F' = MF + MF' = 2a$$

ainsi le point N′ appartient à la courbe.

Donc AA′ et BB′ sont les axes, et leur intersection est le centre de la courbe.

492. **Scolie.** La perpendiculaire élevée au milieu de FF′ rencontre la courbe aux points B et B′, également éloignés des foyers; la longueur BO = OB′ se représente par b; et comme BF = a, on a b plus petit que a. La droite AA′ ou $2a$ est le *grand axe* de l'ellipse; BB′ ou $2b$ en est le *petit axe*. Le triangle rectangle BOF fournit la relation $a^2 = b^2 + c^2$.



Le rapport $\frac{c}{a}$ est *l'excentricité* de l'ellipse; elle varie de 0 à 1. Lorsque $b = a$, l'excentricité est nulle, et l'ellipse est un cercle. Lorsque b est nul, l'excentricité $\frac{c}{a} = 1$, et l'ellipse est réduite au grand axe.

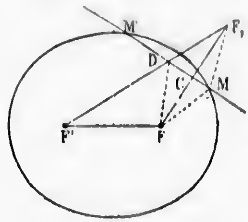
L'ellipse a quatre sommets : A, A′, B et B′.

Pour déterminer les foyers, connaissant les axes, il faut décrire un arc de cercle du point B comme centre avec a pour rayon; l'intersection de cet arc avec AA′ fait connaître F et F′.

Proposition III. — Théorème.

La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact. (Démonstration due à M. J. Serret.)

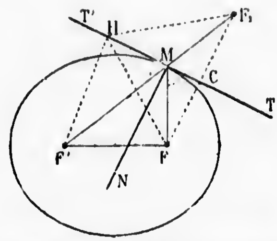
Considérons une sécante quelconque MM'; de l'un des foyers abaissons la perpendiculaire FC, et prenons la ligne CF_1 égale à CF; menons $F'F_1$; joignons le point D au foyer F, et le point M aux trois points F', F, F_1. Nous avons $MF_1 = MF$, $DF_1 = DF$; Donc $DF' + DF = F'F_1$; $MF' + MF_1 = MF' + MF = 2a$; mais $F'F_1$ est moindre que $MF' + MF_1$ ou $2a$; donc



(Tracez au crayon la droite MF'.)

$$DF' + DF < 2a$$

La somme des distances du point D aux deux foyers étant moindre que $2a$, le point D est dans l'ellipse (n° 490); il est donc situé entre M et M'; de plus, l'angle $MDF = MDF_1 = M'DF'$, et cela a lieu quelque rapprochés que soient les points M et M'; mais à la limite, quand M' se confond avec M, la sécante devient tangente. Donc...



494. **Corollaires.** 1° *Tous les points de la tangente, sauf le point de contact, sont hors de la courbe*, car on a :

$$HF' + HF \quad \text{ou} \quad HF' + HF_1 > 2a$$

donc *l'ellipse est une courbe convexe* (n° 482).

2° *La normale MN est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact;* car les angles qu'elle forme avec MF et MF' ont pour compléments les angles égaux que la tangente forme avec les mêmes rayons.

495. **Scolie.** *La droite $F'F_1$ qui joint un foyer au point symétrique de l'autre foyer par rapport à la tangente, passe au point de contact.*

Aux sommets de l'ellipse, les tangentes sont perpendiculaires aux axes.

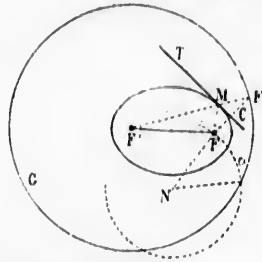
Définition. On appelle *cercles directeurs* de l'ellipse les cercles décrits de chaque foyer comme centre avec $2a$ pour rayon.

L'ellipse a deux cercles directeurs.

Proposition IV. — Théorème.

496. *Le lieu du point symétrique d'un foyer par rapport à une tangente quelconque est le cercle directeur décrit de l'autre foyer.*

Soit F_1 le point symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT, la droite $F'F_1$ passe au point de contact (n° 495); et puisque la tangente est perpendiculaire au milieu de FF_1, la droite $F'F_1 = MF' + MF = 2a$



Donc le point F_1, symétrique du foyer F, est sur le cercle directeur décrit du foyer F'.

497. **Scolie.** *L'ellipse est le lieu des points M également éloignés d'un cercle F_1G et d'un point F situé dans ce cercle;* par suite, lorsqu'une circonférence passe par le point F,

1° Elle ne rencontre pas le cercle directeur si le centre est dans l'ellipse, car le centre est plus près du foyer que du cercle directeur;

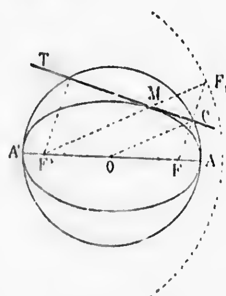
2° Elle lui est tangente si le centre est sur la courbe;

3° Elle coupe ce cercle directeur en deux points si le centre est hors de l'ellipse; car ce centre N est plus rapproché du cercle directeur que du foyer F.

On peut utiliser le cercle directeur pour *tracer l'ellipse par points* lorsqu'on connaît les foyers et $2a$: menons FF_1; la perpendiculaire élevée au milieu de FF_1 est tangente à la courbe, et le point de contact est à l'intersection de la tangente et du rayon $F'F_1$ (n° 495).

Proposition V. — Théorème.

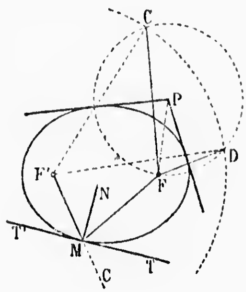
498. *Le lieu géométrique des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.*



Soit une tangente quelconque MT, et le cercle directeur décrit du foyer F'; menons OC. Nous avons $FC = \frac{1}{2}FF_1$; $OF = \frac{1}{2}FF'$; donc OC qui joint les milieux des côtés FF' et FF_1 égale $\frac{1}{2}F'F_1 = a$; donc le lieu du point C est le cercle décrit du centre de l'ellipse avec a pour rayon. Ce cercle est appelé *cercle principal* de l'ellipse. (Ici le mot *cercle* est employé pour *circonférence.*)

Proposition VI. — Problème.

499. *Mener une tangente à l'ellipse : 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point extérieur.*



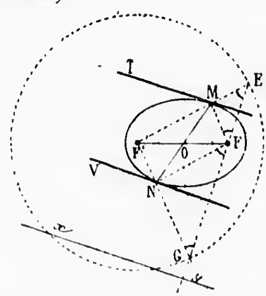
1° Soit M le point donné sur la courbe. Menons les rayons vecteurs du point de contact; prolongeons F'M, et menons la bissectrice de l'angle extérieur FMG; cette bissectrice est tangente; car les angles FMT et F'MT' sont égaux...

2° Décrivons un des cercles directeurs. Si P est le point extérieur donné, la circonférence décrite avec le rayon PF coupera le cercle directeur en deux points C et D (n° 497); joignons ces points au foyer F; les perpendiculaires élevées aux milieux de FC et de FD sont tangentes (n° 497), et passent au point P, centre des arcs CF et FD.

500. **Scolie.** Lorsque le point est intérieur, il n'y a pas de tangente; lorsqu'il est sur la courbe il y en a une, et quand il est extérieur il y en a deux (n° 497).

Pour avoir la normale en un point M donné sur la courbe, il suffit de mener la bissectrice de l'angle FMF' des deux rayons vecteurs (n° 494).

Proposition VII. — Problème.



501. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une ligne donnée.*

Décrivons le cercle directeur relatif au foyer F'; et par l'autre foyer F, menons la perpendiculaire EG sur la droite donnée *xy*.

Les perpendiculaires MT et NV élevées aux milieux des droites FE et FG sont tangentes (n° 497), et les rayons F'E et F'G déterminent les points de contact (n° 495).

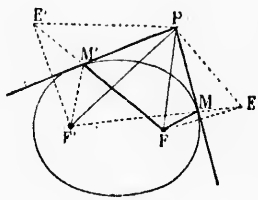
502. **Scolie.** 1° *La corde des contacts* MN *passe au centre de l'ellipse.* En effet, les tangentes étant perpendiculaires au milieu de FE et de FG, et la ligne F'G étant égale à F'E, les trois triangles EMF, EF'G et FNG sont isocèles, tous leurs angles aigus sont égaux; donc les lignes NF et F'M sont parallèles; il en est de même de MF et de F'N; ainsi la figure MFNF' est un parallélogramme, et la diagonale MN, corde des contacts, passe au point O, au milieu de l'autre diagonale.

2° Les solutions données pour les divers problèmes des tangentes n'exigent point que la courbe soit tracée : il suffit que l'on connaisse les foyers et $2a$.

Proposition VIII. — Théorème.

503. *Les tangentes menées à l'ellipse par un point extérieur, font des angles égaux avec les droites qui vont du même point aux deux foyers, et la droite qui va du point extérieur à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact.*

Soient les deux tangentes PM et PM'; et soient les points E et E' symétriques des foyers. La droite F'E passe au point M, et FE' passe au point M' (n° 495).



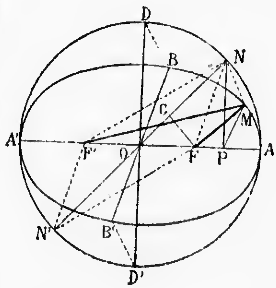
Les triangles EPF' et FPE' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux ; car $PE = PF$, $PF' = PE'$, et $F'E = 2a = FE'$; donc l'angle $EPF' = FPE'$; et si l'on retranche de chacun d'eux la partie commune FPF', il reste angle $EPF = E'PF'$, d'où angle $FPM = F'PM'$;

2° Les triangles égaux déjà considérés donnent : angle $PEF' = PFE'$; mais l'angle $PEF' = MFP$; donc angle $MFP = PFM'$; donc PF est la bissectrice de l'angle MFM'.

Proposition IX. — Théorème.

504. *La projection d'un cercle sur un plan est une ellipse.* (Démonstration due à M. Courcelle.)

Prenons un plan qui passe par le centre; soit le diamètre AA' l'intersection des deux plans. Par le centre et par un point quelconque N du cercle menons des plans perpendiculaires à AA', et dans ces plans, les perpendiculaires DB et NM au plan de projection. Les points B et M appartiennent à la courbe; DO, BO, NP, MP, sont perpendiculaires à l'intersection AA', puisque ce diamètre est perpendiculaire aux plans DOB, NPM. Portons la grandeur DB de O en F et en F', joignons M, projection d'un point quelconque de la circonférence, aux points F et F'; il suffit de prouver que $MF + MF'$ est une somme constante.



Du point F, abaissons la perpendiculaire FG sur le diamètre NN', et menons NF. La ligne NM est perpendiculaire aux droites MP, MF, MF′. Les triangles rectangles DBO et NMP sont semblables, car leurs côtés sont respectivement parallèles; on a donc $\frac{DB}{NM} = \frac{DO}{NP}$.

Les triangles rectangles NPO et FGO, ayant un angle aigu commun, sont semblables, et l'on a : $\frac{OF}{FG} = \frac{NO \text{ ou } DO}{NP}$; les deux proportions ont un rapport commun;

donc $\frac{DB}{NM} = \frac{OF}{FG}$; or $DB = OF$; donc $NM = FG$.

Les triangles rectangles NMF et NGF ayant l'hypoténuse commune et un autre côté égal, $NM = FG$, sont égaux; donc $MF = NG$.

Dans le parallélogramme NFN′F′, le côté $F'N = FN'$; les triangles rectangles NMF′ et FGN′ sont égaux, car $NM = FG$, et l'hypoténuse $F'N = FN'$; donc $MF' = GN'$.

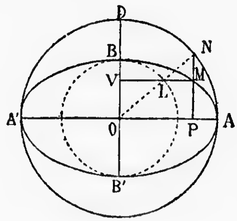
Ainsi $MF + MF' = NG + GN' = AA'$, quantité constante.

La courbe est donc une ellipse ayant F et F′ pour foyers, AA′ pour grand axe, et pour petit axe BB′, projection du diamètre DD′ perpendiculaire à l'intersection des plans.

Proposition X. — Théorème.

505. *Les ordonnées de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle principal dans un rapport constant.*

Dans le théorème précédent, si l'on rabat le cercle sur le plan de l'ellipse, les ordonnées correspondantes PM et PN étant perpendicu-



laires au diamètre AA′, prennent la même direction, et on a toujours :

$$\frac{PM}{PN} = \frac{OB}{OD} = \frac{b}{a}, \text{ rapport constant.C.Q.F.D.}$$

506. **Scolie.** 1° Le rapport $\frac{b}{a}$ peut varier de zéro à l'unité. Le premier cas a lieu quand le cercle est perpendiculaire au plan de projection; l'ellipse se réduit alors à une droite. Le second cas se présente quand le cercle est parallèle au plan.

2° Si l'on décrit un cercle ayant le petit axe pour diamètre, les *abscisses correspondantes* de l'ellipse et du cercle sont dans le rapport $\frac{a}{b}$.

En effet, menons MV parallèle au grand axe, et soit L le point où cette ligne coupe NO, nous avons :

$$\frac{b}{a} = \frac{MP}{NP} = \frac{LO}{NO \text{ ou } a}$$

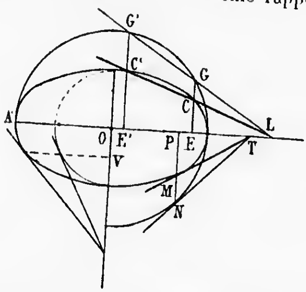
Donc $LO = b$: ainsi le point L appartient au cercle dont BB' est le diamètre, et les triangles semblables ONP et LOV donnent :

$$\frac{PO \text{ ou } MV}{LV} = \frac{NO}{LO} = \frac{a}{b}$$

Proposition XI. — Théorème.

507. Par rapport à l'ellipse et au cercle principal, *les tangentes dont les points de contact ont même abscisse se coupent sur le grand axe.*

1° Considérons les sécantes GG' et CC' dont les points d'intersection ont même abscisse; on a : $\frac{CE}{GE} = \frac{b}{a} = \frac{C'E'}{G'E'}$ (n° 505); donc les parallèles GE et G'E' sont divisées dans un même rapport; et en vertu



d'un théorème connu (n° 207), les droites GG', CC' et AA' concourent en un même point.

2° Les ordonnées GE et G'E' peuvent se rapprocher indéfiniment; à la limite, les points G et G' se confondent, ainsi que C et C'; et on obtient des tangentes; donc *les tangentes* MT *et* NT *dont les points de contact ont même abscisse, coupent le grand axe au même point.*

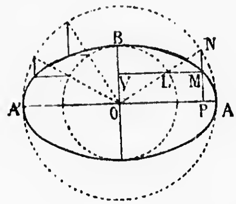
Scolie. On prouve d'une manière analogue que, par rapport à l'ellipse et au cercle du petit axe, les tangentes dont les points de contact ont la même ordonnée se coupent sur le petit axe.

Proposition XII. — Problème.

508. *Tracer l'ellipse au moyen des cercles décrits sur les axes.*

Après avoir décrit les cercles, menons un rayon quelconque ON;

l'ordonnée du point N et l'abscisse du point L donnent un point M de la courbe ;

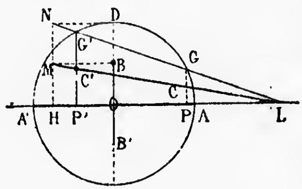


car on a : $\frac{MP}{NP} = \frac{OL}{ON} = \frac{b}{a}$ (nº 505).

Ordinairement on divise le cercle principal en parties égales.

Proposition XIII. — Problème.

509. *Sans construire la courbe, trouver les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse dont on connaît les axes.*



Soient LM, AA', BB' la droite et les axes donnés. Décrivons le cercle principal, menons BM et DN parallèles à AA', et par le point M, l'ordonnée NH.

Menons LN, puis les ordonnées GP et G'P'; les points C et C' sont les points cherchés. Car on a :

$$\frac{CP}{GP} = \frac{C'P'}{G'P'} = \frac{MH}{NH} = \frac{b}{a}$$

Proposition XIV. — Théorème.

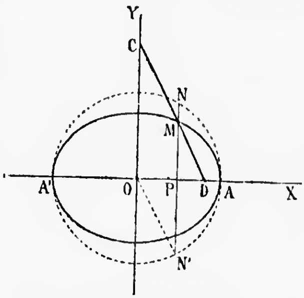
510. *Un point quelconque d'une droite dont les extrémités glissent respectivement sur deux droites rectangulaires, décrit une ellipse dont les axes sont sur les droites rectangulaires, et le centre à leur point d'intersection.*

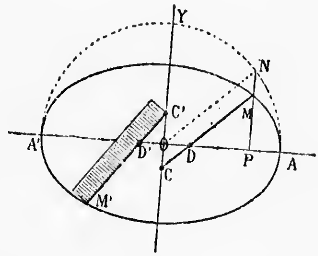
1er *cas.* Si le point M est sur la droite mobile CD, de ce point, abaissons une perpendiculaire sur OX, et par le point O, menons une parallèle à CD. On a ON' = CM ; le point N' appartient donc à la circonférence décrite du point O comme centre avec CM pour rayon; or les triangles semblables DPM et OPN' donnent la proportion :

$$\frac{PM}{PN'} = \frac{MD}{ON'} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{NP} = \frac{MD}{MC}, \text{ rapport constant.}$$

Donc le lieu est une ellipse ayant O pour centre, et dans laquelle

$$a = MC, \quad \text{et} \quad b = MD.$$





2^e^ *cas.* Si le point M est sur le prolongement de la droite mobile CD, du point M abaissons une perpendiculaire sur OX, et par le point O, menons une parallèle à CD. On a toujours $ON = CM$; et

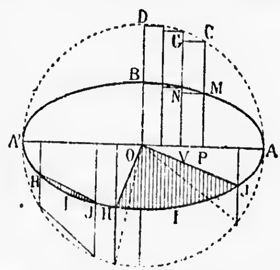
$$\frac{PM}{PN} = \frac{DM}{ON \text{ ou } CM}, \text{ rapport constant.}$$

Donc le lieu du point M est une ellipse.

Scolie. L'emploi du compas elliptique est fondé sur la propriété précédente; il en est de même du tracé de l'ellipse par points, au moyen d'une règle ou d'une bande de papier, sur laquelle, à partir du point M', on porte les deux demi-axes M'D' et M'C'.

Proposition XV. — Théorème.

511. *L'aire de l'ellipse égale π multiplié par le produit des demi-axes.*



Considérons des ordonnées équidistantes, et se multipliant indéfiniment. Par les points C et M, menons des parallèles à AA'. L'ellipse est la limite de la somme des rectangles analogues à MPNV, et le cercle la limite de la somme des rectangles tels que CPGV. Or les deux rectangles ayant même hauteur VP sont dans le rapport de leurs bases MP et CP, ou $\frac{b}{a}$.

Il en est donc de même des limites vers lesquelles tendent les sommes de ces rectangles; donc

$$\frac{\textit{ellipse}}{\textit{cercle}} = \frac{b}{a}; \quad \textit{ellipse} = \textit{cercle} \times \frac{b}{a}$$

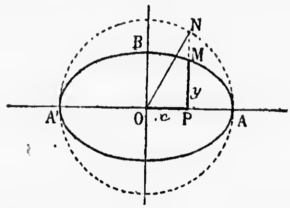
$$\textit{ellipse} = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$$

512. **Corollaire.** Pour évaluer une aire quelconque limitée par un arc d'ellipse, par exemple le segment HIJ ou le secteur OHIJ, il faut multiplier par le rapport $\frac{b}{a}$ l'aire correspondante dans le cercle principal.

L'ellipse πab est moyenne proportionnelle entre les cercles πa^2 et πb^2 décrits sur les axes.

Proposition XVI. — Théorème.

513. *L'ellipse a pour équation* $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ (nº 484).



Décrivons le cercle principal. Pour un point quelconque M de l'ellipse et pour son correspondant N, on a :

$$\frac{NP}{MP \text{ ou } y} = \frac{a}{b} \qquad \text{d'où} \quad \overline{NP}^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$$

Le triangle rectangle OPN fournit la relation

$$\overline{NP}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OP}^2 = a^2 - x^2$$

$$\text{mais} \quad \overline{NP}^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}, \quad \text{donc} \quad \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$$

$$\text{d'où} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Telle est la relation constante qui existe entre les coordonnées de chaque point de l'ellipse, lorsqu'on prend ses axes de symétrie pour axes des coordonnées.

En divisant tous les termes par a^2b^2, l'équation devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Scolie. Lorsque $a = b$, l'ellipse est un cercle, et l'équation se simplifie : $x^2 + y^2 = a^2$, le triangle rectangle ONP donne directement cette relation.

§ II. — HYPERBOLE

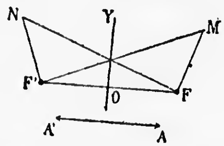
Définitions.

514. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes situés dans son plan est constante.

Les points fixes se nomment *foyers*.

On appelle *rayons vecteurs* les droites qui joignent un point quelconque de la courbe aux deux foyers.

Soient AA′ une longueur constante, F et F′ deux points fixes : si pour chaque point M ou N de la courbe, on a
$MF' - MF = AA'$, ou $NF - NF' = AA'$, la courbe est une *hyperbole*.



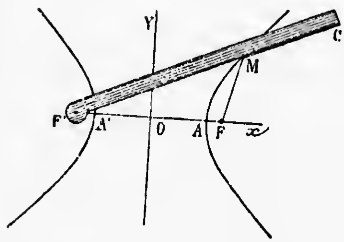
La *différence constante* AA′ se représente par $2a$.

La distance FF′ des foyers se nomme *distance focale*, et se représente par $2c$. Pour que les triangles MFF′ et NFF′ soient possibles, il faut qu'on ait :

$$FF' > MF' - MF, \quad \text{et} \quad FF' > NF - NF', \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2c > 2a$$

515. Pour *décrire l'hyperbole d'un mouvement continu*, connaissant les foyers et $2a$, on prend une règle plus longue que la distance focale, et un fil égal à la longueur de la règle diminuée de $2a$; on fixe les extrémités de ce fil en C et en F. Si l'on tend le fil le long de la règle en faisant tourner l'extrémité de cette dernière autour de F′, la pointe à tracer décrira une partie de la courbe, car on a toujours :

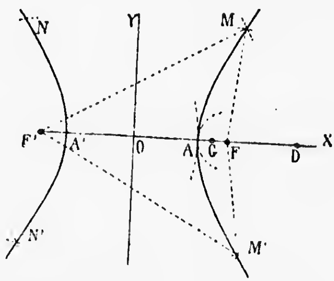
$$MF' - MF = 2a$$



En fixant le fil en F′, et plaçant la règle en F, on obtient une seconde partie de la courbe, située à gauche de la perpendiculaire OY.

516. On peut *tracer l'hyperbole par points* lorsqu'on connaît les foyers et $2a$. A partir du milieu O de la distance focale, prenons $OA = OA' = a$; avec des rayons DA et DA′ dont la différence égale $2a$, décrivons deux circonférences, l'une du point F comme centre, et l'autre du point F′.

Les points d'intersection appartiennent à l'hyperbole.



Remarques. 1° Pour qu'il y ait intersection entre les deux circonférences, il faut qu'on ait $FF' < DA + DA'$. Cette somme des deux rayons égale $2\overline{OD}$; d'où il suit que le point D ne doit jamais être pris entre F et F′.

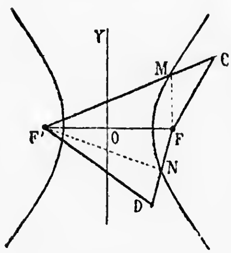
2° Quand le point D est en F, la somme des rayons égale FF', et les circonférences décrites des centres F et F' sont tangentes en A ou en A'.

