Technical and Bibliographic Notes / Notes technique et bibliographiques

The Institute has attempted to obtain the best original copy available for filming. Features of this copy which may be bibliographically unique, which may alter any of the images in the reproduction, or which may significantly change the usual method of filming are checked below.

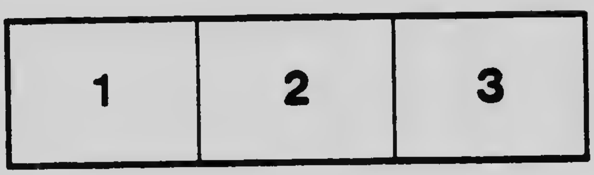
- [x] Coloured covers / Couverture de couleur
- [ ] Covers damaged / Couverture endommagée
- [ ] Covers restored and/or laminated / Couverture restaurée et/ou pelliculée
- [ ] Cover title missing / Le titre de couverture manque
- [ ] Coloured maps / Cartes géographiques en couleur
- [ ] Coloured ink (i.e. other than blue or black) / Encre de couleur (i.e. autre que bleue ou noire)
- [ ] Coloured plates and/or illustrations / Planches et/ou illustrations en couleur
- [ ] Bound with other material / Relié avec d'autres documents
- [ ] Only edition available / Seule édition disponible
- [ ] Tight binding may cause shadows or distortion along interior margin / La reliure serrée peut causer de l'ombre ou de la distorsion le long de la marge intérieure.
- [ ] Blank leaves added during restorations may appear within the text. Whenever possible, these have been omitted from filming / Il se peut que certaines pages blanches ajoutées lors d'une restauration apparaissent dans le texte, mais, lorsque cela était possible, ces pages n'ont pas été filmées.
- [ ] Additional comments / Commentaires supplémentaires:

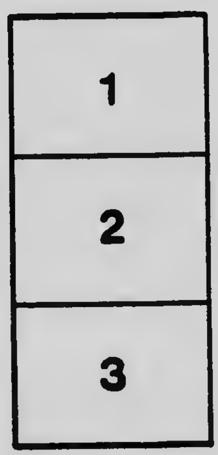
L'Institut a microfilmé le meilleur examplaire qu'il lui a été possible de se procurer. Les détails de cet exemplaire qui sont peut-être uniques du point de vue bibliographique, qui peuvent modifier une image reproduite, ou qui peuvent exiger une modifications dans la méthode normale de filmage sont indiqués ci-dessous.