517. **Scolie.** 1° Les plus petits rayons qu'on puisse utiliser pour un même point ont pour longueur $c+a$ et $c-a$.

2° La perpendiculaire OY élevée au milieu de FF' étant le lieu des points également éloignés des foyers, ne peut rencontrer la courbe; dans le tracé continu, il faut que la règle et le fil aient pour différence $2a$, mais rien ne limite leur longueur; pareillement, dans le tracé par points, les rayons des circonférences sécantes peuvent croître indéfiniment. Donc l'hyperbole est composée de deux parties séparées, et les branches de la courbe s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de OX.

Proposition XVII. — Théorème.

518. *Pour tout point intérieur à l'hyperbole, la différence des distances aux foyers est plus grande que* $2a$*; pour tout point extérieur, cette même différence est moindre que* $2a$.



Un point est *intérieur* lorsqu'il est dans une des deux régions du plan où se trouvent les foyers, et *extérieur* lorsqu'il est entre les deux parties séparées de la courbe.

1° Joignons le point intérieur C aux deux foyers, et menons MF. On a

$$CF < CM + MF$$

donc $CF' - CF > CF' - (CM + MF)$

ou $CF' - CF > MF' - MF$

c'est-à-dire $CF' - CF > 2a$...

2° Joignons le point extérieur D aux deux foyers, et menons F'N. On a

$$F'D < NF' + ND$$

donc $F'D - DF < NF' + ND - DF$

ou $F'D - DF < NF' - NF$, c'est-à-dire $F'D - DF < 2a$. Donc...

519. **Scolie.** Selon que la différence des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, ou inférieure, ou égale à $2a$, le point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, ou appartient à cette courbe.

Proposition XVIII. — Théorème.

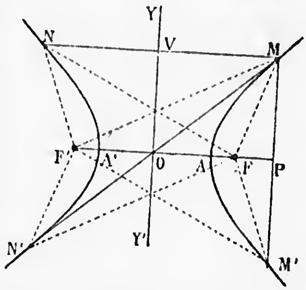
520. *L'hyperbole a pour axes la droite qui passe par les foyers, et la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint ces mêmes foyers, et pour centre le point de rencontre des axes.*

Soit M un point quelconque de l'hyperbole. Prolongeons les perpendiculaires MP, MV, et la ligne MO; et prenons $PM' = PM$, $VN = VM$, $ON' = OM$; nous déterminons ainsi les points symétriques de M par rapport à AA', à BB', et au point O; il suffit de prouver que ces points appartiennent à la courbe.

1° FF' est perpendiculaire au milieu de MM'; donc $M'F = MF$, et $M'F' = MF'$; d'où

$$M'F' - M'F = MF' - MF = 2a\,;$$

donc M' est un point de l'hyperbole (n° 519).



2° Les trapèzes rectangles OFMV et OF'NV sont superposables, car leurs bases sont égales; donc $NF' = MF$, et les angles en F et F' sont égaux. Les triangles FF'N et FF'M sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux; donc $NF = MF'$; et puisque $NF' = MF$, on a

$$NF - NF' = MF' - MF = 2a\,;$$

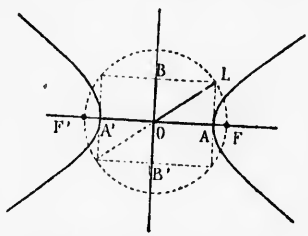
donc N appartient à l'hyperbole.

3° Les droites MN' et FF' se coupent en leurs milieux; la figure MFN'F' est donc un parallélogramme, et la différence de deux côtés adjacents égale la différence des deux autres côtés; ainsi

$$N'F - N'F' = MF' - MF = 2a$$

donc AA' et la perpendiculaire YY' sont les *axes*, et leur intersection est le *centre* de la courbe.

521. **Scolie.** En général, lorsqu'une courbe a deux axes rectangulaires, leur intersection est le centre de la courbe.



AA' est nommé *axe transverse* de l'hyperbole; l'autre axe ne rencontre pas la courbe : il est appelé *axe non transverse*.

Lorsqu'on élève une perpendiculaire à l'axe transverse au point A, et que du centre, avec le rayon $OF = c$, on coupe cette perpendiculaire en L, la longueur AL, portée de O en B et en B', est regardée, par analogie à ce qui a lieu dans l'ellipse, comme la longueur de l'axe non transverse. Le triangle rectangle AOL fournit la relation

$$\overline{LO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AL}^2, \quad \text{ou } c^2 = a^2 + b^2$$

Le rapport $\frac{c}{a}$ est *l'excentricité* de l'hyperbole.

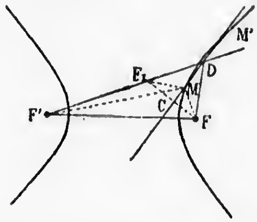
L'*hyperbole équilatère* est celle dans laquelle les deux axes sont égaux; dans ce cas $c^2 = 2a^2$, et $c = a\sqrt{2}$.

L'hyperbole a deux sommets : A et A'.

Proposition XIX. — Théorème.

522. *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact.*

Considérons une sécante quelconque MM′; de l'un des foyers, abaissons la perpendiculaire FC, et prenons la ligne CF_1 égale à CF; menons $F'F_1$, et joignons le point D au foyer F, et le point M aux trois points F, F′ et F_1; nous avons



$MF_1 = MF$, et $DF_1 = DF$

donc $DF' - DF = F'F_1$

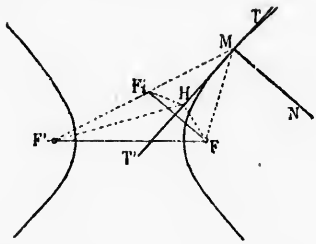
$$MF' - MF_1 = MF' - MF = 2a$$

mais $F'F_1$ est plus grand que $F'M - MF_1$ ou $2a$; donc

$$DF' - DF > 2a$$

La différence des distances du point D aux deux foyers étant plus grande que $2a$, le point D est dans l'hyperbole (nº 518); il est donc situé entre M et M′; de plus l'angle $F_1DC = FDC$; et cela a lieu quelque rapprochés que soient les points M et M′; mais à la limite, quand M′ se confond avec M, la sécante devient tangente. Donc...

523. **Corollaires.** 1º *Tous les points de la tangente, sauf le point de contact, sont hors de la courbe*, car on a $HF' - HF < F'F_1$, ou $2a$; ainsi l'hyperbole est une courbe convexe (nº 482).



2º *La normale* MN *est bissectrice de l'angle extérieur formé par les rayons vecteurs du point de contact;* car elle est perpendiculaire à la bissectrice intérieure.

524. **Scolie.** *La droite* $F'F_1$ *qui joint un foyer au point symétrique de l'autre foyer par rapport à la tangente, passe au point de contact.*

Aux sommets de l'hyperbole, les tangentes sont perpendiculaires à l'axe transverse.

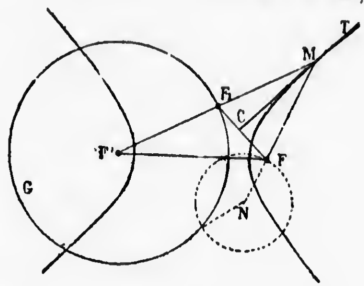
Définition. On appelle *cercles directeurs* de l'hyperbole, les cercles décrits de chaque foyer comme centre avec $2a$ pour rayon.

L'hyperbole a deux cercles directeurs.

Proposition XX. — Théorème.

525. *Le lieu du point symétrique d'un foyer par rapport à une tangente quelconque, est le cercle directeur décrit de l'autre foyer.*

Soit F_1 le point symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT; la droite $F'F_1$ passe au point de contact (n° 524); et puisque la



tangente est perpendiculaire au milieu de FF_1, la droite

$$F'F_1 = MF' - MF = 2a.$$

Donc le point F_1 symétrique du foyer F est sur le cercle directeur décrit du foyer F'.

526. **Scolie.** *L'hyperbole est le lieu des points M également éloignés d'un cercle F_1G, et d'un point F situé hors de ce cercle.* Par suite, lorsqu'une circonférence passe par le point F,

1° Elle ne rencontre pas le cercle directeur si le centre est dans l'hyperbole; car le centre est plus près du foyer que du cercle directeur;

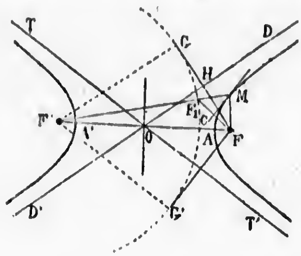
2° Elle lui est tangente si le centre est sur la courbe;

3° Elle coupe ce cercle directeur en deux points si le centre est hors de l'hyperbole; car ce centre N est plus rapproché du cercle directeur que du foyer F.

On peut utiliser le cercle directeur pour *construire l'hyperbole par points* lorsqu'on connaît les foyers et $2a$. Menons FF_1; la perpendiculaire CT élevée au milieu de FF_1 est tangente à la courbe, et le point de contact est à l'intersection de la tangente et du rayon $F'F_1$ (n° 524).

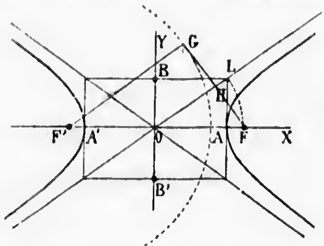
527. **Asymptotes.** La droite FF_1 qui joint le foyer F à un point quelconque du cercle directeur relatif à F', peut devenir tangente à ce cercle. Soit FG cette position particulière. La perpendiculaire HD, élevée au milieu de cette droite, est tangente à l'hyperbole, et le point de contact est donné par le prolongement du rayon F'G (n° 524); mais les droites HD et F'G, perpendiculaires à FG, sont parallèles; donc le point de contact est infiniment éloigné.

La tangente dont le point de contact est infiniment éloigné du sommet se nomme asymptote de l'hyperbole; cette tangente DH passe au centre O, milieu de FF' puisqu'elle est parallèle à F'G base du triangle FGF', et qu'elle passe au point H milieu de FG.



A cause de la symétrie des points de la courbe par rapport au centre, la ligne DOD' est asymptote de la partie inférieure de la branche de gauche.

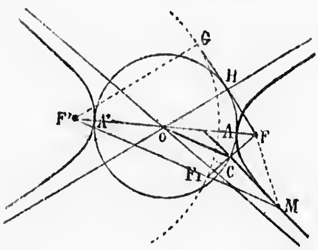
La tangente FG' donne une nouvelle asymptote TOT'; les deux droites DOD' et TOT' font des angles égaux avec FF', car les angles FF'G et FF'G', sont égaux; donc *les axes sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes.*



Au sommet, élevons une perpendiculaire AL, limitée à l'asymptote; les triangles rectangles HOF et AOL sont égaux, car ils ont un angle aigu commun, et $OH = \frac{1}{2} F'G = a = OA$; donc $OL = OF = c$; par suite (n° 521), $AL = b$, valeur du demi-axe non transverse. *Donc les asymptotes sont dirigées suivant les diagonales du rectangle construit sur les deux axes*, et la distance FH du foyer à l'asymptote égale b.

Les asymptotes de l'hyperbole équilatère se coupent à angle droit; car $a = b$, et le rectangle des axes devient un carré (n° 521).

Proposition XXI. — Théorème.



528. *Le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'hyperbole est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

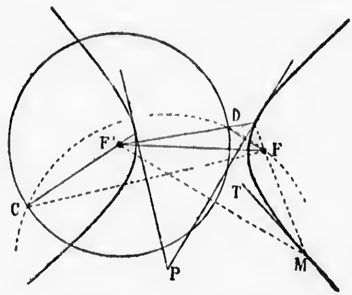
Supposons une tangente quelconque MC, et le cercle directeur décrit du foyer F'; menons OC. Nous avons $FC = \frac{1}{2} FF_1$, $OF = \frac{1}{2} FF'$; donc OC qui joint les milieux des côtés FF' et FF_1 égale $\frac{1}{2} F'F_1 = a$; donc le lieu du point C est le cercle décrit du centre de l'hyperbole avec a pour rayon.

529. **Scolie.** Les projections des foyers sur les asymptotes appartiennent à ce même cercle; et les lignes projetantes, telles que FH, sont tangentes à ce cercle. De plus $FH = b$.

Proposition XXII. — Problème.

530. *Mener une tangente à l'hyperbole, 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point extérieur.*

1° Soit M le point donné sur la courbe; il suffit de mener la bis-



sectrice MT des rayons vecteurs du point de contact (n° 522).

2° Décrivons un des cercles directeurs. Si P est le point extérieur donné, la circonférence décrite avec le rayon PF coupera le cercle directeur en deux points C et D (n° 526); joignons ces points au foyer F; les perpendiculaires élevées aux milieux de FC et de FD sont tangentes (n° 526), et passent au point P, centre des arcs CF et FD.

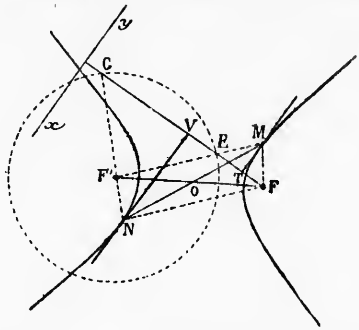
531. **Scolie.** Lorsque le point est intérieur, il n'y a pas de tangente; lorsqu'il est sur la courbe, il y en a une; et quand il est extérieur, il y en a deux (n° 526). Si le point extérieur donné est compris dans l'un des angles des asymptotes dont AA' est bissectrice, les deux lignes sont tangentes à la même branche; si le point est dans les angles qui ont pour bissectrice l'axe non transverse, les tangentes appartiennent à des branches différentes (n° 527).

Proposition XXIII. — Problème.

532. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une ligne donnée.*

Décrivons le cercle directeur relatif au foyer F'; et par l'autre foyer F, menons la perpendiculaire FEG sur la droite donnée xy.

Les perpendiculaires MT et NV, élevées aux milieux des droites FE



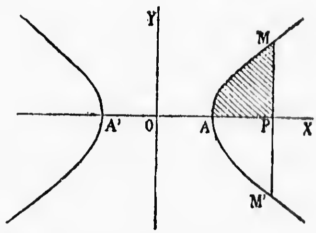
et F'G, sont tangentes (nº 526); et les rayons F'E et F'G déterminent les points de contact.

533. **Scolie.** 1º *La corde des contacts* MN *passe au centre de l'hyperbole.* En effet, les tangentes étant perpendiculaires au milieu de FE et de FG, et la ligne F'G étant égale à F'E, les trois triangles EMF, EF'G et FNG sont isocèles, tous leurs angles en G, E, F, sont égaux; donc les lignes NF et F'M sont parallèles; il en est de même de MF et F'N; ainsi la figure MFNF' est un parallélogramme, et la diagonale MN, corde des contacts, passe au point O, milieu de l'autre diagonale.

Cette propriété appartient à toutes les courbes à centre.

2º Les solutions données pour les divers problèmes des tangentes n'exigent point que la courbe soit tracée; il suffit que l'on connaisse les foyers et $2a$.

Remarques. 1º L'aire d'un segment MAM' d'hyperbole n'est point



donné par une formule élémentaire; on peut employer les formules Simpson ou Poncelet (nºˢ 606 et 607).

2º L'hyperbole a pour équation $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{n}^\text{o}\ 574)$$

Quand l'hyperbole est équilatère, l'équation se simplifie, et devient :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

§ III. — PARABOLE

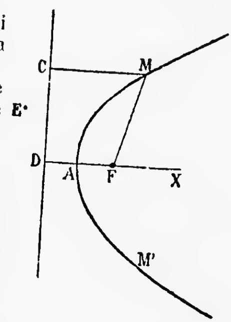
Définitions.

534. La *parabole* est une courbe plane dont chaque point est également éloigné d'une droite et d'un point fixes donnés dans son plan.

Le point fixe se nomme *foyer*.

La droite donnée se nomme *directrice*.

On appelle *rayon vecteur* la droite qui joint le foyer à un point quelconque de la courbe.

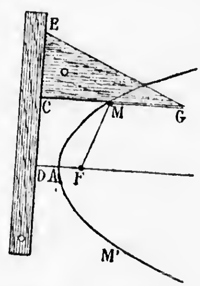


Soient F un point fixe, et CD une droite fixe; si, pour chaque point de la courbe MAM', on a MF = MC, cette courbe est une *parabole*.

Le point A, milieu de la perpendiculaire FD, appartient à la courbe. La parabole ne peut s'étendre du côté de la directrice opposé au foyer; car tout point E, pris de ce côté, est plus rapproché de la directrice que du foyer.

La distance FD du foyer à la directrice se nomme *paramètre*, et se représente par p.

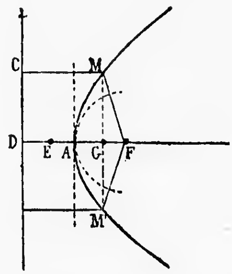
535. *Pour décrire la parabole d'un mouvement continu, connaissant la directrice et le foyer*, on place un des côtés de l'angle droit d'une équerre contre la directrice, un fil égal à l'autre côté de l'angle droit est fixé, par ses extrémités, au foyer F et au point G; en faisant glisser l'équerre le long de la directrice, la pointe à tracer qui tendrait le fil en l'appliquant contre CG, décrirait une partie de la parabole, car on aurait constamment MF = MC.



536. *On peut tracer la parabole par points, connaissant la directrice et le foyer.* Du foyer, abaissons la perpendiculaire FD sur la directrice, et prenons le milieu A du paramètre FD; menons une droite quelconque MM', parallèle à la directrice; et du foyer F comme centre, avec un rayon DG égal à la distance de la directrice à la parallèle, décrivons une circonférence; les

points d'intersection de cette circonférence et de la droite MM' appartiennent à la parabole.

Remarques. 1° Pour qu'il y ait intersection entre la circonférence et la parallèle MM', il faut qu'on ait $GD > GF$; d'où il suit que le



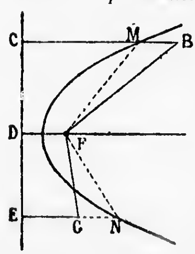
point G doit toujours être au delà de A par rapport à la directrice.

2° Quand le point G est en A, la circonférence est tangente à la parallèle; car $AF = AD$, et le contact a lieu au point A.

537. **Scolie.** Dans le tracé continu, il faut que le fil et le côté de l'équerre aient des longueurs égales; mais rien ne limite ces longueurs. Dans le tracé par points, la parallèle, toujours située du côté du foyer, peut s'éloigner indéfiniment de la directrice; donc *la parabole est une courbe complètement située dans la région du plan où se trouve le foyer; elle est continue, et s'étend indéfiniment* à partir du point A dans le sens de AM et de AM'.

Proposition XXIV. — Théorème.

538. *Tout point intérieur à la parabole est plus rapproché du foyer que de la directrice, et tout point extérieur est plus éloigné du foyer que de la directrice.*



1° Du point intérieur B, abaissons la perpendiculaire BC sur la directrice, et joignons le foyer aux points M et B. On a :

$BF < BM + MF$, ou $BF < BM + MC$,

ou enfin $BF < BC$...

2° Du point extérieur G, abaissons la perpendiculaire GE, et joignons le foyer aux points N et G. On a :

$GF > NF - NG$, ou $GF > NE - NG$, ou enfin $GF > GE$.

Donc...

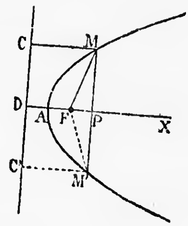
539. **Scolie.** Selon que la distance d'un point au foyer est inférieure, ou supérieure, ou égale à sa distance à la directrice, ce point est

intérieur ou extérieur à la parabole, ou appartient à cette courbe; et ainsi *la parabole est un lieu géométrique.*

Proposition XXV. — Théorème.

540. *La parabole a pour axe la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice.*

Soit M un point quelconque de la parabole; abaissons la perpendiculaire MP, et prenons PM' = PM. Prouvons que M', symétrique du point donné, appartient à la courbe. A cet effet, menons MF, MC, M'F, M'C', distances des points M et M', au foyer et à la directrice. Puisque DP est perpendiculaire à la directrice, et à MM' en son milieu P, on a : FM' = FM, M'C' = MC; donc M'F = M'C', et le point M' appartient à la parabole (n° 539).



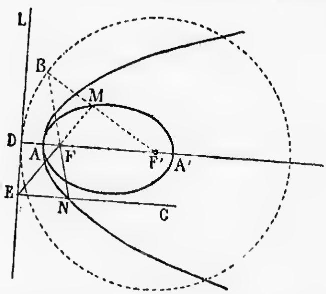
Ainsi la perpendiculaire FD est un *axe* (n° 480).

Scolie. Le point A est l'unique *sommet* de la courbe.

Proposition XXVI. — Théorème.

541. *La parabole est la limite vers laquelle tend une ellipse dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que le grand axe croît indéfiniment.*

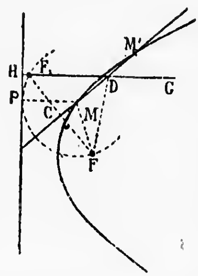
Décrivons le cercle directeur relatif au foyer F'; pour un point quelconque M de l'ellipse on a : MB = MF. Les points D, A et F étant fixes, le foyer F' s'éloigne de plus en plus lorsque le grand axe augmente; la perpendiculaire DL est la limite vers laquelle tend le cercle directeur qui lui est tangent au point D, la droite MB, normale au cercle, tend à devenir parallèle à l'axe, ou perpendiculaire à DL; on a toujours NE = NF. La figure limite est la parabole AN; A est le sommet, F le foyer, et DL la directrice. Donc...



Scolie. Cette manière de considérer la parabole permet de déduire des propriétés de l'ellipse plusieurs propriétés de la parabole, par exemple le théorème suivant (n° 542), et un théorème analogue à celui qui est énoncé au n° 503.

Proposition XXVII. — Théorème.

542. *La tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact, et la parallèle à l'axe menée par ce même point.*

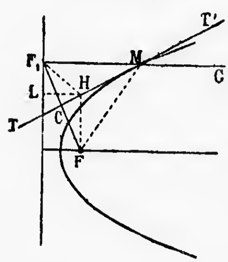


Considérons une sécante quelconque MM'; du foyer, abaissons la perpendiculaire FC, et prenons la ligne CF_1 égale à CF; par le point F_1 menons une parallèle à l'axe; cette parallèle coupe la sécante au point D; menons les lignes qui indiquent les distances des points M et D au foyer et à la directrice.

La circonférence décrite du point M, avec le rayon MF = MP, est tangente à la directrice en P, et rencontre DH au point F_1 symétrique de F; ce point F_1 est donc situé entre la directrice et le foyer; donc $DF_1 < DH$.

Les obliques DF et DF_1 sont égales; donc DF est moindre que DH. Le point D étant plus rapproché du foyer que de la directrice, est situé à l'intérieur de la courbe (n° 539); et la parallèle F_1D passe toujours entre les points d'intersection M et M'; de plus, l'angle $M'DG = MDF_1 = MDF$; et cela a lieu quelque rapprochés que soient les points M et M'; mais à la limite, quand M' se confond avec M, la sécante devient tangente. Donc...

543. **Corollaires.** 1° *La tangente en un point M de la parabole est perpendiculaire au milieu de la droite FF_1 qui joint le foyer à la projection du point de contact sur la directrice:* car le triangle FMF_1 a deux côtés égaux, et la tangente est bissectrice de l'angle au sommet (n° 56, 3°).

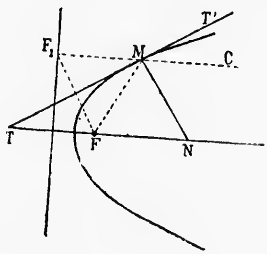


2° *Tous les points de la tangente à la parabole, sauf le point de contact, sont hors de la courbe;* car, d'après le théorème précédent, pour un point quelconque H de la tangente, on a $HF = HF_1$: donc HF est plus grand que la perpendiculaire HL, et la parabole est une courbe convexe (n° 482).

544. **Scolie.** 1° *Le foyer est à égale distance du point de contact et du point où la tangente coupe l'axe.* Car le triangle MFT a deux angles egaux : l'angle T = T'MC = FMT ; donc FM = FT.

2° *La parallèle à l'axe, menée par le point F_1 symétrique du foyer par rapport à la tangente, passe au point de contact.*

3° *La normale* MN *est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et par la parallèle à l'axe menée par ce même point;* car les angles qu'elle forme avec MF et MC ont pour

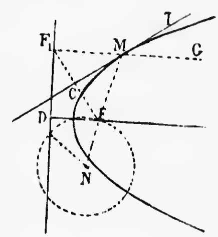


compléments les angles égaux que la tangente forme avec ces mêmes lignes.

4° La *tangente* au sommet est perpendiculaire à l'axe, et par suite parallèle à la directrice; et la *normale* est dirigée suivant l'axe.

Proposition XXVIII. — Théorème.

545. *Le lieu du point symétrique du foyer par rapport à une tangente quelconque est la directrice de la parabole.*

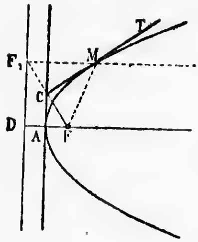


Soit F_1 le point symétrique de F par rapport à la tangente MT; la parallèle à l'axe menée par le point F_1 passe au point de contact (n° 544); et puisque la tangente est perpendiculaire au milieu de FF_1, la droite $MF_1 = MF$; donc le point F_1 symétrique du foyer est sur la directrice.

546. **Scolie.** 1° La parabole est le lieu des points également éloignés d'une droite DF_1 et d'un point F situés dans son plan. Par suite, lorsqu'une circonférence passe par le point F, elle ne rencontre pas la directrice si le centre est dans la parabole, car le centre est alors plus près du foyer que de la directrice; cette circonférence est tangente à la directrice si le centre est sur la courbe; elle coupe cette directrice en deux points si le centre est hors de la parabole, car ce centre N est plus rapproché de la directrice que du foyer.

2° On peut utiliser la directrice et le foyer pour *tracer une parabole par points.* Joignons le foyer à un point quelconque F_1 de la directrice; la perpendiculaire CT, élevée au milieu de FF_1, est tangente à la courbe; le point de contact est à l'intersection de la tangente MT et de F_1G parallèle à l'axe (n° 544, 2°).

Proposition XXIX. — Théorème.



547. *Le lieu de la projection du foyer sur les tangentes à la parabole est la tangente au sommet.*

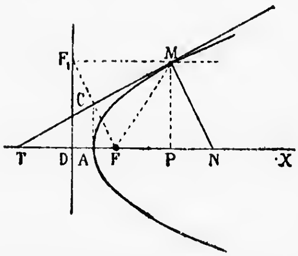
Abaissons du foyer la perpendiculaire FCF_1 sur une tangente quelconque MT; le point F_1 de la directrice est le symétrique du foyer (nº 545), donc $FC = CF_1$; mais $FA = AD$; donc la droite AC est parallèle à la directrice : c'est la tangente au sommet (nº 544, 2º).

548. Dans la parabole, on appelle *sous-tangente* la projection sur l'axe de la partie de la tangente comprise entre le point de contact et le point où la tangente coupe l'axe.

La *sous-normale* est la projection sur l'axe de la partie de la normale comprise entre le point de contact et le point où cette normale coupe l'axe.

Proposition XXX. — Théorème.

549. *La sous-tangente est divisée en deux parties égales par le sommet de la courbe; et la sous-normale est constante : elle égale le paramètre.*



1º Le triangle MFT est isocèle (nº 544). La projection du foyer sur la tangente divise MT en deux parties égales; mais la tangente au sommet est parallèle à l'ordonnée MP; donc

$$AP = AT.$$

2º Les triangles rectangles F_1DF et MPN sont égaux; car $F_1D = MP$, et les hypoténuses sont parallèles; donc $PN = FD$, et la *sous-normale* égale la distance du foyer à la directrice; c'est-à-dire le *paramètre* (nº 534).

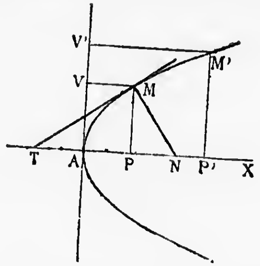
Proposition XXXI. — Théorème.

550. *Le carré de l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole est à son abscisse dans un rapport constant.*

Pour étudier la parabole, on prend pour axes des coordonnées l'axe de la courbe et la tangente au sommet : MP est *l'ordonnée* du point M; AP en est l'*abscisse.*

Le triangle rectangle NMT, formé par l'*axe*, la *tangente* et la *nor-*

male, donne la relation $\overline{MP}^2 = \overline{TP} \times \overline{PN}$; mais (n° 549) $\overline{TP} = 2\overline{AP} = 2x$.



et $PN = p$: donc $\overline{MP}^2$ ou $y^2 = 2px$; d'où $\frac{y^2}{x} = 2p$, rapport constant.

551. **Corollaires.** 1° *Les carrés des ordonnées de deux points M et M' de la parabole sont entre eux comme les abscisses de ces mêmes points.* En effet, on a $\frac{\overline{MP}^2}{AP} = 2p$, et $\frac{\overline{M'P'}^2}{AP'} = 2p$

d'où
$$\frac{\overline{MP}^2}{AP} = \frac{\overline{M'P'}^2}{AP'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2} = \frac{AP}{AP'}$$

2° Si nous abaissons les perpendiculaires MV et M'V', la relation précédente devient :
$$\frac{\overline{AV}^2}{\overline{AV'}^2} = \frac{MV}{M'V'} \quad \text{ou} \quad \frac{MV}{M'V'} = \frac{\overline{AV}^2}{\overline{AV'}^2}$$

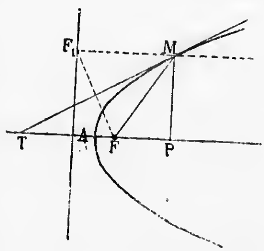
Donc *lorsqu'on projette deux points quelconques de la parabole sur la tangente au sommet, les lignes projetantes sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet.*

La relation $y^2 = 2px$ est l'*équation* de la parabole (n° 484).

Proposition XXXII — Problème.

552. *Mener une tangente à la parabole, 1° par un point pris sur la courbe ; 2° par un point extérieur.*

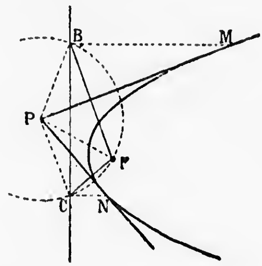
1° Soit M le point donné sur la courbe.



1er *moyen*. Projetons M sur la directrice, joignons M au foyer, menons la bissectrice de l'angle FMF_1 (n° 542), ou élevons une perpendiculaire au milieu de FF_1 (n° 543).

2e *moyen*. Prenons $FT = FM$, et menons TM (n° 544), ou, si l'on ne connaît pas le foyer, prenons $AT = AP$ (n° 549).

2° Soit P le point extérieur donné. Du point P comme centre, avec la distance PF pour rayon, décrivons une circonférence qui coupe la directrice en deux points (nº 546). La perpendiculaire élevée au milieu de BF est tangente (nº 546, 2º) et passe au point P, centre de l'arc

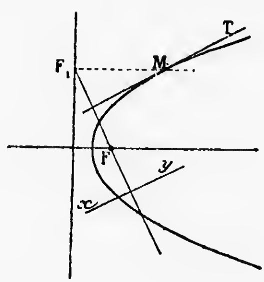


BF; la parallèle à l'axe donne le point de contact M, et il y a une deuxième tangente PN.

Proposition XXXIII. — Problème.

553. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Du foyer, abaissons une perpendiculaire sur la droite donnée xy;

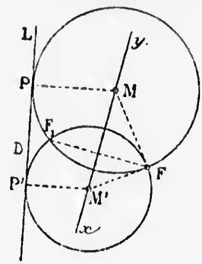


la perpendiculaire élevée au milieu de FF_1 est tangente à la parabole (nº 546, 2º), et de plus elle est parallèle à xy.

Proposition XXXIV. — Problème.

554. *Trouver l'intersection d'une droite et d'une parabole dont on connaît le foyer et la directrice, mais sans construire la courbe.*

Soient xy, DL et F, la droite, la directrice et le foyer donnés: déterminons le point symétrique F_1 du foyer F par rapport à xy. Par les points F et F_1, faisons passer une circonférence tangente à la directrice donnée. Si le point F_1 est entre le foyer et la directrice, il y a deux solutions. Les centres M et M' appartiennent à la parabole; car $MP = MF$, $M'P' = M'F$.

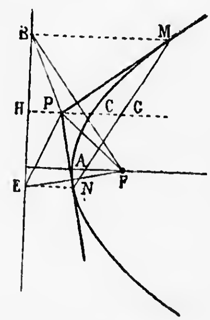


Lorsque le point symétrique du foyer est sur la directrice, la droite xy est tangente: lorsque ce point est au delà de la directrice, la droite ne rencontre pas la courbe.

En considérant le *cercle directeur* au lieu de la directrice, le même procédé permet de trouver les points où une droite donnée rencontre une ellipse ou une hyperbole déterminées par les foyers et $2a$.

Proposition XXXV. — Théorème.

555. *La parallèle à l'axe menée par le point de concours de deux tangentes à la parabole passe au milieu de la corde des contacts.*



Soient les deux tangentes PM et PN. Projetons les trois points M, P, N, sur la directrice, et prouvons que HP passe au milieu de MN, corde des contacts.

PM étant perpendiculaire au milieu de BF (n° 543), les distances PB et PF sont égales; de même PF=PE; donc PB=PE: le triangle BPE étant isocèle, la perpendiculaire PH tombe au milieu de la base, et les parallèles équidistantes EN, HP, BM, divisent la sécante MN en deux parties égales.

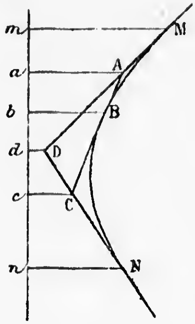
556. **Corollaire.** *Les tangentes* PM *et* PN, *considérées depuis le point de concours jusqu'aux points de contact, ont des projections égales sur la directrice;* car on a : $HE = HB$.

557. **Scolie.** La droite PG qui joint le point de concours des tangentes au milieu de la corde des contacts est parallèle à l'axe.

Proposition XXXVI. — Théorème.

558. *Une tangente quelconque divise deux tangentes données en segments inversement proportionnels.*

Considérons les deux tangentes DM et DN, et une troisième tangente AC, limitée aux deux premières; projetons sur la directrice les trois points de concours et les trois points de contact; il faut prouver qu'on a : $\frac{AD}{AM} = \frac{CN}{CD}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{ad}{am} = \frac{cn}{cd}$



Nous avons $cn = cb$; $dn = dm$ (nº 556), et nous pouvons écrire $2cn = nb$, et $2dn = mn$; retranchons membre à membre ces deux égalités, nous trouvons $2cd = mb$; d'où $cd = am$, ou moitié de bm; et puisque $dn = dm$, on a aussi : $ad = cn$.

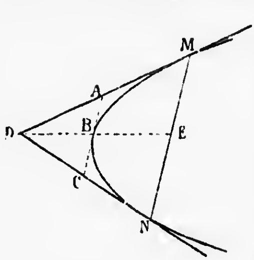
Ainsi on a la proportion : $\frac{ad}{am} = \frac{cn}{cd}$

d'où $\frac{AD}{AM} = \frac{CN}{CD}$; et puisque $bc = ai$ et que $am = ba$, on a aussi : $\frac{ad}{am} = \frac{bc}{ba}$

d'où $\frac{AD}{AM} = \frac{BC}{BA}$ Donc...

559. **Scolie.** Réciproquement, *la droite qui divise deux tangentes en segments inversement proportionnels est tangente à la parabole.*

En effet, la droite DM ne pouvant être divisée dans un rapport donné $\frac{CN}{CD}$ qu'en un seul point A lorsque le plus grand segment doit commencer au point D, il en résulte qu'une droite CA qui divise DM dans le rapport de CN à CD est tangente à la parabole; et pour trouver le point de contact, il faut diviser AC en parties AB et BC proportionnelles à CD et CN.

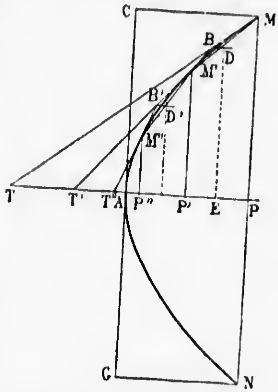


560. *La droite AC qui joint les milieux de deux tangentes est tangente à la courbe,* puisqu'on a : $\frac{CN}{CD} = \frac{AD}{AM}$; de plus, elle est parallèle à la corde des contacts, puisqu'elle divise en deux parties égales les deux côtés du triangle NDM : elle divise aussi en deux parties égales la droite DE qui joint le point de concours au milieu de la corde des contacts, et le milieu de DE est le nouveau point de contact.

Proposition XXXVII. — Théorème.

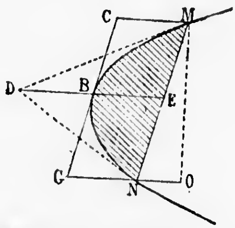
561. *L'aire du segment parabolique limité par la courbe et par une perpendiculaire à l'axe, est les $^2/_3$ du rectangle qui a pour dimensions la corde et la partie de l'axe comprise entre le sommet et la corde considérée.*

Soit le segment MAN. Aux points M, M', M'', menons des tangentes : MT et M'T' se coupent au point B : la parallèle à l'axe menée par B passe au milieu de la corde des contacts (nº 555) : par suite, la perpendiculaire DE est la demi-somme des ordonnées des points M et M'; elle égale d'ailleurs la hauteur du triangle TBT'; or le sommet divise la sous-tangente en deux parties égales (n° 549). Ainsi AT = AP, AT' = AP'; donc TT' = PP'.



L'aire du triangle égale $\frac{1}{2}$ (TT' × DE); l'aire du trapèze MPM'P' = PP' × DE; et puisque TT' = PP', l'aire du trapèze est le double de celle du triangle. De même, surface M'P'M''P'' = 2 fois T'B'T''. Si les divers points de contact se rapprochent indéfiniment, la somme des trapèzes tend vers la surface comprise entre l'axe, l'arc et l'ordonnée MP, et la somme des triangles vers la surface limitée par MT, l'axe et la courbe: donc la surface parabolique MAP = 2 fois MAT, ou les $^2/_3$ de la somme MTP: et puisque AT = AP, la surface du triangle PMT égale la surface du rectangle ACMP. On a le même résultat pour la partie inférieure du segment, donc *l'aire du segment parabolique* égale $^2/_3$ $\overline{MN} \times \overline{AP}$.

562. **Scolie.** Pour deux tangentes quelconques, E étant le milieu de la corde des contacts, B est le milieu de DE, et la tangente BC est parallèle à ME (n° 560). Un raisonnement analogue au précédent



prouve que l'espace parabolique MBE est les $^2/_3$ du triangle MDE: donc *le segment* MBN est les $^2/_3$ du parallélogramme MCGN. L'aire du segment égale donc $^2/_3$ BE × MO.

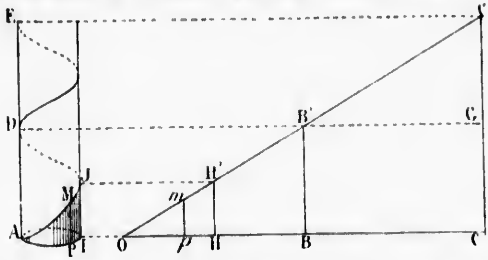
§ IV. — HÉLICE

Définitions.

563. L'*hélice* est la courbe que décrit sur un cylindre droit l'un des côtés d'un angle que l'on enroule sur ce cylindre, l'autre côté s'appliquant sur la circonférence de la base.

On appelle *spire* la partie de l'hélice qui correspond à un tour complet.

Soit R le rayon du cylindre; prenons $OB = BC = 2\pi r$. Si l'angle



COC' est enroulé sur le cylindre à partir du point A et vers la droite de l'observateur, le point B' viendra en D, et C' en E. Nous avons GC' = GC; donc DE = DA; cette distance est appelée *pas* de l'hélice.

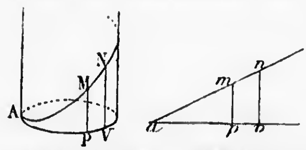
La distance MP mesurée sur la génératrice est l'*ordonnée* du point M de l'hélice.

On nomme *projection* de l'arc AM ou *abscisse curviligne* du point M l'arc AP qui correspond à la partie de l'hélice que l'on considère.

564. *L'ordonnée et l'abscisse curviligne d'un point quelconque de l'hélice sont entre elles dans un rapport constant.* Car (fig. suiv.)
$\frac{MP}{\text{arc } AP} = \frac{mp}{ap} = \frac{nv}{av} = \frac{NV}{\text{arc } AV} =$ *Tangente* trigonométrique de l'angle enroulé (nº 210).

Proposition XXXVIII. — Théorème.

565. *La sous-tangente égale l'abscisse curviligne du point considéré.*



(Tracez au crayon les droites NMO et VPO.)

La *sous-tangente* est la projection sur le plan de la base du cylindre, de la partie de la tangente comprise entre le point de contact et celui où elle rencontre le plan de la base.

Prenons deux points M et N peu éloignés l'un de l'autre: faisons passer un plan par les génératrices correspondantes.

La sécante NMO a pour projection VPO, trace du plan des génératrices sur celui de la base, et nous avons :

$$\frac{OV}{OP} = \frac{VN}{PM}; \quad \text{mais} \quad \frac{VN}{PM} = \frac{vn}{pm} = \frac{av}{ap}$$

donc $\frac{OV}{OP} = \frac{av}{ap}$; d'où $\frac{OV - OP}{av - ap} = \frac{OP}{ap}$ ou $\frac{PV}{pv} = \frac{OP}{ap}$

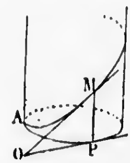
mais $pv =$ l'arc PV, $ap =$ l'arc AP; donc $\frac{PV}{\text{arc } PV} = \frac{OP}{\text{arc } AP}$

Or quand M et N se rapprochent indéfiniment, la corde PV tend à devenir égale à l'arc PV; la limite du rapport $\frac{PV}{\text{arc PV}}$ est donc l'unité; et il en est de même du rapport $\frac{OP}{\text{arc AP}}$; *donc lorsque la droite* NMO *est tangente au point* M, *la sous-tangente* OP *égale l'arc* AP.

Proposition XXXIX. — Problème.

566. *Par un point de l'hélice mener une tangente à la courbe.*

Soit M le point donné, et P sa projection : sur la tangente à la circonférence, prenons PO = arc AP, et joignons M au point O. Cette droite OM est la tangente.



Proposition XL. — Théorème.

567. *Les tangentes à l'hélice rencontrent le plan de la base sous un angle constant* (fig. ci-dessus).

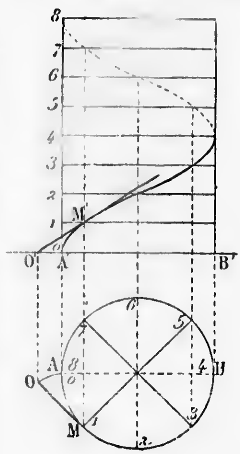
On a toujours : *Tangente* de l'angle $O = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{\text{arc AP}}$; or ce rapport est constant (n° 564). Donc...

Scolie. Les tangentes rencontrent les génératrices sous un angle constant, et cet angle est le complément de celui que forme une tangente quelconque avec le plan de la base.

Proposition XLI. — Problème.

568. *Tracer la projection d'une hélice sur un plan parallèle à l'axe du cylindre, et mener la projection de la tangente en un point donné de cette courbe.*

1° Divisons la circonférence de base et le *pas* de l'hélice en un certain nombre de parties égales; par les points de division pris sur la génératrice, menons des perpendiculaires à l'axe, et par les points de la circonférence, des parallèles à ce même axe; les intersections des lignes de même cote donnent les points de l'hélice, il suffit de les joindre par un trait continu.

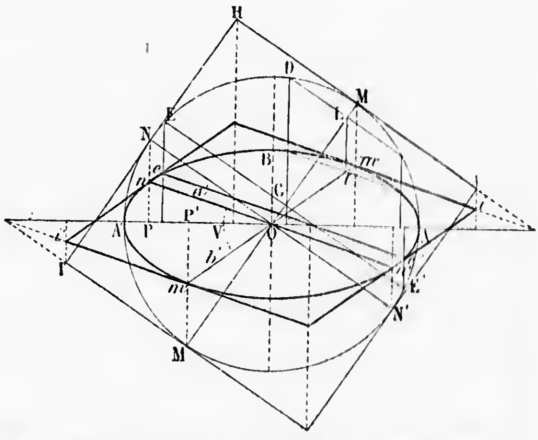


2° Soit M′ le point donné ; menons la tangente au point M de la projection horizontale ; prenons MO = arc MA : le point O ainsi déterminé est la *trace horizontale* de la tangente à l'hélice, c'est-à-dire le point où cette tangente rencontre le plan de la base. Ce point O se projette donc verticalement en O′ sur A′B′ ; la droite qui joint O′ à M′ est la projection verticale de la tangente à l'hélice, et elle est tangente à la projection verticale de cette hélice.

EXERCICES SUR LE LIVRE VIII

Sur l'ellipse.

1. Trouver l'aire de l'ellipse en la considérant comme la projection d'un cercle sur un plan.



2. Les diamètres * de l'ellipse sont des droites qui passent au centre.
3. Deux diamètres rectangulaires du cercle ont pour projections deux diamètres conjugués de l'ellipse.
4. Les parallèles menées à un diamètre par les extrémités de son conjugué sont tangentes à l'ellipse ; et réciproquement, la corde des contacts de deux tangentes parallèles à un diamètre donné est le conjugué de ce diamètre.
5. Les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, et dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués, sont équivalents au rectangle construit sur les axes.

* On appelle *diamètre* une droite qui divise en 2 parties égales, une série de cordes parallèles. Deux diamètres sont dits *conjugués* lorsque chacun d'eux divise en 2 parties égales les cordes parallèles à l'autre.

6. En désignant par a' et b' deux demi-diamètres conjugués, et par V l'angle qu'ils forment, on a la relation : $4a'b'$. sinus $V = 4ab$.

7. La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur un axe quelconque égale le carré de cet axe :

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 = a^2, \text{ et } \overline{Pn}^2 + \overline{P'm'}^2 = b^2$$

8. La somme des carrés de deux diamètres conjugués égale la somme des carrés des axes : $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$.

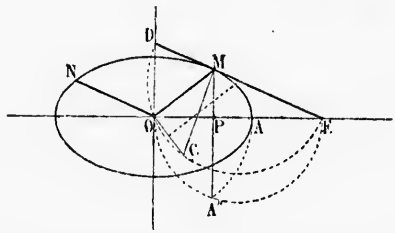
9. Calculer les longueurs a et b des demi-axes, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle.

10. L'ellipse a deux diamètres conjugués égaux ; ils correspondent aux diagonales du rectangle construit sur les axes.

11. Pour une tangente quelconque à l'ellipse, le produit de l'abscisse du point de contact par l'abscisse du point où cette tangente coupe le grand axe égale le carré du demi-grand axe.

12. Les axes d'une ellipse interceptent sur une tangente quelconque des segments dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué au diamètre du point de contact.

13. Pour déterminer les axes d'une ellipse connaissant deux demi-diamètres conjugués OM et ON et leur angle MON, il faut mener par M une parallèle à NO,



élever la perpendiculaire MC = NO, faire passer une circonférence par CO et qui ait son centre sur DE. Les points D et E font connaître la direction des axes (exercice 12) ; puis on décrit une demi-circonférence sur le diamètre OE ; la perpendiculaire MPA'' donne $OA'' = a$ (exercice 11).

14. Sans recourir au procédé général, déterminer les axes lorsqu'on connaît les deux diamètres conjugués égaux, et leur angle.

15. En considérant l'ellipse comme la projection du cercle principal, et sans construire la courbe, mener une tangente : 1° par un point donné sur la courbe ; 2° par un point donné hors de la courbe ; 3° parallèlement à une ligne donnée ; et mener une normale : 1° par un point donné sur la courbe ; 2° parallèlement à une ligne donnée.

16. La droite qui joint le point de concours de deux tangentes au milieu de la corde des contacts passe au centre.

17. On peut construire une ellipse par points lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués et leur angle.

18. La projection d'une ellipse sur un plan quelconque est une ellipse.

19. Le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est constant.

20. Construire une ellipse avec les données suivantes :

1° Le centre, la longueur du grand axe et deux tangentes ;

2° Le grand axe (position et longueur) et une tangente ;

3° Un des foyers, une tangente, la direction du grand axe et la longueur $2a$;

4° Les deux foyers et le rapport des axes $\frac{b}{a}$;

5° Un foyer, une tangente, le point de contact, et la longueur $2a$ ou la longueur $2c$;

6° Un foyer et trois tangentes;

7° Un foyer, deux tangentes, et l'un des points de contact :

8° Deux tangentes, les points de contact, et la droite sur laquelle doit se trouver le grand axe.

Sur l'hyperbole.

21. Deux hyperboles sont dites conjuguées lorsqu'elles ont les mêmes asymptotes et les mêmes axes; mais l'*axe transverse* de l'une d'elles est l'*axe non transverse* de l'autre, et réciproquement.

22. Dans l'hyperbole équilatère, tous les diamètres conjugués sont égaux; les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués ont leurs sommets sur les asymptotes.

23. Le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est constant.

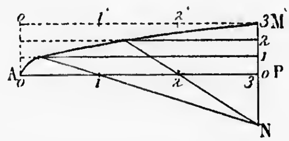
24. Construire une hyperbole avec les données des sept premiers cas de l'exercice 20 sur l'ellipse.

Sur la parabole.

25. Les tangentes menées à la parabole par un point extérieur font des angles égaux avec la ligne qui joint ce point au foyer, et avec la parallèle à l'axe menée par ce même point extérieur; et la droite qui joint ce point au foyer est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact.

26. Les tangentes menées d'un même point de la directrice sont perpendiculaires l'une à l'autre, la corde des contacts passe au foyer, et la droite qui joint le foyer au point de concours des tangentes est perpendiculaire à la corde des contacts.

27. Pour tracer le balancier des machines à vapeur, connaissant la demi-longueur AP et la demi-largeur PM = PN, on divise MP et AP en un même nombre de parties égales; on joint N à chaque point de division. Prouver qu'on obtient un arc de parabole.



On emploie aussi le tracé suivant : le sommet A est joint aux points 1', 2', etc.... les points où ces lignes coupent les parallèles de même cote appartiennent à une parabole (n° 550).

28. Construire une parabole avec les données suivantes :

1° Le foyer et deux tangentes;

2° Le foyer, la direction de l'axe et une tangente;

3° La directrice, une tangente et le point de contact;

4° La directrice et deux tangentes, ou la tangente au sommet et deux autres tangentes;

5° Le foyer ou la directrice, et deux points;

6° La direction de l'axe, une tangente et le point de contact;
7° Deux points, et la direction de l'axe;
8° Deux tangentes et les points de contact.

Lieux géométriques.

29. De tous les points d'une circonférence on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque située dans le plan du cercle; quel est le lieu du point milieu de ces perpendiculaires?

30. Lieu du centre des ellipses tangentes à deux droites en des points donnés, et lieu du foyer F des ellipses tangentes à deux droites, et dont l'autre foyer F' est fixe.

31. Lieu des points également distants de deux circonférences, ou d'une circonférence et d'une droite.

32. Lieu du centre des cercles qui passent par un point fixe, et qui sont tangents à une droite donnée ou à une circonférence donnée.

33. Par les points où une tangente mobile coupe deux droites fixes, tangentes à une parabole, on mène des parallèles aux tangentes fixes; quel est le lieu du point de concours de ces parallèles.

34. Lieu du foyer des paraboles qui ont une *directrice donnée*, et passent par un point donné, ou sont tangentes à une droite donnée; lieu des sommets des mêmes paraboles.

35. Lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances à une droite et à un point donnés est constante.

Sur l'hélice.

36. Exprimer la longueur d'un arc d'hélice, en fonction de sa projection horizontale et de l'une des quantités suivantes : la différence des ordonnées de ses extrémités, le pas de l'hélice, l'angle constant que forment les tangentes avec les génératrices.

37. Calculer l'aire de la surface cylindrique comprise : 1° entre un arc d'hélice, les ordonnées extrêmes et la projection horizontale de l'hélice; 2° entre deux arcs d'hélice de même pas et les génératrices qui limitent ces arcs; 3° entre deux arcs d'hélice de même pas et les axes de deux nouvelles hélices normales aux premières.

APPENDICE

SECTIONS CONIQUES, MÉTHODES DIVERSES POUR ÉVALUER LES SURFACES ET LES VOLUMES APPLICATIONS

---

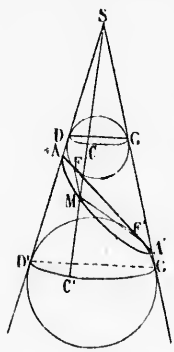
§ I. — SECTIONS CONIQUES

CORPS DE RÉVOLUTION QU'ELLES FORMENT

Définitions.

569. La *surface conique de révolution* est la surface engendrée par la rotation complète d'une droite illimitée autour d'un axe qu'elle rencontre en un point fixe et sous un angle constant.

La sphère dont le centre est sur l'axe, et qui est tangente à une génératrice, est tangente au cône suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe. Les parties de génératrices comprises entre deux sphères tangentes sont égales.



Proposition I. — Théorème.

570. *La section d'un cône par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe est une ellipse.*

Considérons deux sphères tangentes au cône et au plan sécant qu'on peut toujours prendre perpendiculaire au méridien principal; soient AA′ l'intersection du méridien considéré et du plan sécant, AMA′ la demi-section, DCG et D′C′G′ les demi-circonférences de contact.

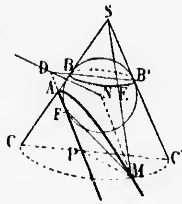
Joignons un point quelconque M de la courbe aux points de contact F et F′, et menons la génératrice du point M. Les droites MC et MF sont égales comme tangentes menées d'un même point à la même sphère; de même $MF' = MC'$; donc $MF + MF' = CC' = DD'$, quantité constante. Donc *la section est une ellipse.*

Proposition II. — Théorème.

571. *La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à une génératrice est une parabole.*

Soit AP la trace ou rencontre du méridien principal avec le plan sécant parallèle à la génératrice SC′.

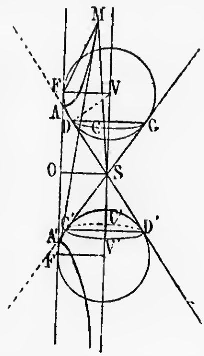
Inscrivons une shpère tangente au plan sécant et au cône. Le plan du cercle de contact BEB' est perpendiculaire à l'axe, et rencontre le plan sécant AM suivant une droite DN perpendiculaire au plan du méridien principal.



Par un point quelconque M de la courbe, menons un plan MCC' perpendiculaire à l'axe, et la droite MN parallèle à DP.

Les droites MF et ME sont égales comme tangentes menées d'un même point à une sphère; or ME = C'B' = DP, sa parallèle; mais DP égale MN; par suite MF = MN; donc *la courbe est une parabole, car ses points sont également éloignés de la droite* DN *et du point* F *situés dans son plan.*

Proposition III. — Théorème.



572. *La section d'un cône de révolution par un plan qui coupe les deux nappes est une hyperbole.*

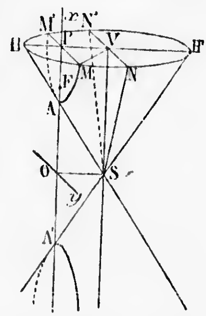
Faisons des constructions analogues à celles qui ont été faites pour l'ellipse (nº 570). Les lignes MC' et MF' sont égales comme tangentes menées d'un même point à une sphère; de même MC = MF; or MC' — MC = CSC' = DSD', quantité constante. Donc *la section est une hyperbole.*

573. **Scolie.** La démonstration ci-dessus s'applique à tous les cas où le plan rencontre les deux nappes.

Considérons spécialement le cas où le plan sécant est parallèle à l'axe du cône.

Les deux sphères sont égales, le triangle ASA' est isocèle, et la perpendiculaire SO, abaissée du sommet du cône sur le plan, divise AA' et FF' en deux parties égales; donc AO = a, FO = c.

Joignons le centre V au point de contact D; les triangles rectangles AOS et SDV sont égaux, car l'angle aigu A = S, et SO = FV = DV; donc AS = SV = OF; ainsi AS égale la demi-distance focale, égale c; et puisqu'on a $\overline{OS}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AO}^2 = c^2 - a^2$, la perpendiculaire OS = b; donc *la distance de l'axe du cône au plan sécant est la valeur du demi-axe non transverse de l'hyperbole déterminée par ce plan sécant.*



Proposition IV. — Théorème.

574. L'hyperbole a pour équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

Prenons pour axe des x l'axe transverse AA', et pour axe des y une perpendiculaire menée à AA' au point O, dans le plan sécant. Par l'axe du cône menons le plan NSN' parallèle au plan sécant; par un point M quelconque de la courbe, menons, perpendiculairement à l'axe, le plan HMH', qui coupe le cône de révolution suivant un cercle HMH'.

On a $VN = VM = VH$, etc.; PM est l'ordonnée, et PO l'abscisse du point M; et la distance $PV = OS = b$ (nº 573).

Dans le cercle, MP ou y et NV sont perpendiculaires au diamètre; et le triangle MPV, rectangle en P, donne la relation

$$\overline{MP}^2 = \overline{MV}^2 - \overline{PV}^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = \overline{HV}^2 - b^2$$

Les triangles semblables HSV et ASO donnent les rapports égaux

$$\frac{\overline{HV}^2}{\overline{OS}^2 \text{ ou } b^2} = \frac{\overline{SV}^2 \text{ ou } x^2}{\overline{AO}^2 \text{ ou } a^2} \quad \text{d'où} \quad \overline{HV}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

donc $$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 \quad \text{ou} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

En divisant tous les termes par $-a^2b^2$, on écrit aussi : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

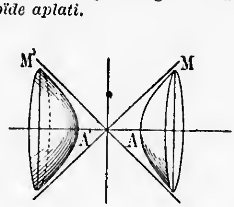
575. L'*hyperbole équilatère* a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 - y^2 = a^2$.

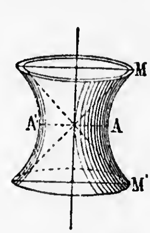
L'*hyperbole équilatère* est aux *hyperboles* qui ont même axe transverse, ce que le *cercle principal* est aux ellipses qui ont le diamètre pour grand axe.

Définitions.

576. On appelle *ellipsoïde* le volume engendré par la révolution complète d'une demi-ellipse autour de l'axe qui la limite.

Une ellipse donnée peut engendrer deux corps différents : l'*ellipsoïde allongé* et l'*ellipsoïde aplati*.





L'*ellipsoïde allongé* est formé par la rotation d'une demi-ellipse autour du grand axe.

L'*ellipsoïde aplati* est formé par la rotation d'une demi-ellipse autour du petit axe.

577. On appelle *hyperboloïde* le corps engendré par la révolution complète d'une demi-hyperbole autour de l'un de ses axes.

L'*hyperboloïde à une nappe* est formé par la rotation d'une branche MAM' autour de l'axe non transverse.

L'*hyperboloïde à deux nappes* est engendré par la rotation des demi-branches AM et A'M' autour de l'axe transverse; il est composé de deux parties séparées.

Le *cône asymptote* est le solide formé par la révolution complète d'une asymptote autour de l'axe de l'hyperboloïde.

L'*hyperboloïde à une nappe* enveloppe son cône asymptote, tandis que le cône enveloppe l'*hyperboloïde à deux nappes*.

578. Le *paraboloïde de révolution* est le corps engendré par la révolution complète d'une demi-parabole autour de l'axe de la courbe.

Les hyperboloïdes et le paraboloïde s'étendent indéfiniment dans le sens de l'axe de rotation ; nous considérerons les segments déterminés par des plans perpendiculaires à l'axe.

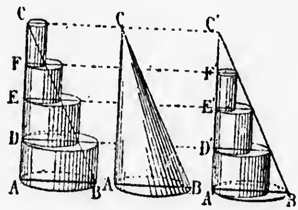
§. II. — MÉTHODES DIVERSES

POUR ÉVALUER LES SURFACES ET LES VOLUMES

Proposition V. — Théorème.

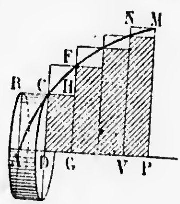
579. *Le volume d'un corps coupé par des plans équidistants est la limite vers laquelle tend la somme des prismes ou cylindres droits à base quelconque construits sur les diverses sections.*

Soit un corps quelconque ABC, divisé par des plans équidistants ; construisons des prismes ou cylindres ayant pour *bases inférieures* les diverses sections A, D, E, F. Le volume total des cylindres est plus grand que celui du corps CAB. — Construisons des cylindres ayant pour *bases supérieures* les diverses sections. La somme des cylindres intérieurs est moindre que le volume cherché.



Mais le cylindre qui a pour hauteur A'D' égale le cylindre DE ; cylindre DE = EF, et cylindre E'F' = FG ; et la différence des deux sommes égale le cylindre AD. Or cette grandeur peut devenir moindre que toute quantité donnée, il suffit pour cela que l'axe soit divisé en un nombre de plus en plus grand de parties égales ; les deux sommes tendent donc vers la même limite ; aussi se borne-t-on à considérer une seule série de cylindres, soit les *intérieurs*, soit les *extérieurs*.

580. **Scolie.** On prouve d'une manière analogue que la surface plane AMP peut être regardée comme la limite vers laquelle tend la somme des rectangles *extérieurs* tels que ABCD, aussi bien que la somme des rectangles *intérieurs*, tels que DCHG. La différence des deux sommes égale VNMP, quantité qui tend vers zéro quand on divise AP en un nombre indéfiniment croissant de parties égales.



Lorsque la surface AFMP tourne autour de l'axe AP, elle engendre un corps de révolution ; chaque rectangle, ABCD par exemple, engendre un cylindre ayant AD pour hauteur et AB pour rayon de base ; le corps de révolution est la limite vers laquelle tend la somme des cylindres formés par les rectangles extérieurs, aussi bien que la somme des cylindres engendrés par les rectangles intérieurs.

581. Les considérations précédentes sont confirmées par les résultats algébriques suivants (voir l'algèbre par F. P. B.) :

Quand n croît indéfiniment,

la fraction $\dfrac{1+2+3 \ldots + (n-1) + n}{n^2}$ ou $\dfrac{S_n}{n^2}$ a pour limite $^1/_2$,

et $\dfrac{1+2+3 \ldots + (n-1)}{n^2}$ a aussi pour limite $^1/_2$.

La fraction $\dfrac{1+4+9...+(n-1)^2+n^2}{n^3}$ ou $\dfrac{S_{n^2}}{n^3}$ a pour limite $1/_3$

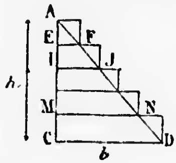
et $\dfrac{1+4+9...+(n-1)^2}{n^3}$ a aussi pour limite $1/_3$.

S_n est la somme des n premiers nombres consécutifs, et S_{n^2} la somme des carrés des n premiers nombres. Ainsi, la somme des carrés des $(n-1)$ premiers nombres, étant divisée par n^3, a même limite, $1/_3$, que la somme des carrés des n premiers nombres, divisée par n^3.

Généralement, la considération des cylindres ou des rectangles intérieurs (nos 579 et 580) donne un terme de moins à la *sommation* que la somme des cylindres ou des rectangles extérieurs; mais la limite ne change point.

Voici des exemples de la *méthode de sommation* appliquée à des surfaces ou à des corps connus.

582. *Aire du triangle* ACD.



Divisons la hauteur en n parties égales; par les points de division, menons des parallèles à la base, et formons les rectangles extérieurs.

Chacun d'eux a pour hauteur $\frac{h}{n}$; le 1er a pour base EF; or $\frac{EF}{CD \text{ ou } b}=\frac{AE}{AC}$; de même $\frac{IJ}{b}=\frac{AI}{AC}$. Mais AE est la n^{ieme} partie de h, AI égale 2 fois la n^{ieme} partie de h, etc.; ainsi $\frac{AE}{h}=\frac{1}{n}$, $\frac{AI}{h}=\frac{2}{n}$, etc. Donc $\frac{EF}{b}=\frac{1}{n}$, d'où $EF=\frac{b}{n}$; de même $\frac{IJ}{b}=\frac{2}{n}$, d'où $IJ=\frac{2b}{n}$; et généralement, la base MN de rang $(n-1)$ égale $\frac{(n-1)b}{n}$; enfin CD peut s'écrire $\frac{nb}{n}$.

Le 1er rectangle $= EF \times AE = \frac{b}{n}\cdot\frac{h}{n} = bh\cdot\frac{1}{n^2}$

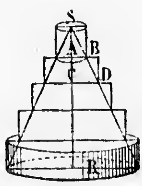
Le 2e $= IJ \times EI = \frac{2b}{n}\cdot\frac{h}{n} = bh\cdot\frac{2}{n^2}$, etc.

L'avant-dernier $= MN \times \frac{h}{n} = \frac{(n-1)b}{n}\cdot\frac{h}{n} = bh\cdot\frac{n-1}{n^2}$

Et le dernier $= CD \times CM = \frac{nb}{n}\cdot\frac{h}{n} = bh\cdot\frac{n}{n^2}$

La somme de ces rectangles égale, en mettant bh en facteur commun :

$$bh\cdot\frac{1+2+...+(n-1)+n}{n^2} = bh\cdot\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{bh}{2} \quad (\text{n}^\text{o}\ 581)$$



583. *Volume du cône.*

Divisons h en n parties égales, et cherchons la limite de la somme des cylindres formés sur les diverses sections. Le 1er rayon $AB=\frac{R}{n}$, le 2e $CD=\frac{2R}{n}$, et ainsi de suite.

Le 1er cylindre a pour volume $\pi AB^2 \times SA$ ou $\pi\frac{R^2}{n^2}\cdot\frac{h}{n} = \pi R^2 h\cdot\frac{1}{n^3}$

Le 2ᵉ a pour volume $\pi \overline{CD}^2 \times \overline{AC}$ ou $\pi \frac{4R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} = \pi R^2 h \cdot \frac{4}{n^3}$

Le 3ᵉ a pour volume $\pi \frac{9R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} = \pi R^2 h \cdot \frac{9}{n^3}$

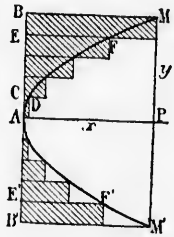
Le dernier a pour rayon $\frac{nR}{n}$, et pour volume $\pi \frac{n^2R^2}{n^2} \cdot \frac{h}{n} = \pi R^2 h \cdot \frac{n^2}{n^3}$

Le volume total égale, en mettant $\pi R^2 h$ en facteur commun :

$$\pi R^2 h \cdot \frac{1+4+9+\ldots n^2}{n^3} \quad \text{ou} \quad \pi R^2 h \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

584. *Remarque.* Il suffit de développer un seul terme, *autre que le premier*, pour reconnaître la forme du développement; on développe, par exemple, le terme de rang $(n-1)$.

585. *Aire parabolique* AMP.



Par les points A et M menons des parallèles à MP et à AP, et proposons-nous d'évaluer l'aire ABM. Divisons AB en n parties égales, construisons des rectangles sur les diverses abcisses, CD..., EF, BM, et calculons EF, abcisse de rang $(n-1)$.

La ligne AE égale $(n-1)$ des n divisions égales de AB. On a donc $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$; mais les droites EF et BM ou x, qui projettent les points F et M sur la tangente au sommet, sont dans le même rapport que $\overline{AE}^2$ et $\overline{AB}^2$ (nº 551); donc :

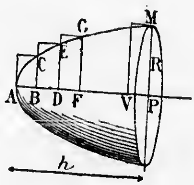
$$\frac{EF}{x} = \frac{(n-1)^2}{n^2}; \quad \text{d'où } EF = x\frac{(n-1)^2}{n^2}$$

Le rectangle construit sur la base EF a pour hauteur $\frac{y}{n}$; sa surface égale donc $\frac{x(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{y}{n} = xy\frac{(n-1)^2}{n^3}$. La somme des rectangles égale xy multiplié par une somme de termes analogues à $\frac{(n-1)^2}{n^3}$; ainsi la surface totale $= xy \cdot \frac{S_n{}^2}{n^3}\, xy \cdot {}^1/_3$ (nº 581). La surface AMB est donc le tiers du rectangle ABMP; donc la surface AMP égale les $^2/_3$ de ABMP ou $^2/_3\, xy$ (nº 561).

En considérant les rectangles formés dans AB'M', on arrive au même résultat; car $\frac{1+4+9\ldots(n-1)^2}{n^3}$ a aussi pour limite $^1/_3$ (nº 581).

Proposition VI. — Théorème.

586. *Le volume du segment à une base du paraboloïde de révolution est la moitié du cylindre de même base et de même hauteur.*



Soient $MP = R$ et $AP = h$; divisons h en n parties égales, et cherchons la somme des volumes des cylindres extérieurs qui ont pour rayon de base les diverses ordonnées (nº 580).

$AB = \frac{h}{n}$, $AD = \frac{2h}{n}$, etc. CB est le rayon du 1ᵉʳ cylindre. Or (nº 551) $\frac{\overline{CB}^2}{R^2} = \frac{AB}{AP} = \frac{1}{n}$, puisque

AB est la $n^{\text{ième}}$ partie de AP ; donc $\overline{CB}^2 = R^2 . \frac{1}{n}$; de même $\frac{AD}{AP} = \frac{2}{n}$; et puisque $\frac{\overline{ED}^2}{R^2} = \frac{AD}{AP} = \frac{2}{n}$, on a : $\overline{ED}^2 = R^2 . \frac{2}{n}$; $\frac{\overline{FG}^2}{R^2} = \frac{AF}{AP} = \frac{3}{n}$, d'où $\overline{FG}^2 = R^2 . \frac{3}{n}$, etc. ; enfin $R^2 = R^2 . \frac{n}{n}$

Le 1er cylindre a pour volume $\pi . \overline{CB}^2 \times AB = \pi R^2 . \frac{1}{n} . \frac{h}{n} = \pi R^2 h . \frac{1}{n^2}$

Le 2e a pour volume $\pi\ \overline{DE}^2 \times BD = \pi R^2 . \frac{2}{n} . \frac{h}{n} = \pi R^2 h . \frac{2}{n^2}$

Et ainsi des autres.

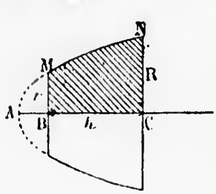
Et le dernier $\pi R^2 \times VP = \pi R^2 . \frac{n}{n} . \frac{h}{n} = \pi R^2 h . \frac{n}{n^2}$

La somme des cylindres égale $\pi R^2 h . \frac{1 + 2 + 3 ... + n}{n^2}$; mais $\frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}$ (n° 581)

donc le volume du paraboloïde engendré par $AMP = \frac{\pi R^2 h}{2}$

Proposition VII. — Théorème.

587. *Le segment parabolique à deux bases est équivalent au cylindre qui a même hauteur, et dont la base est la moyenne arithmétique des bases du tronc parabolique.*



Le volume total formé par la révolution complète de $AMNC = \frac{\pi R^2 \times AC}{2}$; le volume formé par $AMB = \frac{\pi r^2 \times AB}{2}$

Le volume formé par la rotation de BMNC $= \frac{\pi}{2}(R^2 . \overline{AC} - r^2 . \overline{AB})$; mais (n° 551) $\frac{R^2}{r^2} = \frac{AC}{AB}$

donc $\frac{R^2 - r^2}{R^2} = \frac{AC - AB}{AC} = \frac{h}{AC}$, et $AC = \frac{hR^2}{R^2 - r^2}$

De même $AB = \frac{hr^2}{R^2 - r^2}$

Dans l'expression du volume, remplaçons AB et AC par les valeurs trouvées :

$$\text{Volume} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{R^2 . R^2 h}{R^2 - r^2} - \frac{r^2 . r^2 h}{R^2 - r^2}\right] = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}\right)$$

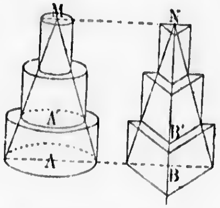
Mais $R^4 - r^4 = (R^2 + r^2)(R^2 - r^2)$

Donc $V = \frac{\pi h}{2}\left[\frac{(R^2 + r^2)(R^2 - r^2)}{R^2 - r^2}\right]$ ou $V = \frac{\pi h}{2}(R^2 + r^2)$

Proposition VIII. — Théorème.

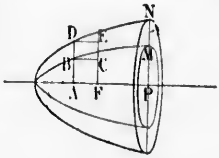
588. *Lorsque deux corps sont tels que les sections correspondantes sont dans un rapport constant, les volumes sont dans le même rapport.*

Soient deux corps quelconques M et N. Si l'on a $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{m^2}{n^2}$, rapport constant, les volumes des corps cylindriques ou prismatiques construits sur les diverses sections ayant des hauteurs égales, sont entre eux comme leurs bases;



il en est de même pour leurs sommes respectives, et par suite pour les limites vers lesquelles tendent ces sommes; donc $\frac{M}{N} = \frac{m^2}{n^2}$

589. **Corollaire**. Lorsque deux courbes planes BM et DN sont telles que les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant, les volumes des corps de révolution formés par les surfaces planes ABMP et ADNP sont entre eux comme les carrés des quantités qui expriment le rapport constant.

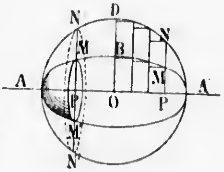


En effet, si l'on a $\frac{AB}{AD} = \frac{MP}{NP} = \frac{m}{n}$, rapport constant, les cylindres engendrés par deux rectangles ABCF et ADEF de même hauteur AF, seront dans le rapport des carrés des rayons, soit $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{m^2}{n^2}$. Les sections correspondantes étant dans le rapport $\frac{m^2}{n^2}$, il en est de même pour les volumes.

Proposition IX. — Théorème.

590. *Le volume de l'ellipsoïde allongé* $= {}^4/_3\,\pi a b^2$.

Soit l'ellipsoïde AA' formé par la rotation de ABA'. Le cercle principal ADA', en tournant autour du même axe AA', engendre la sphère ${}^4/_3\,\pi a^3$.



Pour un point quelconque M de l'ellipse et pour le point N du cercle, on a : $\frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}$ (n° 505); donc les sections correspondantes, et par suite les volumes engendrés sont dans le rapport $\frac{b^2}{a^2}$ (n° 589);

donc
$$\frac{\text{ellipsoïde}}{\text{sphère}} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{ellipsoïde} = \text{sphère} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{}{a^2} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

591. **Corollaire.** Un segment quelconque d'ellipsoïde est au segment sphérique correspondant dans le rapport $\frac{b^2}{a^2}$; ainsi le segment sphérique $NAN' = \frac{\pi\overline{NP}^2 \times AP}{2} + \frac{\pi\overline{AP}^3}{6}$; donc le segment $MAM' = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi\overline{NP}^2\times AP}{2} + \frac{\pi\overline{AP}^3}{6}\right)$

En désignant AP par h et PM par R, comme R^2 ou $MP^2 = \frac{b^2 \times \overline{NP}^2}{a^2}$, on a :

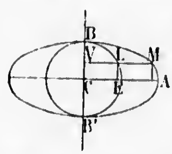
$$\text{segment de l'ellipsoïde} = \frac{\pi R^2 h}{2} + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\pi h^3}{6}$$

Ainsi le segment de l'ellipsoïde est équivalent à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur plus l'ellipsoïde allongé qui aurait la hauteur du segment pour grand axe.

L'ellipsoïde $\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\pi h^3}{6}$ est semblable au proposé.

Proposition X. — Théorème.

592. *Le volume de l'ellipsoïde aplati* $= \frac{4}{3}\pi a^2 b$.



Dans la rotation autour de BB', le demi-cercle engendre la sphère $\frac{4}{3}\pi b^3$, et BAB' l'ellipsoïde aplati.

On a $\frac{MV}{LV} = \frac{a}{b}$ (nº 506, 2º); donc :

$$\frac{\text{ellipsoïde}}{\text{sphère}} = \frac{a^2}{b^2} \quad (\text{nº } 589);$$

d'où ellipsoïde aplati $= \frac{4}{3}\pi b^3 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Scolie. Les formules données pour les deux ellipsoïdes peuvent être réunies dans l'énoncé suivant :

Le volume formé par la révolution d'une demi-ellipse autour de l'axe qui la limite, s'obtient en multipliant les $\frac{4}{3}$ *de* π *par la moitié de l'axe autour duquel s'effectue la rotation, et par le carré de la moitié de l'autre axe.*

Proposition XI. — Théorème.

593. *Le segment à deux bases de l'hyperboloïde à une nappe est équivalent à un cylindre de même hauteur, et dont la base égale les* $\frac{2}{3}$ *de la section menée par le centre du corps de révolution, plus le* $\frac{1}{3}$ *de la seconde base du segment considéré. (Même résultat pour le segment d'ellipsoïde.)*

1º Cherchons le volume engendré par l'hyperbole équilatère AM, dans sa rotation autour de l'axe non transverse.

Soient $AO = a = R$; $OP = h$, $PM = R'$. L'hyperbole équilatère a pour équation (nº 575) $\quad x^2 - y^2 = a^2$; d'où $x^2 = a^2 + y^2$ (1)

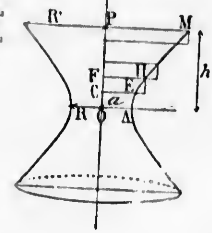
Divisons h en n parties égales, et cherchons la somme des cylindres qui ont $\frac{h}{n}$ pour hauteur, et pour rayons de base les diverses abscisses CE, FH, etc.

Le 1er a pour volume $\pi\overline{CE}^2 \times CO$ ou $\pi\overline{CE}^2 \cdot \frac{h}{n}$

Le 2e a pour volume $\pi\overline{FH}^2 \times CF$ ou $\pi\overline{FH}^2 \cdot \frac{h}{n}$, etc.;

Et le dernier $\quad \pi\overline{\mathrm{PM}}^2 \cdot \frac{h}{n}$

Pour calculer les carrés des diverses abscisses, il faut remplacer dans la relation (1), x^2 par $\overline{\mathrm{CE}}^2$, et y^2 par $\overline{\mathrm{OC}}^2$ ou $\frac{h^2}{n^2}$; puis x^2 par $\overline{\mathrm{FH}}^2$, et y^2 par $\overline{\mathrm{OF}}^2$ ou $\left(\frac{2h}{n}\right)^2$, etc.



Donc $\quad \overline{\mathrm{CE}}^2 = a^2 + \frac{h^2}{n^2}$

Et le 1^er^ cylindre $= \frac{\pi h}{n}\left(a^2 + \frac{h^2}{n^2}\right)$

ou $\quad \pi h\left(\frac{a^2}{n} + h^2 \cdot \frac{1}{n^3}\right)$

De même $\quad \overline{\mathrm{FH}}^2 = a^2 + \frac{4h^2}{n^2}$

Et le 2^e^ cylindre $= \frac{\pi h}{n}\left(a^2 + \frac{4h^2}{n^2}\right)$ ou $\pi h\left(\frac{a^2}{n} + h^2 \frac{4}{n^3}\right)$, etc.;

Enfin $\quad \overline{\mathrm{PM}}^2 = a^2 + \frac{n^2h^2}{n^2}$

Et le dernier cylindre $\quad = \pi h\left(\frac{a^2}{n} + h^2 \frac{n^2}{n^3}\right)$

Mettons πh en facteur commun; le volume total égale

$$\pi h\left(\frac{a^2}{n} + \frac{a^2}{n} \dots + \frac{a^2}{n} + h^2 \frac{1 + 4 \dots + n^2}{n^3}\right)$$

La 1^re^ partie se compose de n termes égaux à $\frac{a^2}{n}$; elle égale donc a^2; dans la deuxième, h^2 a pour multiplicateur la fraction $\frac{1 + 4 \dots + n^2}{n^3}$: mais (n° 581) $\frac{S_n{}^2}{n^3}$ a pour limite $1/3$; donc $\mathrm{V} = \pi h\left(a^2 + \frac{h^2}{3}\right)$ (2)

Pour exprimer le volume en fonction des rayons des bases du segment, il suffit de remarquer que d'après l'équation de l'hyperbole : $\overline{\mathrm{PM}}^2 = a^2 + h^2$; d'où $h^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 - a^2$; donc $\mathrm{V} = \pi h\left(\frac{3a^2}{3} + \frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{3} - \frac{a^2}{3}\right)$, ou $\mathrm{V} = \pi h \cdot \frac{2\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2}{3}$ (3)

2° L'hyperbole quelconque $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (n° 574) donne : $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$ d'où $x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$, au lieu de $x^2 = a^2 + y^2$ de l'hyperbole équilatère. Par suite, pour appliquer la formule (2) à l'hyperboloïde quelconque, il faut remplacer $\frac{h^2}{3}$ par $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{3}$, et l'on a : $\mathrm{V} = \pi h\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{3}\right)$ (4)

Mais la formule (3) ne change point, car on a encore $a^2 = \mathrm{R}^2$; et dans l'hyperbole quelconque, $\overline{\mathrm{PM}}^2$ ou $\mathrm{R}'^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}h^2$; donc le volume de l'hyperboloïde à une nappe $= \pi h \cdot \frac{2\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2}{3}$

Ce volume est équivalent à celui d'un cylindre de hauteur h, *et dont la base égale les* $2/3$ *de* $\pi\mathrm{R}^2$ *plus le* $1/3$ *de* $\pi\mathrm{R}'^2$.

Scolie. Le cercle $x^2+y^2=a^2$ donne $x^2=a^2-y^2$. Sauf le signe du dernier terme, c'est le même résultat que pour l'hyperboloïde équilatère ; donc le volume du segment sphérique à deux bases, lorsqu'une des sections passe par le centre est donné par la formule $V=\pi h\left(a^2-\frac{h^2}{3}\right)$ (2 bis)

ou
$$V=\pi h\frac{2R^2+R'^2}{3} \qquad (3 \text{ bis})$$

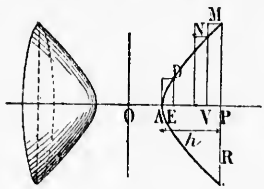
La formule (3) ne change point, car dans le cercle $\overline{PM}^2=a^2-h^2$, $\overline{PM}^2-a^2=-h^2$, et en remplaçant dans (2 bis), $-h^2$ par sa valeur, on retrouve la formule (3).

Lorsque $h=a$ ou R, la base dont R' est le rayon est nulle, on a un hémisphère, et les deux formules (2 bis) et (3 bis) donnent $V=\frac{2}{3}\pi a^3$.

Pour le tronc à deux bases d'ellipsoïde on trouve :
$$V=\pi h\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}.\frac{h^2}{3}\right) \qquad (4 \text{ bis})$$
et
$$V=\pi h.\frac{2R^2+R'^2}{3}$$

Proposition XII. — Théorème.

594. *Le volume du segment à une base de l'hyperboloïde à deux nappes est équivalent à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur, moins l'ellipsoïde allongé qui aurait la hauteur du segment pour grand axe, et dont les axes seraient proportionnels à ceux de l'hyperboloïde.*



1° Cherchons le volume engendré par l'hyperbole équilatère AM dans sa rotation autour de l'axe transverse.

Soient $AO=a$, $AP=h$ et $PM=R$. L'hyperbole équilatère a pour équation (n° 575) $x^2-y^2=a^2$; d'où $y^2=x^2-a^2$.

Divisons h en n parties égales, et cherchons la somme des cylindres qui ont $\frac{h}{n}$ pour hauteur, et pour rayons de base les diverses ordonnées DE..., MP ; bornons-nous à développer un seul terme (n° 584), celui de rang $(n-1)$. Ce cylindre $=\pi\overline{VN}^2.\frac{h}{n}$; en remplaçant OV par sa valeur $a+\frac{(n-1)h}{n}$, la relation $y^2=x^2-a^2$ devient :
$$y^2 \text{ ou } \overline{VN}^2=\left(a+\frac{(n-1)h}{n}\right)^2-a^2=a^2+2ah\frac{n-1}{n}+h^2\frac{(n-1)^2}{n^2}-a^2$$
ou
$$\overline{VN}^2=2ah\frac{n-1}{n}+h^2\frac{(n-1)^2}{n^2}$$

Le cylindre $\pi VN^2.\frac{h}{n}$ égale donc : $\pi h\left(2ah\frac{n-1}{n^2}+h^2\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$ lorsqu'on introduit n dans la parenthèse.

La *somme* des cylindres égale la quantité
$$2ah.\frac{1+2...+n}{n^2}+h^2.\frac{1+4...+n^2}{n^3}$$

Mais (n° 581), à la limite, $\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$, et $\frac{S_{n^2}}{n^3}=\frac{1}{3}$

Ainsi la somme devient $2ah \cdot {}^1/_2 + h^2 \cdot {}^1/_3$.

Donc
$$\text{Volume} = \pi h\left(ah + \frac{h^2}{3}\right) \tag{1}$$

L'équation de la courbe donne

$$\overline{PM}^2 = (a+h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2$$

d'où l'on déduit
$$ah = \frac{\overline{PM}^2 - h^2}{2} = \frac{R^2 - h^2}{2}$$

Cette valeur mise dans la formule (1) donne, toutes réductions faites,

$$V = \pi h\left(\frac{3R^2 - h^2}{6}\right) \tag{2}$$

On peut écrire $\frac{\pi h R^2}{2} - \frac{\pi h^3}{6}$, et ce résultat rappelle le segment sphérique à une base.

2° L'hyperbole quelconque $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ donne $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$.

C'est la même valeur que pour l'hyperbole équilatère, sauf le coefficient $\frac{b^2}{a^2}$; les sections sont donc à celle de l'hyperboloïde équilatère dans le rapport $\frac{b^2}{a^2}$; donc (n° 589)
$$V = \pi h \frac{b^2}{a^2}\left(ah + \frac{h^2}{3}\right) \tag{1 bis}$$

Pour transformer la formule (2), il suffit de se rappeler que R désigne actuellement une ordonnée qui est à celle de l'hyperbole équilatère dans le rapport $\frac{b}{a}$; mais il faut multiplier h^2 par le même rapport.

Donc on a aussi $V = \pi h\left(\frac{3R^2}{6} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2}{6}\right) = \frac{\pi h R^2}{2} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\pi h^3}{6}$, ce qui correspond à l'énoncé.

Le segment à une base d'ellipsoïde $= \frac{\pi h R^2}{2} + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\pi h^3}{6} = \pi h \cdot \frac{b^2}{a^2}\left(ah - \frac{h^2}{3}\right)$

Remarque. Sans recourir à une sommation, on peut obtenir le volume de l'ellipsoïde et des hyperboloïdes.

Proposition XIII. — Théorème.

595. *Un segment sphérique quelconque est équivalent au segment correspondant du cylindre circonscrit à la sphère, moins le tronc du cône à deux nappes dont le sommet est au centre de la sphère, et qui a mêmes bases que le cylindre.*

Considérons un cercle et le carré circonscrit.

Dans la rotation autour de AA', le demi-cercle ABA' engendre la sphère, le rectangle ADRA' le cylindre, et la diagonale DR' un cône à deux nappes.

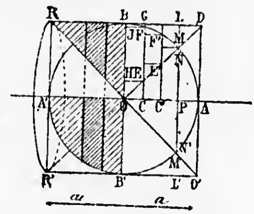
Cherchons le volume du segment sphérique engendré par OBMP. Divisons OP en n parties égales : le segment sphérique est la limite vers laquelle tend la somme des cylindres que forment les rectangles construits sur les diverses ordonnées CF, C'F', etc. Or dans le cercle on a : $x^2 + y^2 = a^2$ (n° 513), ou $y^2 = a^2 - x^2$; donc $\overline{CF}^2 = a^2 - \overline{OC}^2$; mais $OC = CE$; donc $\overline{CF}^2 = a^2 - \overline{CE}^2$.

Le cylindre qui a CF pour rayon égale $\pi.\overline{CF}^2 \times OC = \pi a^2 \times OC - \pi \overline{CE}^2 \times OC$.

Ainsi le cylindre engendré par OCFJ égale le cylindre OCGB, moins le cylindre formé par OCEH. De même le cylindre qui a C'F' pour rayon égale

$$\pi \overline{C'F'}^2 \times CC' = \pi a^2 \times CC' - \pi \overline{C'E'}^2 \times CC', \text{ et ainsi des autres.}$$

Mais quand n croît indéfiniment, la somme des cylindres $\pi \overline{CE}^2 \times OC + \pi \overline{C'E'}^2 \times CC'$, etc., tend vers le cône engendré par OPN (nº 583); et les cylindres $\pi a^2 \times OC$, $\pi a^2 \times CC'$, etc., ont pour somme le cylindre engendré par OBLP. Donc le segment sphérique formé par OBMP est équivalent au cylindre OBLP, moins le cône ONP.



L'hémisphère BAB' égale le cylindre BDB'D' moins le cône DOD', égale

$$\pi a^2 . a - \pi a^2 . \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \pi a^3$$

De même le segment sphérique à une base MAM' égale le cylindre LDL'D' moins le tronc de cône NDN'D'.

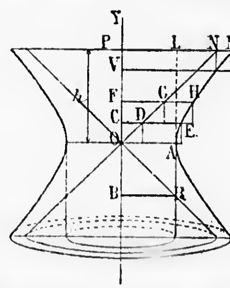
En exprimant les volumes du cylindre et du cône ou du tronc de cône en fonction de a et de la hauteur du segment, on arrive aux formules déjà données; il en est de même pour les hyperboloïdes.

On sait que la zone formée par BM égale la surface cylindrique engendrée par BL (nº 464); on peut ajouter que la base du segment égale celle du cylindre moins la section correspondante faite dans le cône, car $\pi \overline{PM}^2 = \pi \overline{PL}^2 - \pi \overline{PN}^2$; et de plus le triangle DOR et le demi-cercle engendrent, par leur rotation autour de AA', des volumes équivalents, et dont les segments correspondants sont aussi équivalents.

Proposition XIV. — Théorème.

596. *L'hyperboloïde à une nappe est équivalent au cylindre de même hauteur qui a pour rayon le demi-axe transverse, plus le cône asymptote de même hauteur.*

Soit l'hyperbole équilatère AM tournant avec l'asymptote ON autour de OP.



Le cylindre dont le rayon $= CE$ a pour volume $\pi \overline{CE}^2 . OC$; mais généralement (nº 575) on a $x^2 - y^2 = a^2$, ou $\overline{CE}^2 = a^2 + \overline{OC}^2$;

donc cylindre $\pi \overline{CE}^2 . OC =$ cylindre $\pi a^2 . OC +$ cylindre $\pi \overline{OC}^2 . OC$.

Or $OC = CD$; donc $\pi \overline{CE}^2 . OC = \pi a^2 . OC + \pi \overline{CD}^2 . OC$.

De même $\pi \overline{FH}^2 . FC = \pi a^2 . FC + \pi \overline{FG}^2 . FC$; car dans ce cas $y = OF = FG$.

Et le dernier ou $\pi \overline{PM}^2 . PV = \pi a^2 . PV + \pi \overline{PN}^2 . PV$.

La première partie égale $\pi a^2.\overline{OP}$, et la seconde, à la limite, égale le cône engendré par PON; donc...

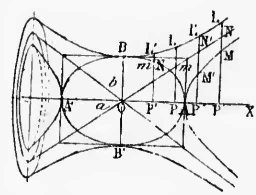
Remarque. Le volume engendré par NOAM est équivalent au cylindre engendré par POAL.

Lorsque l'hyperbole n'est point équilatère, on obtient le même résultat, car l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donne $x^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{b^2}y^2$, $\overline{CE}^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{b^2}.\overline{CO}^2$

Or $\dfrac{CO}{CD} = \dfrac{AR}{OA} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{b}{a}$; $\dfrac{\overline{CO}^2}{\overline{CD}^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$ d'où $\overline{CD}^2 = \dfrac{a^2}{b^2}.\overline{CO}^2$

Donc encore $CE^2 = a^2 + CD^2$, etc... On procède d'une manière analogue pour traiter directement l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes.

597. **Scolie.** Sur deux axes donnés a et b, construisons une ellipse et deux hyperboles *conjuguées,* c'est-à-dire telles que l'axe transverse de l'une soit l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement; les diagonales du rectangle des axes sont les asymptotes des deux hyperboles.



Si la figure opère une rotation autour de OX, on obtiendra les divers corps étudiés précédemment. Désignons par segment MPM'P' le corps engendré par cette surface; nous aurons :

Segment d'ellipsoïde $mPm'P' =$ cylindre $\pi b^2.\overline{PP'}$ — tronc de cône $NPN'P'$.

Segment d'hyperboloïde à une nappe $LPL'P' = \pi b^2.\overline{PP'} +$ tronc de cône $NPN'P'$.

Segment d'hyperboloïde à deux nappes $MPM'P' =$ tronc de cône $NPN'P' - \pi b^2.\overline{PP'}$.

La méthode par *sommation* s'applique directement et sans difficulté, même lorsque les corps ci-dessus ont trois axes inégaux, et que les bases des segments sont obliques par rapport à chaque axe; néanmoins le théorème relatif au rapport constant entre les sections correspondantes (nos 588 et 589) a son utilité, car il permet de se borner, dans une exposition élémentaire, au cas le plus simple; le résultat est ensuite affecté d'un coefficient convenable. Employé de tout temps pour l'ellipsoïde, ce théorème ne l'était point pour les autres corps, car les hyperboloïdes équilatères n'étaient point donnés par les méthodes ordinaires.

§ III. — CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES PLANES

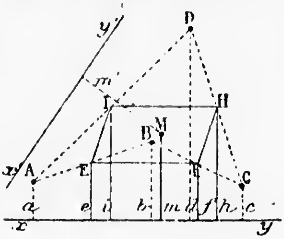
598. Le *centre des moyennes distances* de plusieurs points d'un plan est un point tel que sa distance à une droite quelconque de ce plan est la moyenne arithmétique des distances des divers points donnés à la même droite.

Soient les points A, B, C, D, et xy une droite quelconque. Joignons les points donnés deux à deux, menons les ordonnées du point milieu des divers côtés et des sommets du polygone. Dans les divers trapèzes formés, on a :

$$e = \frac{a+b}{2} \qquad f = \frac{b+c}{2} \qquad h = \frac{c+d}{2} \qquad i = \frac{d+a}{2}$$

d'où $e + f + h + i = \dfrac{2a + 2b + 2c + 2d}{2} = a + b + c + d$

Mais le périmètre EFHI est moindre que celui de ABCD, car EF est $<$ EB + BF, etc.; donc en opérant indéfiniment d'une manière analogue, le polygone formé en joignant deux à deux les milieux du précédent se réduit à un point M; et 4 fois l'ordonnée m égale la somme des 4 ordonnées du polygone primitif, ou $m = \dfrac{a+b+c+d}{4}$



M est le centre des moyennes distances des points donnés.

Pour une deuxième droite, $x'y'$ par exemple, en joignant deux à deux les milieux des côtés adjacents, on arrive nécessairement au même point M; donc pour une droite quelconque $x'y'$, on a $m' = \dfrac{a'+b'+c'+d'}{4}$

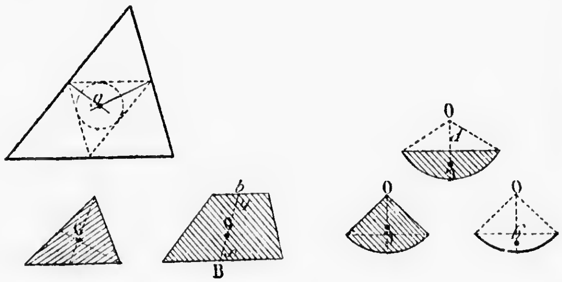
D'après des considérations développées dans les traités de mécanique, le centre des moyennes distances de tous les points du périmètre d'une figure plane est appelé *centre de gravité du périmètre* (nous le désignerons par g); et le centre des moyennes distances des divers points d'une surface plane limitée est nommé *centre de gravité de la surface* (ce point est désigné ordinairement par G).

599. Le centre de gravité d'une droite est au milieu de sa longueur.

Les points g et G se trouvent sur les divers axes de symétrie d'une figure donnée; par suite, ils sont au centre de la courbe (n° 480), ou au centre de figure dans les polygones réguliers.

Dans le triangle, g est au centre du cercle inscrit dans le triangle formé en joignant deux à deux les milieux des côtés du triangle primitif, et G est au point de concours des médianes du triangle donné.

Dans le trapèze, G est sur la droite qui joint les milieux des côtés parallèles, et l'on a : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2b+B}{2B+b}$



Pour l'arc de cercle, g est sur le rayon perpendiculaire à la corde, et en représentant le rayon par r, la corde par c, la longueur de l'arc par s, et la distance du centre à la corde par p, on a $Og = \frac{rc}{s}$ quand l'arc égale une demi-circonférence, $Og = \frac{2r}{\pi}$.

Dans le secteur circulaire $OG = \frac{2}{3} \cdot \frac{rc}{s}$

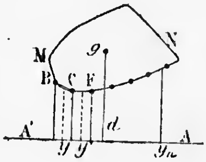
Dans le demi-cercle $OG = \frac{4r}{3\pi}$

Dans le segment à une base $OG = \frac{c^3}{6\ (sr - cp)}$

Proposition XV. — Théorèmes de Guldin.

600. 1° *La surface engendrée par le périmètre d'une figure plane dans sa révolution complète autour d'un axe situé dans son plan, égale le périmètre multiplié par la circonférence que décrit le centre de gravité de ce périmètre.*

Soit la figure plane MN *complètement* située d'un même côté de l'axe; divisons le périmètre p en n parties égales sensiblement rectilignes; menons les ordonnées des milieux de ces n parties égales, ainsi que l'ordonnée d du point g.



$BC = \frac{p}{n}$, et engendre la surface convexe d'un tronc de cône; cette surface $= 2\pi y \,.\, \overline{CB} = 2\pi y \,.\, \frac{p}{n}$; de même, surface engendrée par $CE = 2\pi y' \,.\, \frac{p}{n}$, etc.

Donc la surface totale $= 2\pi(y + y' + y'' + \ldots)\frac{p}{n}$

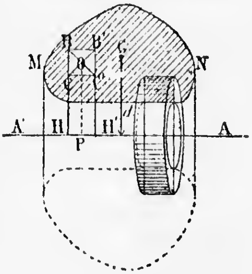
$$= p \,.\, 2\pi \left(\frac{y + y' + y''\ldots}{n}\right)$$

Mais $\frac{y + y' + y''\ldots}{n} = d$; donc, surface de révolution $= p \,.\, 2\pi d$.

Le *tore* est le corps engendré par un cercle qui tourne autour d'un axe situé dans son plan; soit d la distance du centre à l'axe, et soit R le rayon du cercle; faut au moins que $d = R$.

Surface du tore $= 2\pi R \,.\, 2\pi d = 4\pi^2 dR$.

601. 2° *Le volume d'un corps de révolution égale la surface plane génératrice multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette surface.*



Dans la figure MN, considérons un élément de la surface, un carré dont le côté BB' ou a est parallèle à l'axe. La distance OP de son centre à $AA' = \frac{HB + HC}{2}$; dans la rotation, le carré engendre un volume qui est la différence des deux cylindres qui ont HH' ou a pour hauteur, et HB et HC pour rayons respectifs.

Donc le volume formé par l'élément BCB'C' $= \pi \overline{BH}^2 \,.\, a - \pi \overline{CH}^2 \,.\, a = \pi a(\overline{BH}^2 - \overline{CH}^2)$;

mais $\overline{BH}^2 - \overline{CH}^2 = (BH + CH)(BH - CH) = 2 \,.\, \overline{OP} \,.\, a$.

Donc $V = \pi a^2 . 2\overline{OP}$, ou $a^2 . 2\pi . \overline{OP}$. Il en serait de même pour tous les carrés que des séries de parallèles équidistantes formeraient en nombre n dans la surface MN. Le volume engendré égale donc $a^2 . 2\pi \times$ par la somme des n lignes telles que OP ; mais la somme de ces lignes $= n.d$ (nº 598) ; donc :

Volume $= a^2 . 2\pi . n . d.$ ou $na^2 . 2\pi d =$ Surface génératrice $\times 2\pi d$, car na^2 tend vers la surface MN si n croît indéfiniment.

Le volume du tore $= \pi R^2 . 2\pi d = 2\pi^2 d R^2$. Donc...

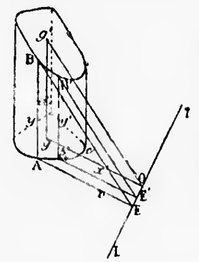
602. **Scolie.** Lorsque la rotation correspond à une quantité angulaire donnée, il faut remplacer la circonférence $2\pi d$ par l'arc décrit $\dfrac{\pi d \times \textit{nombre de degrés.}}{180}$

Les théorèmes de Guldin peuvent être généralisés :

Lorsqu'une surface se meut de manière qu'elle reste constamment normale à la courbe que décrit son centre de gravité, le volume s'obtient en multipliant la surface génératrice par la ligne que décrit le point G ; *et la surface égale le périmètre multiplié par la courbe que décrit le point* g.

Proposition XVI. — Théorème.

603. *La parallèle aux génératrices d'un tronc cylindrique droit, menée par le centre de gravité du périmètre de la base, est la moyenne arithmétique des génératrices du tronc.*



La parallèle aux génératrices, menée par le centre de gravité de la base, est la moyenne arithmétique des parallèles aux génératrices menées par les divers points de la base.

Soient LT l'intersection des deux plans qui limitent le tronc cylindrique, g le centre de gravité du périmètre, gg' ou d la parallèle aux génératrices. Par les diverses génératrices et par gg' ou d, menons des plans perpendiculaires à LT ; les droites $x, x', \ldots c$, sont parallèles, et il en est de même de BE, B'E', $g'o$; donc on a les rapports égaux :

$$\frac{y}{x} = \frac{d}{c}; \quad \frac{y'}{x'} = \frac{d}{c}, \text{ etc.}$$

Et d'après une propriété connue des rapports égaux $\dfrac{y + y' + \ldots}{x + x' + \ldots} = \dfrac{d}{c}$;

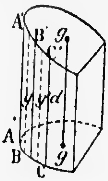
mais c est la moyenne arithmétique de $x, x', \ldots$; donc $nc = x + x' + \ldots$ (nº 598) ; et $nd = y + y' + \ldots$; ainsi d est la moyenne arithmétique des génératrices.

On démontrerait de la même manière la deuxième partie du théorème.

Proposition XVII. — Théorème.

604. *La surface latérale d'un tronc cylindrique droit s'obtient en multipliant le périmètre de la base par la parallèle aux génératrices, menée par le centre de gravité du périmètre de la base.*

Divisons le périmètre p en n parties égales que nous considérerons comme rectilignes. La surface latérale cherchée peut être considérée comme la limite des faces latérales d'un tronc de prisme. Or la surface des divers trapèzes est

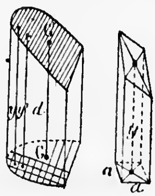


$\frac{p}{n}\cdot y$, $\frac{p}{n}\, y'$, etc., et la surface latérale égale $p\,.\,\frac{y+y'+\dots}{n}=pd$ (nº 603).

Proposition XVIII. — Théorème.

605. *Le volume d'un tronc cylindrique droit s'obtient en multipliant la base par la parallèle aux génératrices menée par le centre de gravité de la base.*

Un tronc de prisme droit à base carrée a pour volume a^2y (comme au nº 432).



Divisons la base en n carrés égaux; le volume égalera

$$a^2y+a^2y'+\dots=a^2\,(y+y'+\dots)=na_2\left(\frac{y+y'+\dots}{n}\right);\ \text{mais}$$

$\frac{y+y'+\dots}{n}=d$ (nº 603); donc le volume du tronc égale $na^2d=\text{base}\times d$.

Scolie. G' est le centre de gravité de la face supérieure; d est donc la droite qui joint les centres de gravité des deux bases; mais souvent g' n'est pas le centre de gravité du périmètre de la face supérieure du tronc.

Il suffit de considérer un tronc droit, puisque le tronc quelconque peut être décomposé en deux troncs droits à base commune (nº 432).

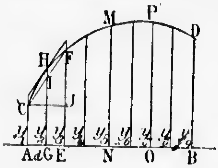
§ IV. — MÉTHODES APPROXIMATIVES

Pour évaluer approximativement une surface plane quelconque, on emploie les formules de *Simpson* et de *Poncelet*.

606. *Formule de Thomas Simpson.*

Soit à évaluer la surface ACDB. Divisons AB en un nombre pair de parties égales, 8 par exemple; nous aurons un nombre impair d'ordonnées équidistantes. Menons CF, puis CJ parallèle à la base.

En considérant CHF comme un segment de parabole, on a (nº 562)



Surface CHF = les $^2/_3$ du parallélogramme $= {}^2/_3\,\overline{CJ}\cdot\overline{HI} = \frac{d}{3}\cdot 4\,\overline{HI}$

Or le trapèze $ACFE = (AC + EF)\,d = \frac{d}{3}$ $(AC + 2AC + 2EF + EF) = \frac{d}{3}(AC + 4GI + EF)$

donc surface $ACHFE = \frac{d}{3}(AC + 4HI + 4GI + EF)$

$$= \frac{d}{3}(AC + 4HG + EF) = \frac{d}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

De même surface $EFMN = \frac{d}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5)$

$$MNPQ = \frac{d}{3}(y_5 + 4y_6 + y_7)$$

$$PQDB = \frac{d}{3}(y_7 + 4y_8 + y_9)$$

Donc surface totale

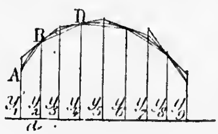
$$ACDB = \frac{d}{3}[\,y_1 + y_9 + 2(y_3 + y_5 + y_7) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\,]$$

De là la règle suivante : *Il faut diviser la projection de la courbe en un nombre pair de parties égales ; à la somme des ordonnées extrêmes, ajouter le double de la somme des autres ordonnées de rang impair, plus le quadruple de la somme des ordonnées de rang pair, et multiplier par le tiers de la distance de deux ordonnées consécutives.* En représentant par E la somme des *ordonnées extrêmes*, par I la somme des autres ordonnées de rang impair, et par P celles des *ordonnées de rang pair*, on écrit :

$$S = \frac{d}{3}(E + 2I + 4P)$$

607. *Formule Poncelet.*

Divisons la projection de la courbe en un nombre pair de parties égales ; par les points B, D, etc., menons des tangentes limitées aux ordonnées voisines ; à l'intérieur menons AB, et joignons les extrémités des ordonnées de deux en deux, sauf pour y_3 et y_9.



La surface à évaluer est comprise entre la somme des trapèzes inscrits et celle des circonscrits. On peut prendre la demi-somme de ces surfaces comme mesure de la surface donnée. Or les aires des trapèzes inscrits sont :

$$\frac{y_1 + y_2}{2}d,\ (y_2 + y_4)\,d, \ldots\ \frac{y_8 + y_9}{2}d$$

Et la somme est

$$d\left[\frac{y_1 + y_2}{2} + (y_2 + y_4) + (y_4 + y_6) + (y_6 + y_8) + \frac{y_8 + y_9}{2}\right]$$

Ajoutons et retranchons $\frac{y_2}{2}$ et $\frac{y_8}{2}$, la somme devient :

$$d\left[2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + \frac{y_1 + y_9}{2} - \frac{y_2 + y_8}{2}\right] = d\left(2P + \frac{E - E'}{2}\right)$$

en représentant par P la somme des ordonnées de *rang pair*, par E la somme des deux ordonnées extrêmes, et par E' la somme de la seconde et de l'avant-dernière ordonnée.

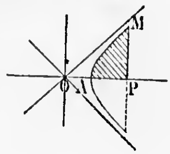
La somme des trapèzes extérieurs égale $d \cdot 2P$.

La demi-somme des deux groupes

$$= {}^1/_2 \left[d\left(2P + \frac{E - E'}{2}\right) + d \cdot 2P \right] = d\left(2P + \frac{E}{4} - \frac{E'}{4}\right)$$

Ainsi, *au double des ordonnées de rang pair, on ajoute le quart de la somme des ordonnées extrêmes, on en soustrait le quart des ordonnées voisines, et le tout doit être multiplié par la distance de deux ordonnées consécutives.*

La formule *Poncelet* est d'un emploi plus facile que la formule *Simpson*, et donne ordinairement une approximation plus grande.



Au demi-segment AMP d'hyperbole équilatère, appliquons les deux formules, en supposant $AO = a = 10$, et OP ou $x = 20$. En divisant AP en 10 parties égales, et calculant les ordonnées, on trouve que MP ou la $11^e = 17{,}320$, celle du point A est nulle. L'aire calculée est :

Par la formule Simpson. 106,994 3
Par la formule Poncelet. 107,090 1

Dans le cas étudié, la valeur réelle est 107,352 8; la formule Poncelet donne ce résultat à ${}^1/_{408}$ près; en prenant un plus grand nombre d'ordonnées, on obtiendrait encore une plus grande approximation.

La formule Poncelet a été modifiée par divers auteurs; on pose par exemple :

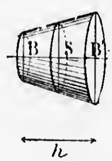
$$S = d\left(2P + \frac{E}{6} - \frac{E'}{6}\right)$$

Avec les données ci-dessus, on trouve 107,375 15, valeur beaucoup plus approchée que les deux premières.

608. *Évaluation approximative des volumes.*

Pour évaluer approximativement le volume des corps, on détermine des sections équidistantes, puis on applique les formules *Simpson* ou *Poncelet*, en remplaçant les ordonnées y_1, y_2, etc., par les *aires* des diverses sections.

La formule Simpson, lorsqu'on ne considère que trois ordonnées, se réduit à $\frac{d}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$ ou $\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + y_3)$. Et quand on l'applique aux volumes ayant pour bases extrêmes B et B', et S pour section équidistante, on a



$$V = \frac{h}{6}(B + 4S + B').$$

Cette formule, dont un ingénieur civil, M. Sergent, s'est fait le propagateur, donne exactement le volume de tous les corps dont les sections peuvent être exprimées par une équation du troisième degré à une inconnue.

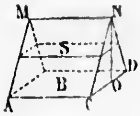
On peut la vérifier directement pour les corps suivants :

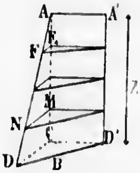
1° *Cylindre et prisme*; car $B = B' = S$; dans ce cas $\frac{h}{6}(B + B' + 4S) = Bh$.

2° *Prisme triangulaire*, placé sur une des faces latérales, car

$$V = \frac{CD \times NO}{2} \times AC \quad \text{ou} \quad AC \times CD \times \frac{h}{2} = \frac{Bh}{2}$$

Or la base B′ est nulle, $S = \frac{B}{2}$; donc $4S = 2B$ et la formule simple de Simpson devient $\frac{h}{6}(B + 2B) = \frac{Bh}{2}$





3° *Corps limité par un rectangle* ACA′D′, *deux triangles* ACD et DCD′, *et une surface gauche* DAA′D′, engendrée par une droite qui s'appuie sur DD′ et AA′ en restant parallèle au plan DCD′. Le volume de ce corps égale $\frac{DCD' \times h}{2} = \frac{Bh}{2}$. En construisant des prismes sur les diverses sections, on peut opérer comme au n° 582. On a souvent à considérer de tels corps dans le calcul des terrassements.

4° *Pyramide et cône;* la section est le quart de B ; on a donc

$$\frac{h}{6}(B + B) = \frac{Bh}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi R^2 h}{3}$$

5° Troncs de pyramide et de cône; ce dernier a pour section $\pi\left(\frac{R + r}{2}\right)^2$

ainsi $4S = \pi(R^2 + 2Rr + r^2)$; donc $\frac{h}{6}(B + B' + 4S) = \frac{\pi h}{6}(2R^2 + 2Rr + 2r^2)$

ou

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

6° *Segment quelconque d'ellipsoïde ou d'hyperboloïde;* ces corps sont équivalents à la somme ou à la différence d'un cylindre et d'un tronc de cône (nos 595 et 596)... Dans la sphère et dans l'ellipsoïde, les bases B et B′ sont nulles...

7° *Segment quelconque de paraboloïde;* la section est la demi-somme des bases, comme ci-dessus, 2° et 3°.

8° *Corps ayant deux bases planes et parallèles, mais quelconques, et pour faces latérales des polygones quelconques, ou la surface gauche* définie précédemment, 3°; car on peut le décomposer en prismes, prisme placé sur une des faces latérales, pyramide ou autre corps étudié ci-dessus.

609. *Volume des tonneaux.* Les tonneaux ont une forme trop variable pour qu'une même formule puisse convenir à tous les cas. Soit *l* la longueur intérieure du tonneau, D le grand diamètre ou diamètre du *bouge*, et *d* le diamètre du fond ou *jable*.

1° Si l'on considérait le tonneau comme la réunion de deux *troncs de cônes*, en négligeant la courbure des *douves*, on aurait :

$$V = {}^1/_{12}\pi l(D^2 + d^2 + Dd) = 0{,}2618\,l(D^2 + d^2 + Dd) \qquad (1)$$

2° Le résultat étant évidemment trop faible, on remplace le produit Dd par D^2, et l'on obtient la formule anglaise d'*Oughtred* :

$$V = \frac{1}{12}\pi l(2D^2 + d^2) = 0{,}2618\, l(2D^2 + d^2) \qquad (2)$$

C'est à cette même formule que l'on arrive, soit en considérant le tonneau comme un *segment d'ellipsoïde* à deux bases (n° 593), soit en appliquant la formule de *Simpson* au cas d'une seule section équidistante des bases (n° 608).

3° Si l'on considère le tonneau comme composé de deux *troncs de paraboloïdes* réunis par les grandes bases, on a (n° 587) :

$$V = \frac{1}{8}\pi l(D^2 + d^2) = 0{,}3927\, l(D^2 + d^2) \qquad (3)$$

4° D'après une instruction ministérielle de l'an VII, un tonneau peut être calculé comme un cylindre ayant pour hauteur la longueur intérieure de la futaille, et pour diamètre le diamètre du jable augmenté des $2/3$ de sa différence avec le diamètre du bouge; ce procédé conduit à la formule empirique suivante :

$$V = \frac{1}{4}\pi l\left[d + \frac{2}{3}(D - d)\right]^2 = \frac{1}{36}\pi l(d + 2D)^2 = 0{,}087\,27\, l(d + 2D)^2 \qquad (4)$$

5° A cette formule se rattache celle de *Vasselon*, usitée à l'octroi de Paris :

$$V = \frac{1}{4}\pi l[d + 0{,}56(D - d)]^2 = 1{,}5205\, l(d + 1{,}2727\, D)^2 \qquad (5)$$

6° Citons enfin la *formule de Dez*, qui s'emploie beaucoup en France, et qui s'accorde d'une manière assez précise avec de nombreuses mesures effectuées par dépotement :

$$V = \frac{1}{256}\pi l(5D + 3d)^2 = 0{,}012\,27\, l(5D + 3d)^2 \qquad (6)$$

Remarques. 1° Si les fonds du tonneau sont elliptiques, on trouve le diamètre du cercle équivalent, en prenant la moyenne géométrique des deux axes de l'ellipse; l'ellipse du bouge est considérée comme étant semblable à celle du jable, et l'axe que l'on mesure au bouge permet de calculer l'autre axe.

2° La longueur intérieure d'un tonneau se mesure pratiquement en déduisant de la longueur totale les saillies des douves, plus les épaisseurs des fonds; l'épaisseur du fond varie de 11 à 33 millimètres, selon la grandeur de la pièce; en général, cette épaisseur peut être estimée le $1/40$ de la longueur totale.

3° Les mesures linéaires de la longueur et des diamètres ne peuvent s'effectuer que jusqu'aux millimètres; d'où il suit que l'on ne peut guère compter que sur les trois premiers chiffres du volume, puisque les diamètres ne sont exprimés que par des nombres de trois chiffres; du reste, on ne cherche généralement la contenance d'un tonneau qu'à un litre près, ou même à quelques litres près.

Application comparative des formules. La *pipe* de 500 litres est un tonneau qui a 1m190 de longueur intérieure, 0m798 de diamètre au bouge, et 0m650 de diamètre au fond. Voici les contenances calculées par les diverses formules.

(1) Formule des troncs de cônes	litres	491,6
(2) Formule anglaise d'Oughtred	—	528,4
(3) Formule des troncs paraboliques . . .	—	495 »
(4) Formule française de l'an VII.	—	523,9
(5) Formule des octrois de Paris.	—	502 »
(6) Formule de Dez.	—	508,3
Le dépotement fait avec soin donne. .	—	500 »

La *jauge diagonale* des tonneliers est une règle graduée que l'on introduit dans le tonneau par la bonde, jusqu'à l'extrémité opposée de l'un des fonds : au point de sortie de la jauge on lit une valeur plus ou moins approchée de la contenance du tonneau. Tous les tonneaux géométriquement semblables peuvent être évalués avec exactitude au moyen d'une même jauge; et dans ce cas les diverses longueurs de la jauge sont entre elles comme les racines cubiques des volumes inscrits sur cette même jauge (nº 479).

Jaugeage des tonneaux en vidange. — 1er moyen. On place le tonneau *verticalement*, on perce le fond supérieur, et l'on introduit une tringle que l'on descend verticalement jusqu'au fond inférieur; cette tringle étant retirée, on voit la longueur intérieure du tonneau et la partie occupée par le liquide. A l'aide d'un ruban métrique, on mesure la circonférence extérieure du tonneau au niveau du liquide; on en déduit le diamètre extérieur, que l'on diminue de 4 centimètres pour les épaisseurs des douves. Enfin on mesure le diamètre du fond, et l'on évalue comme *tronc de cône* la partie vide ou pleine qui est moindre que la moitié du tonneau.

2e *moyen.* On établit le tonneau *horizontalement*, en dressant les fonds au *fil à plomb;* on descend verticalement par la bonde une tringle qui donne le diamètre du bouge et la hauteur du liquide. La partie vide ou pleine, qui est moindre que la moitié du tonneau, est évaluée par la formule empirique suivante :

$$V' = 1,767lh^2$$

h étant la plus petite partie du diamètre vertical. Nous supposons, et c'est le cas ordinaire, que la surface liquide atteint les deux fonds.

D'après des expériences faites, si l'on divise en 10 parties égales le diamètre vertical de chaque fond d'un tonneau horizontal, et si l'on conçoit des plans horizontaux par les points de division, les 5 tranches horizontales inférieures ont respectivement pour volume 5, 9, 11, 12 et 13 centièmes du volume total; et il en est de même, dans l'ordre inverse, pour les 5 tranches supérieures. (Nous avons emprunté une partie de ces renseignements et de ceux qui suivent au *Traité de métrage* de M. Sergent.)

610. *Autres évaluations.* Le *broc* est assimilé à un tonneau qui aurait pour diamètre d des fonds la moyenne arithmétique des diamètres supérieur et inférieur, et l'on applique ordinairement la formule française de l'an VII (nº 609, 4º).

On appliquerait cette même formule pour la mesure d'un *four à chaux* ovoïde.

Les chaudières sphériques ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes, peuvent s'évaluer d'après les propriétés d'équivalence de ces corps avec des cylindres ou des troncs de cônes (nos 586 à 597), ou l'une des formules Simpson et Poncelet (nos 606, 607, 608).

Les cuviers à base circulaire ou elliptique sont de simples troncs de cônes.

Les *foudres* sont de grands tonneaux qui peuvent contenir jusqu'à 40, 50 et 60 kilolitres ou mètres cubes; pour leur donner plus de solidité, on remplace les fonds plats par des fonds concaves. Si l'on appelle l la distance des fonds à leurs naissances, l' la distance des fonds à leurs sommets, d le diamètre intérieur du foudre à chaque extrémité, et D le grand diamètre, on a :

$$V = 0,1309 [l(4D^2 - d^2) + 3l'd^2]$$

Les *tas de pierre* ou de *sable*, les *fossés*, les *tombereaux*, *brouettes*, *civières*, *auges*, et autres corps analogues, s'évaluent exactement par la formule de Simpson :

$$\tfrac{1}{6}h(B + B' + 4S)$$

B et B' étant les bases parallèles, h la hauteur, et S une section équidistante des bases.

Les *bois en grume* sont assimilés à des troncs de cônes, et peuvent s'évaluer par la formule ci-dessus; mais pour ne pas compter l'écorce et l'aubier, qui n'entrent pas dans les charpentes, on mesure la circonférence C du milieu par-dessus l'écorce, et la longueur l de la pièce, et l'on pose

$$V = 0{,}079\ 58\, C^2 l$$

Les droits d'octroi sur le bois de charpente se paient d'après la *pièce équarrie* que l'on peut tirer du bois en grume; il est d'usage de prendre le diamètre moyen d, qui est la demi-somme des diamètres extrêmes, comme diagonale de la pièce équarrie; le volume de cette dernière est donnée par la formule :

$$V = {}^1/_2 d^2 l$$

Ce volume prismatique est un peu moindre que le volume réel, qui est celui d'un tronc de pyramide; de même le volume cylindrique que l'on prendrait sur la section moyenne d'un morceau de bois en grume, est moindre que le volume réel, qui est celui d'un tronc de cône; mais dans tous les cas relatifs aux pièces de bois, cette différence est négligeable.

Le *tonnage* ou *jaugeage d'un bateau* se fait par l'évaluation du volume de l'eau déplacée par suite de la charge : on multiplie l'augmentation du *tirant d'eau* par la *longueur* et par la *largeur*, réduites à leur valeur moyenne d'après les usages établis. Le tirant d'eau *à charge complète* va jusqu'au-dessus du plat-bord, moins un décimètre. — (On trouvera d'autres détails intéressants dans le *Traité de métrage* de Sergent.)

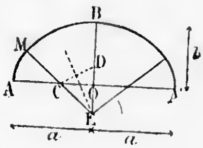
§ V. — COURBES DIVERSES ET APPLICATIONS

Anse de panier.

611. L'*anse de panier* est une courbe composée de plusieurs arcs de circonférence, et destinée à remplacer une demi-ellipse dont on donne les axes.

Pour construire une anse de panier à trois centres, connaissant l'ouverture $2a$, et la flèche ou montée b, on emploie un des procédés suivants :

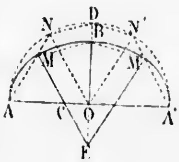
1er *procédé*. On prend à volonté le petit rayon $r = AC < OB$ ou porte r de B en D, la perpendiculaire élevée au milieu de CD détermine le centre E du grand arc; la ligne EC indique le point de raccordement M.



Le triangle rectangle COE fournit la relation $\overline{CE}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{EO}^2$ ou $(R-r)^2 = (a-r)^2 + (R-b)^2$.

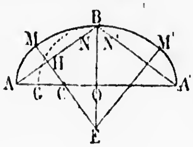
Cette relation permet de calculer BE lorsqu'on se donne AC.

2e *procédé*. Sur $2a$ comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, que nous diviserons en trois parties égales, aux points N et N'; menons DN, et par le point B, une parallèle à DN, laquelle coupe NA au point M; la droite MCE parallèle à NO, détermine les centres C et E.



On a, en effet, $CA = CM$, car le triangle ACM est semblable au triangle équilatéral AON. De même $EM = EB$, car le triangle BEN est semblable au triangle isocèle DON.

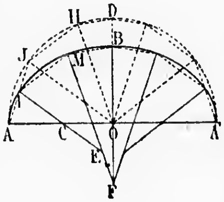
Dans cette construction, les arcs AM, MM′ et M′A′, correspondent à des angles au centre de 60 degrés.



3ᵉ *procédé*. La différence AG des demi-axes est portée de B en N et N′; la perpendiculaire élevée au milieu de AN détermine les centres C et E.

Pour calculer les rayons, remarquons que l'angle $E=A$, et que $C=B$, car ces angles ont les côtés perpendiculaires. Soient AG ou $(a-b)=d$, et $AB=l$; les triangles semblables AHC et AOB donnent la relation $\frac{AB}{AO}=\frac{AC}{AH}=\frac{2AC}{AN}$;

ou $\frac{l}{a}=\frac{2r}{l-d}$; d'où $r=\frac{l(l-d)}{2a}$. On trouve aussi $R=\frac{l(l+d)}{2b}$.



Pour construire une anse de panier à cinq centres, il faut diviser la demi-circonférence décrite sur l'ouverture $2a$ en 5 parties égales, prendre AC à volonté, mener CI parallèle au rayon OJ; par I et B mener des lignes respectivement parallèles à JH et DH, et par M la parallèle MEF à HO, ce qui détermine les deux autres centres.

En effet, à cause des triangles semblables, on a : $CI=CA$, $EI=EM$; $FM=FB$.

On procède d'une manière analogue pour une anse à sept centres; mais alors on se donne deux rayons.

Des ponts.

612. La voûte des ponts est une surface cylindrique prenant le nom de la courbe qu'affecte sa section droite : demi-circonférence, demi-ellipse, arc de cercle.

La voûte repose sur deux murs verticaux nommés *pieds-droits*. Le plan horizontal qui termine les pieds-droits à la partie supérieure se nomme *plan des naissances*, la surface *intérieure* de la voûte, celle qui est apparente, est appelée *douelle* ou *intrados*.

On nomme généralement *extrados* la surface dissimulée par les murs de face et le terre-plein qui surmonte la voûte.

L'*extrados* ainsi défini a moins d'épaisseur à la partie supérieure qu'aux naissances; le parallélisme des deux surfaces cylindriques des maçonneries de la voûte n'est accepté que pour des *ponceaux* à très-faible ouverture.

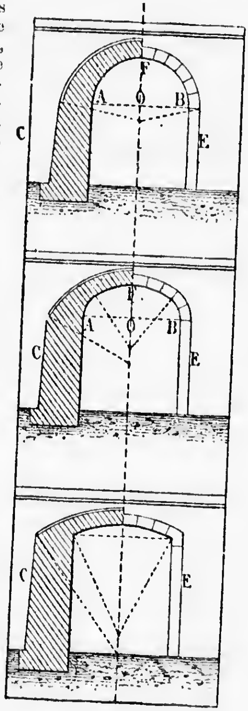
Les *arcs de tête* qui terminent la voûte sont formés par des pierres taillées nommées voussoirs; ces pierres sont toujours en *nombre impair*.

Le voussoir supérieur se nomme *clef*.

Ordinairement, sur les faces de tête, les voussoirs sont limités par une courbe parallèle à celle de l'*intrados*, aussi ne font-ils connaître ni l'épaisseur de la voûte ni la forme de l'extrados.

Dans les figures ci-contre, E représente la moitié de l'élévation, et C la coupe.

Les voûtes à *plein-cintre* ont pour section droite une demi-circonférence; dans ce cas AB ou l'*ouverture* est double de la *flèche* ou *montée* FO. Lorsque la montée est moindre que la moitié de l'ouverture, la voûte est *surbaissée;* on peut alors employer l'*ellipse;* mais cette courbe est presque toujours remplacée par l'*anse de panier :* cette dernière courbe est facile à construire; la taille des voussoirs est simplifiée; un *même patron* sert pour ceux qui appartiennent aux deux petits arcs, et un *second* pour ceux du grand arc. L'*anse à 5 centres* n'exige que trois patrons, tandis que si l'on emploie l'ellipse, les normales se coupent deux à deux en des points différents, chaque voussoir de la moitié de la voûte exige un tracé particulier. Les *ponts biais* à plein-cintre ont des ellipses pour arcs de tête de l'intrados; c'est une conséquence forcée du choix de la section droite, et dans ce cas encore, certains appareilleurs, pour simplifier leur travail, prennent pour arc de tête une courbe à plusieurs centres; mais dans les bureaux des ingénieurs, les métrés se font d'après les dessins fournis, et tout se calcule comme pour une ellipse.



Le rapport $\frac{b}{2a}$ de la *montée* à l'*ouverture* détermine le genre de courbe qu'il convient d'employer : quand ce rapport est plus faible que $1/4$, on fait un *arc de cercle unique;* dans ce cas, le rapport peut descendre jusqu'à $1/10$. Pour une même élévation totale, l'arc de cercle donne un débouché beaucoup plus grand que le plein-cintre ou l'anse de panier; il a aussi plus de hardiesse, mais les voûtes exercent de plus fortes poussées latérales contre les supports extrêmes ou *culées.*

La section droite des *tunnels* est généralement elliptique; on lui substitue parfois l'*ovale*, courbe formée de deux anses de panier, ou l'anse à cinq centres qui s'éloigne le moins de la forme elliptique, et qui a pour grand rayon $\frac{a^2}{b}$, pour petit rayon $\frac{b^2}{a}$, et pour rayon moyen $\sqrt{ab}$.

Deux voûtes cylindriques ou *berceaux* dont les axes sont dans le même plan et qui ont même *montée*, se coupent suivant une ellipse, ce cas se présente dans les *voûtes d'arête* et dans celles en *arc de cloître.*

La *voûte elliptique* est souvent un *ellipsoïde allongé;* quelques voûtes ont pour section méridienne une *chaînette.*

613. La *chaînette* est la courbe plane que forme un fil flexible, inextensible et homogène, sous l'action de la pesanteur, lorsque ses extrémités sont fixées à deux points A et B qui n'appartiennent pas à une même verticale.

La courbe a un *axe* vertical et un *sommet* C.

La *chaînette* peut être employée avec avantage pour former un cintre d'une très-grande ouverture, ou qui a une charge considérable à soutenir. *Rondelet* s'en est servi avec succès pour les grands arcs qui supportent la colonnade circulaire du dôme du *Panthéon*, et pour la voûte placée entre les deux coupoles du même édifice : le *dôme* extérieur est un ellipsoïde allongé, la coupole intérieure est une *voûte sphérique* ouverte à la partie supérieure, et la voûte intermédiaire a pour section méridienne une *chaînette renversée;* la largeur ou diamètre a $21^{m}\,50$, et la hauteur $15^{m}\,27$; les magnifiques peintures de *Gros* décorent cette voûte.

Sous l'action de la pesanteur, les *hamacs* prennent une position d'équilibre qui se rapporte à la chaînette, lorsque le poids est également réparti sur les cordons de suspension.

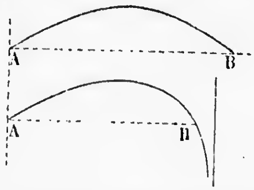
Entre deux poteaux consécutifs, les fils télégraphiques offrent un exemple de chaînette.

Les voiles tendues par le vent présentent une surface courbe; les auteurs ne sont point d'accord sur la forme des sections produites dans cette surface par des plans parallèles à la direction du vent; l'aspect de la courbe rappelle néanmoins celui de la chaînette.

614. L'hyperbole est rarement employée dans les constructions; cependant les *toitures coniques* coupées par un mur vertical donnent une hyperbole.

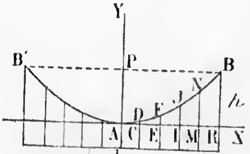
Applications de la parabole.

615. *Mouvement des projectiles.* Dans le vide, un projectile lancé sous une inclinaison quelconque décrirait une parabole; l'amplitude AB dépend de l'angle



d'inclinaison et de la force de projection. Dans l'air, la résistance du milieu traversé modifie la forme de la courbe; pour une même force de projection, l'amplitude est moindre, la trajectoire s'incline de plus en plus, et a une verticale pour asymptote.

616. *Ponts suspendus.* — Les câbles des ponts suspendus affectent la forme d'une parabole, ou, plus exactement, les câbles constituent une ligne brisée dont les sommets sont sur une parabole. Lorsque le pont n'a qu'une *travée,* les supports des câbles se terminent ordinairement au même niveau. Le *sommet* de la courbe est alors au milieu de la longueur $2l$; pour avoir la longueur des cordons de suspension, il faut calculer les ordonnées CD, EF, etc.



Or les droites DC, FE, h, qui projettent les points de la parabole sur la tangente au sommet, sont dans le même rapport que les carrés des distances de ces lignes au sommet (nº 551) : $\dfrac{DC}{h} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AR}^2}$

Mais $\dfrac{AC}{AR} = \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AR}^2} = \dfrac{1}{25}$; donc $\dfrac{DC}{h} = \dfrac{1}{25}$, d'où $DC = \dfrac{h}{25}$

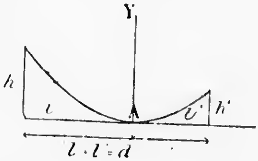
De même, puisque $AE = \frac{2}{5}\overline{AR}$, $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AR}^2} = \frac{4}{25}$, et $\frac{FE}{h} = \frac{4}{25}$; d'où $FE = \frac{4h}{25}$

Puis on trouve $IJ = \frac{9h}{25}$, $\overline{NM} = \frac{16h}{25}$

Aux ordonnées ainsi calculées, on ajoute la quantité constante AL, pour aller jusqu'au tablier du pont, en tenant compte de la courbure qu'on donne à ce tablier, en vue de l'exhausser au milieu L.

Lorsqu'il y a plusieurs travées, les supports intermédiaires sont plus élevés que les extrêmes; il faut déterminer la position du *sommet*, connaissant la longueur $(l + l')$ ou d, et les hauteurs h et h'.

Lorsque l'axe de la parabole est sur l'axe des y, l'équation s'écrit : $x^2 = 2py$. On a donc $l^2 = 2ph$, $l'^2 = 2ph'$. En divisant la première équation par la seconde, et extrayant la racine carrée, on trouve : $\frac{l}{l'} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h'}}$; d'ailleurs $l + l' = d$; donc $l = \frac{d\sqrt{h}}{\sqrt{h} + \sqrt{h'}}$, et



$l' = \frac{d\sqrt{h'}}{\sqrt{h} + \sqrt{h'}}$; multiplions les deux termes de chaque fraction par $\sqrt{h} - \sqrt{h'}$, nous aurons : $l = d\,\frac{\sqrt{h}\,(\sqrt{h} - \sqrt{h'})}{(\sqrt{h} + \sqrt{h'})(\sqrt{h} - \sqrt{h'})} = d \,.\, \frac{h - \sqrt{hh'}}{h - h'}$; de même $l' = d \,.\, \frac{\sqrt{hh'} - h'}{h - h'}$

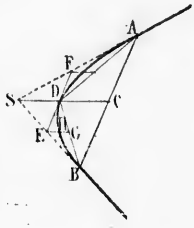
Sous cette dernière forme, le calcul de l et de l' se fait plus rapidement.

D'après les règlements administratifs, la flèche AP ou f ne doit pas dépasser le dixième de l'ouverture $2l$ ou d.

Dans tous les cas pratiques, la longueur totale du câble est donnée avec une approximation suffisante par la formule : Longueur $= d + \frac{2f^2}{3d}$ (*Annales des chemins vicinaux* 1859.)

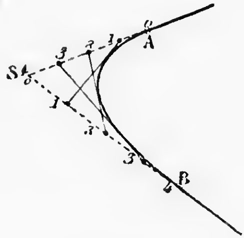
617. *Raccordement des routes, des canaux*, etc. Lorsque les parties rectilignes doivent être raccordées en des points également éloignés du *sommet* de l'angle qu'elles forment, la solution la plus simple, et la seule employée dans le tracé des chemins de fer, est de décrire un arc de cercle tangent aux deux droites, aux points où la voie doit cesser d'être rectiligne.

Pour le raccordement à tangentes inégales, on peut employer une parabole tangente aux droites à raccorder, aux points donnés A et B. Les ouvrages spéciaux indiquent les deux tracés suivants.



1er *procédé*. Menons AB et joignons S au milieu de AB; le point D milieu de SC appartient à la courbe (nº 560); la droite EF qui joint le milieu de SB à celui de SA est tangente. Joignons E au milieu de DB, le point H, milieu de EG, appartient aussi à la parabole, etc.

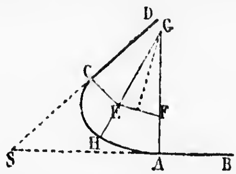
2e *procédé*. Divisons AS et SB en un même nombre de parties égales, 4 par exemple. Les droites obtenues en joignant les points de même cote sont des tangentes (n° 559), et



les intersections de ces tangentes donnent des points d'autant plus rapprochés que les divisions sont plus nombreuses.

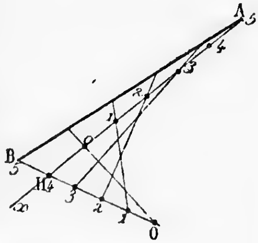
Remarque. — Ce dernier procédé ne donne que de médiocres résultats sur le terrain : pour avoir une certaine approximation, il faudrait multiplier les divisions, et alors les droites se couperaient sous des angles trop aigus. D'ailleurs le point de concours de deux droites jalonnées ne s'obtient qu'avec peu de précision. Aujourd'hui, on emploie rarement les raccordements paraboliques dans les travaux importants : la courbure varie d'un point à l'autre, le développement de la partie curviligne est assez long à calculer, etc.; aussi les chemins de fer n'admettent que les raccordements circulaires.

Raccordement à tangentes inégales, au moyen de deux arcs de cercle. Élevons des perpendiculaires aux points A et C; prenons à volonté le rayon CE; portons cette longueur de A jusqu'en F, la perpendiculaire élevée au milieu de EF fait connaître le centre G du grand arc.



618. *Tracé des courbes sur le terrain.* Pour les travaux importants, et notamment pour le tracé des chemins de fer, on construit les arcs de cercle au moyen des *ordonnées sur la corde*, et plus souvent encore au moyen des *ordonnées sur la tangente.* On prend des grandeurs égales AC, CD, etc., et on élève des perpendiculaires, sur lesquelles on porte des longueurs convenablement calculées. Des *tables numériques* ont été publiées, et permettent d'opérer rapidement. Pour la parabole, les ordonnées sur la tangente au sommet sont aussi calculées, mais il faut préalablement déterminer le sommet et le paramètre de la courbe.

619. *Au point de vue théorique,* les propriétés de la parabole (n° 559) permettent de diviser, sur le terrain, une droite en parties égales.

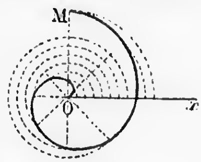


Soit à diviser en cinq parties égales une droite AB que l'on ne peut mesurer directement. Sur une ligne indéfinie Ax, à partir de A, portons six longueurs égales; joignons B au point H, et sur le prolongement prenons quatre segments égaux à BH; les droites qui joignent les points de même cote divisent AB en cinq parties égales. Car les points milieux C, D, etc., sont sur une parabole, tangente aux diverses droites (n° 559).

Spirale d'Archimède et développante.

620. *La spirale d'Archimède* est la courbe plane décrite par un point qui s'éloigne d'un point fixe O nommé pôle, de quantités proportionnelles aux angles que forme successivement la ligne qui le joint au point O, avec une droite fixe Ox passant par le pôle.

Autrement : La *spirale d'Archimède* est la courbe plane décrite par un point qui se meut d'un mouvement uniforme sur une droite, pendant que celle-ci tourne uniformément autour d'un de ses points regardé comme fixe.

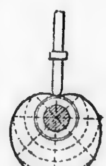


Le point *générateur* tourne indéfiniment autour du pôle, la partie de la courbe qui correspond à une variation angulaire de 4 droits se nomme *spire.*

On appelle *rayon vecteur* la droite qui joint le pôle à un point quelconque de la courbe. Entre deux spires consécutives, la distance mesurée sur le rayon vecteur est constante et se nomme *pas de la spirale.*

Pour construire la *spirale* par points connaissant le *pas*, on divise l'espace plan compris autour du pôle en un certain nombre d'angles égaux, 8 par exemple; du pôle comme centre, avec le $^1/_8$ du pas on décrit un arc jusqu'au second côté du 1er angle; puis avec le rayon $^2/_8$, un autre arc jusqu'au second côté du 2e angle, etc.; les points ainsi déterminés appartiennent à la courbe.

Le ressort moteur d'une montre offre une certaine analogie de forme avec la spirale d'Archimède; le ressort qui fait osciller le balancier, et qu'on nomme *spiral,* présente avec cette courbe une ressemblance encore plus grande.

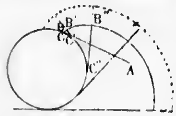


L'*excentrique en cœur,* employé pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif et uniforme, est composé de deux parties de spirale d'Archimède.

Les *volutes ioniques,* dont chaque spire a 4 centres, ont la forme d'une spirale; en réalité elles se rapportent à la *développante,* le cercle ou la *développée* étant remplacé par un carré.

621. La *développante de cercle* est la courbe engendrée par un point B qui reste fixe sur une tangente BA dont le point de contact change continuellement, de manière que la distance du point fixe au point de contact soit constamment égale à l'espace parcouru par le point de contact sur la courbe, ainsi $C'B' = C'C$; $C''B'' = C''C$, etc.

La développante peut être considérée comme engendrée par l'extrémité d'un fil inextensible, enroulé sur la circonférence, lorsqu'on développe ce fil en le tenant constamment tendu; deux points donnés du fil décrivent des courbes parallèles.

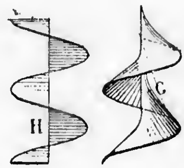


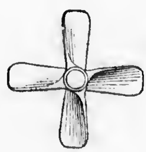
Quelques *ventilateurs* ont des ailes courbes à développante de cercle; il en est de même des *tympans* pour élever l'eau; les développantes sont parallèles, et par suite, l'eau prise à la circonférence est déversée à l'axe après avoir suivi un canal à *section constante*. Sauf ce dernier exemple, on peut dire que les courbes employées dans les *turbines*, dans la *roue Poncelet*, dans la *pompe centrifuge*, etc., ne se rapportent rigoureusement à aucune des courbes étudiées précédemment.

Hélices et hélicoïdes *.

622. L'*hélice* se rencontre fréquemment dans les arts.

On appelle *hélicoïde* la surface engendrée par une droite qui glisse le long d'une hélice en gardant une inclinaison constante, et restant tangente à un cylindre qui a même axe que l'hélice; parfois le cylindre se réduit à l'axe.





L'*hélicoïde développable* a pour génératrices les tangentes à l'hélice directrice.

Parmi les hélicoïdes non développables, nous considérerons les deux suivantes :

1° L'*hélicoïde gauche* G engendré par une droite qui rencontre l'axe sous un angle constant; on voit cette surface dans la vis à *filet triangulaire*.

2° L'*hélicoïde* H engendré par une droite qui rencontre l'axe à angle droit; cet hélicoïde est *normal* au cylindre de l'hélice directrice; on le voit dans la vis à *filet carré*, dans le *limon* des escaliers circulaires, dans la *vis d'Archimède*.

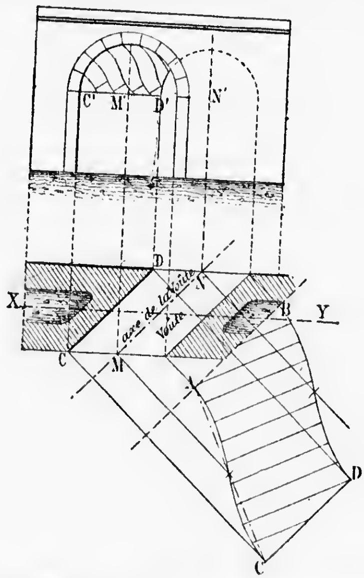
Les *propulseurs hélicoïdes* sont très-employés depuis quelques années, et beau-

* Quelques auteurs ont écrit *héliçoïde*; mais le mot *hélicoïde*, d'ailleurs plus conforme à l'étymologie, prévaut de plus en plus.

coup de bateaux à vapeur sont pourvus d'une *hélice propulsive*. Le premier appareil utilisé comprenait une spire complète d'héliçoïde ; aujourd'hui le propulseur est composé de plusieurs parties d'héliçoïdes ; ces parties nommées *ailettes* sont au nombre de deux ou de quatre, et rapprochées, afin de diminuer la longueur de l'appareil dans le sens de l'axe.

623. *Pont biais*. Lorsque l'axe MN de la voûte coupe obliquement les plans de tête, le pont est *biais*; le système qui prédomine pour la construction de ces travaux est l'*appareil hélicoïdal*.

Soit ABCD le développement de la douelle (nº 612) ; les lignes de joint sont



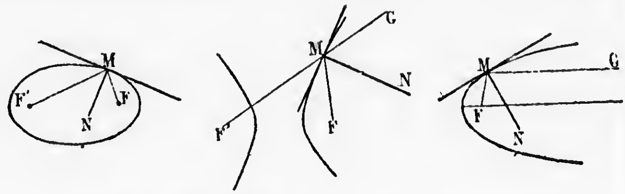
perpendiculaires à la corde AC ; on a donc des hélices à l'intrados, les surfaces de *joint* sont des héliçoïdes ayant ces *hélices* et l'axe de la voûte pour directrices ; les voussoirs des arcs de tête sont en pierre de taille, le reste de la voûte est en briques ; c'est même l'emploi habituel de ces derniers matériaux qui a conduit les constructeurs à imaginer l'*appareil hélicoïdal*.

Réflexion de la lumière, etc.

624. Dans la réflexion de la lumière, de la chaleur, du son, la normale est bissectrice de l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi. D'après cela, un point lumineux placé au foyer F d'une ellipse, émet des rayons qui, après la réflexion, viennent converger à l'autre foyer F', car les rayons MF et MF' font des angles égaux avec la normale (nº 494).

Lorsque le point lumineux est placé au foyer d'une hyperbole, les rayons réfléchis sont *divergents*, les prolongements des rayons vont concourir en F′, et ce point est un *foyer virtuel*.

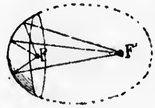
Dans la parabole, si le point lumineux est au foyer, les rayons réfléchis sont



parallèles à l'axe; et réciproquement, si les rayons incidents sont parallèles à l'axe, les rayons réfléchis concourent au foyer.

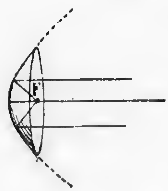
C'est la convergence des rayons réfléchis qui a fait donner le nom de *foyers* aux points F et F′ des sections coniques.

Au lieu des courbes planes dont nous venons de parler, on emploie l'ellipsoïde allongé (n° 576), l'hyperboloïde à deux nappes (n° 577), et le paraboloïde (n° 578). Pour ces trois corps, la propriété des foyers subsiste, puisque ces points, situés sur l'axe de rotation, se trouvent les foyers de toutes les sections méridiennes, et que ces sections sont, ou une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole.



Le *miroir elliptique* consiste essentiellement dans la surface concave d'un segment d'ellipsoïde creux. Ce segment est déterminé par un plan perpendiculaire au grand axe.

Les anciens réverbères de nos villes utilisaient des *réflecteurs hyperboliques;* chaque nappe de l'hyperboloïde de révolution autour de l'*axe transverse* était coupée par un plan mené par le foyer, perpendiculairement à l'axe; on plaçait la lampe au foyer commun des 2 troncs d'hyperboloïde, et les rayons lumineux étaient divergents après la réflexion.



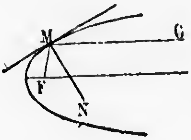
Le paraboloïde a d'assez nombreuses applications : les *cornets acoustiques* ont parfois la forme du segment à deux bases, mais le *réflecteur parabolique* et le *miroir parabolique* ont la forme du segment à une base.

Le corps lumineux placé au foyer donne par réflexion un faisceau de rayons parallèles : les réflecteurs paraboliques sont employés sur les locomotives; ils l'étaient jadis dans les phares, mais depuis les travaux de *Fresnel* ils sont remplacés par des lentilles à échelons.

Le *miroir parabolique*, formé comme le réflecteur, a pour but de concentrer au foyer les rayons parallèles à l'axe; il est employé dans le télescope de *Foucault*.

FIN

vont concourir en F', et
les rayons réfléchis sont



cidents sont parallèles à
lonner le nom de *foyers*
r, on emploie l'ellipsoïde
577), et le paraboloïde
ers subsiste, puisque ces
n, se trouvent les foyers
nes, et que ces sections
erbole, ou une parabole.
essentiellement dans la
d'ellipsoïde creux. Ce
plan perpendiculaire au
villes utilisaient des *ré-*
de révolution autour de
e foyer, perpendiculaire-
2 troncs d'hyperboloïde,
lon.
nombreuses applications :
parfois la forme du seg-
e *réflecteur parabolique*
t la forme du segment à
au foyer donne par ré-
ns parallèles : les réflec-
oyés sur les locomotives;
arcs, mais depuis les tra-
mplacés par des lentilles
rmé comme le réflecteur,
s à l'axe; il est employé

PRINCIPALES FORMULES

DE LA GÉOMÉTRIE PLANE

Somme des angles d'un triangle. . . . . . $A+B+C=2$ droits ou 180°
Somme des angles d'un polygone. . . . . $2\text{ dr.}(n-2)$
Angle intérieur d'un polygone régulier. . . . . $\dfrac{2\text{ dr.}(n-2)}{n}$
Angle au centre d'un polygone régulier . . . . $\dfrac{4\text{ dr.}}{n}$
Bissectrice d'un angle d'un triangle. . . . . $\dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{c}$
Le nombre π . . . . $\pi=\dfrac{\text{circonf.}}{\text{diamètre}}=\dfrac{\text{demi-circonf.}}{\text{rayon}}=3{,}141\ 592$
Carré d'une somme ou d'une différence . . . . . $(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$
Produit d'une somme par une différence. . . . $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
Triangle rectangle, hauteur. . . . . $d=mn$
Triangle rectangle, côtés. . . . . $a^2=b^2+c^2$
Triangle quelconque, côtés. . . . . $a^2=b^2+c^2\pm 2bn$
Médiane d'un triangle. . . . . $a^2+b^2=2d^2+2m^2$
Bissectrice d'un triangle. . . . . $ab=d^2+mn$
Hauteur d'un triangle, cercle circonscrit. . . . . $ab=2rh$
Cordes qui se croisent. . . . . $sr=mn$
Sécantes qui partent d'un même point . . . . $se=s'e'$
Perpendiculaires à un diamètre. . . . . $d^2=mn$
La tangente et la sécante. . . . . $t^2=se$
Moyenne et extrême raison. . . . . $\dfrac{a}{m}=\dfrac{m}{n}\dots m^2=an$
Moyenne et extrême raison, grand segment. . . $m=\dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=a(0{,}618)$
Côté du carré inscrit . . . . $c=r\sqrt{2}=r(1{,}414)$
Côté du triangle équilatéral inscrit. . . . . $c=r\sqrt{3}=r(1{,}732)$
Côté du décagone régulier inscrit. . . . . . . $c=\dfrac{r}{2}(\sqrt{5}=1)=r(0{,}618)$
Hauteur du triangle équilatéral, côté a. . . . . . . $h=\dfrac{a}{2}\sqrt{3}=a(0{,}866)$
Surface du carré, côté a. . . . . $S=a^2$
« du rectangle, du parallélogramme. . . . . $S=bh$
« du triangle. . . . . $S=\frac{1}{2}bh$

Surface du trapèze. . . . . $S = h\frac{b+b'}{2} = hb''$

« d'un polygone régulier ou circonscrit. . . . . $S = {}^1/_2 ap$

« du cercle. . . . . $S = {}^1/_2 \text{cir.} \times \text{rayon}... = \pi r^2$

Surface d'un secteur. . . . . ${}^1/_2 \text{arc} \times \text{rayon}$

Figures semblables. . . . . $\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2}$

Aire d'un triangle en fonction des 3 côtés. . $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Projection m' d'une ligne m. . . . . $m' = m.\text{cosin.} A$

PRINCIPALES FORMULES

DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Les faces d'un trièdre. . . . . $a < b + c$

« « . . . . $a > b - c$

Angle solide convexe somme des faces. . . . . < 4 droits

Trièdres supplémentaires. . . . . $\begin{cases} A + a' = 2 \text{ droits} \\ B + b' = 2 \text{ droits} \\ C + c' = 2 \text{ droits} \end{cases}$

Trièdre quelconque : somme des angles. . . . . $\begin{cases} > 2 \text{ droits} \\ < 6 \text{ droits} \end{cases}$

Projection M' d'une figure plane M sur un plan. . . . . . $M' = M \cos. A$

Prisme : surface latérale. . . . . $S = ap$

Parallélipipède, volume. . . . . $V = abc$

Cube, volume . . . . $V = a^3$

Prisme, volume. $V = Bh$

« « . . . . $=$ arete latérale $\times$ section droite

Tronc de prisme triangulaire. . . . . $V = B.\frac{m+n+p}{3}$

Cylindre circulaire droit : surface latérale. . . . . $2\pi rh$

« « « surface totale . . . . $2\pi r(h+r)$

« « « volume . . . . $\pi r^2 h$

Tronc de cylindre circulaire droit : surface latérale. . . . . $=$ circ. $\times$ axe

« « « volume . . . . $=$ base $\times$ axe

Pyramide régulière : surface latérale . . . . $S = {}^1/_2 pl$

« quelconque : volume. . . . . $= {}^1/_3 Bh$

Tronc de pyramide à bases parallèles : surface. . . . . $S = l\frac{p+p'}{2}$

« « « « volume. . . ${}^1/_3 h(B + B' + \sqrt{BB'})$

Cône circulaire droit : surface latérale. . . . . $= \pi rl$

« « « surface totale. . . . . $= \pi r(l+r)$

« « « volume . . . . $= {}^1/_3 \pi r^2 h$

Cône quelconque : volume. . . . . $=\,^1/_3\,Bh$

Tronc de cône à bases parallèles : volume. . . . $=\,^1/_3\,h\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)$

Tronc de cône circulaire à bases parallèles : volume. . . $^1/_3\,\pi h\,(R^2+r^2+Rr)$

« « « « « surface latérale. . $=\pi l\,(R+r)$ ou $2\pi r'l$

« « « « « « . . . . $2\pi r''h$

Ligne polygonale régulière, h étant la projection sur l'axe et a l'apothème : surface engendrée. $2\pi ah$

Secteur polygonal régulier : volume engendré. . . . . $^2/_3\,\pi a^2h$

Zone : surface. . . . . $2\pi rh$

Sphère : surface. . . . . $4\pi r^2$

« volume. . . . . $^4/_3\,\pi r^3$ ou $^1/_6\,\pi d^3$

Secteur sphérique : volume. . . . . $=$ zone $\times\,^1/_3\,r=\,^2/_3\,\pi r^2h$

Segment sphérique à une base : volume . . . . $=\,^1/_6\,\pi h^3+\,^1/_2\,Bh$

« « à deux bases : volume. . . . . . $=\,^1/_6\,\pi h^3+h\,\dfrac{(B+B')}{2}$

Solide circonscrit à une sphère : volume. . . . . $=$ surface $\times\,^1/_3\,r$

FORMULES DU VIII^e LIVRE

Aire de l'ellipse. . . . . πab

Equation de l'ellipse . . . . $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

« de l'hyperbole . . . . $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

« de la parabole. . . . . $y^2=2px$

Segment parabolique : volume . . . . $=\,^2/_3\,MN\times AP$

FORMULES DE L'APPENDICE

Segment de paraboloïde à une base : volume. . . . . $\dfrac{\pi R^2h}{2}$

« « à deux bases : volume. . . . . $\dfrac{\pi h}{2}\,(R^2+r^2)$

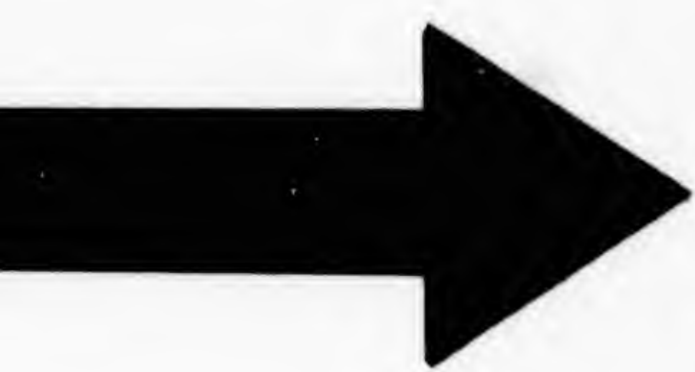
Ellipsoïde allongé : volume . . . . $^4/_3\,\pi ab^2$

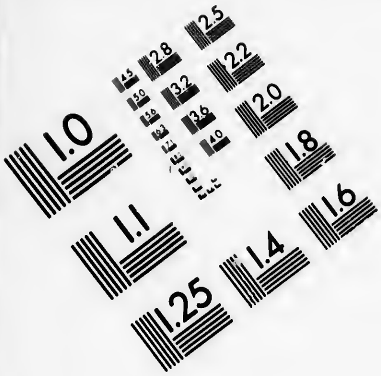
« aplati : volume. . . . . $^4/_3\,\pi a^2b$

Segment à deux bases de l'hyperboloïde à une nappe : volume. $\pi h\,2R^2+R'^2$

« à une base de l'hyperboloïde à deux nappes : volume. $\dfrac{\pi hR^2}{2}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{\pi h^3}{6}$

« « de l'ellipsoïde : volume. . . . . . $\pi h\cdot\dfrac{b^2}{a^2}\left(ah-\dfrac{h^2}{3}\right)$





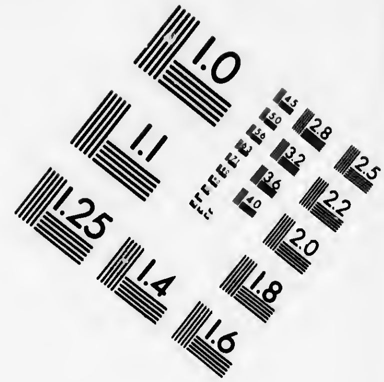
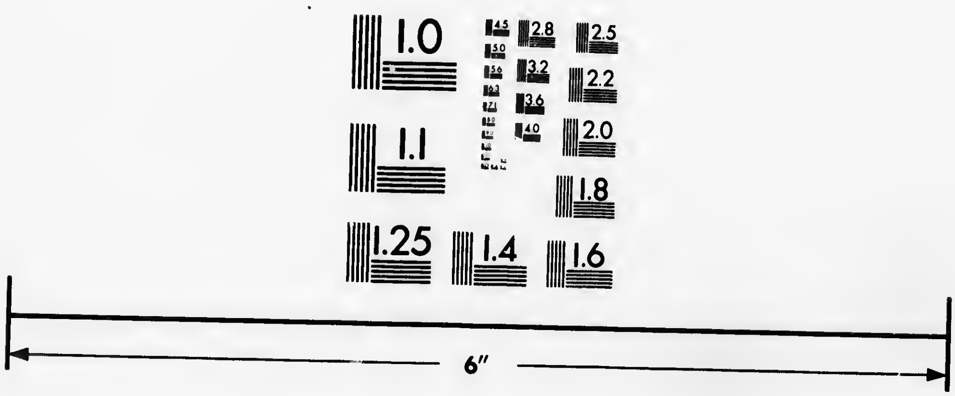
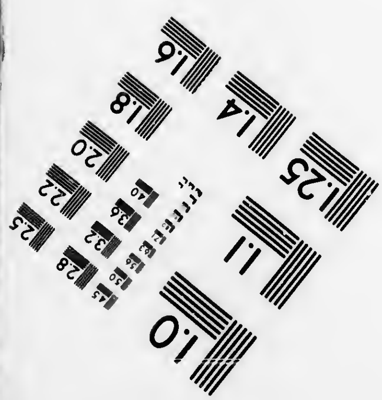
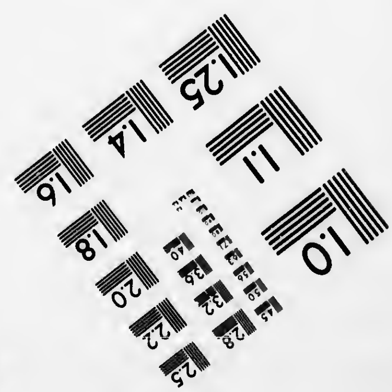


IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)








2.8
2.5
3.2
2.2
2.0
1.8
1.6


1.1
1.0

Théorèmes de Guldin : surface de révolution . . . . $p.2\pi d$

« « , volume de révolution . . . Surface génératrice $\times 2\pi d$

Tronc cylindrique droit : volume. . . . . base $\times d$

Formule Simpson . . . . $S=\frac{d}{3}(E+2I+4P)$

« Poncelet. . . . . $S=d\left(2P+\frac{E}{4}=\frac{E'}{4}\right)$

Formule Poncelet modifiée . . . . $S=d\left(2P+\frac{E}{6}-\frac{E'}{6}\right)$

Formule simple de Simpson pour les volumes. . . . $V=\frac{h}{6}(B+B'+4S)$

Volume des tonneaux, formule des troncs de cône. . . $\frac{\pi l}{12}(D^2+d^2+Dd)$

« « formule d'Oughtred. . . . . $\frac{\pi l}{12}(2D^2+d^2)$

« « *troncs paraboliques*. . . . . $\frac{\pi l}{8}(D^2+d^2)$

« « formule de l'an VII . . . . $\frac{\pi l}{36}(d+2D)^2$

« « formule de Vasselon . . . . $\frac{\pi l}{4}[d+0{,}56(D-d)]^2$

« « formule de Dez. . . . . $\frac{\pi l}{256}(5D+3d)^2$

Tonneau en vidange. . . . . $V'=1{,}767\,lh^2$

Foudre à fonds concaves. . . . . $V=0{,}1309[l(4D^2-d^2)+3l'd^2]$

Bois en grume. . . . . $V=0{,}079\,58\,C^2l$

« « pièce d'équarrissage . . . . $V=\frac{d^2l}{2}$

. . . . $p.2\pi d$

. Surface génératrice $\times 2\pi d$

. . . . base $\times d$

. . . $S=\frac{d}{3}(E+2I+4P)$

. . $S=d\left(2P+\frac{E}{4}=\frac{E'}{4}\right)$

. . $S=d\left(2P+\frac{E}{6}-\frac{E'}{6}\right)$

. $V=\frac{h}{6}(B+B'+4S)$

. . $\frac{\pi l}{12}(D^2+d^2+Dd)$

. . . . . $\frac{\pi l}{12}(2D^2+d^2)$

. . . . . $\frac{\pi l}{8}(D^2+d^2)$

. . . . . $\frac{\pi l}{36}(d+2D)^2$

. $\frac{\pi l}{4}[d+0{,}56(D-d)]^2$

. . . . . $\frac{\pi l}{256}(5D+3d)^2$

. . . . $V'=1{,}767\ lh^2$

$0{,}1309[l(4D^2-d^2)+3l'd^2]$

. . . $V=0{,}079\ 58\ C^2l$

. . . . $V=\frac{d^2l}{2}$

TABLE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

De 0 à 45 degrés, lisez les degrés de ce côté

Angles	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
0°	0.000	0.000	∞	1.000	90°
1	0.017	0.017	57.290	1.000	89
2	0.035	0.035	28.636	0.999	88
3	0.052	0.052	19.081	0.999	87
4	0.070	0.070	14.301	0.998	86
5	0.087	0.087	11.430	0.996	85
6	0.105	0.105	9.514	0.995	84
7	0.122	0.123	8.144	0.993	83
8	0.139	0.141	7.115	0.990	82
9	0.156	0.158	6.314	0.988	81
10°	0.174	0.176	5.671	0.985	80°
11	0.191	0.194	5.145	0.982	79
12	0.208	0.213	4.705	0.978	78
13	0.225	0.231	4.331	0.974	77
14	0.242	0.249	4.011	0.970	76
15	0.259	0.268	3.732	0.966	75
16	0.276	0.287	3.487	0.961	74
17	0.292	0.306	3.271	0.956	73
18	0.309	0.325	3.078	0.951	72
19	0.326	0.344	2.904	0.946	71
20°	0.342	0.364	2.747	0.940	70°
21	0.358	0.384	2.605	0.934	69
22	0.375	0.404	2.475	0.927	68
23	0.391	0.424	2.356	0.921	67
24	0.407	0.445	2.246	0.914	66
25	0.423	0.466	2.145	0.906	65
26	0.438	0.488	2.050	0.899	64
27	0.454	0.510	1.963	0.891	63
28	0.469	0.532	1.881	0.883	62
29	0.485	0.554	1.804	0.875	61
30°	0.500	0.577	1.732	0.866	60°
31	0.515	0.601	1.664	0.857	59
32	0.530	0.625	1.600	0.848	58
33	0.545	0.649	1.540	0.839	57
34	0.559	0.675	1.483	0.829	56
35	0.574	0.700	1.428	0.819	55
36	0.588	0.727	1.376	0.809	54
37	0.602	0.754	1.327	0.799	53
38	0.616	0.781	1.280	0.788	52
39	0.629	0.810	1.235	0.777	51
40°	0.643	0.839	1.192	0.766	50°
41	0.656	0.869	1.150	0.755	49
42	0.669	0.900	1.111	0.743	48
43	0.682	0.933	1.072	0.731	47
44	0.695	0.966	1.036	0.719	46
45°	0.707	1.000	1.000	0.707	45°
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Angles

De 45 à 90 degrés, lisez les degrés de ce côté, avec les titres du bas.

3409. — Tours, impr. Mame.

me.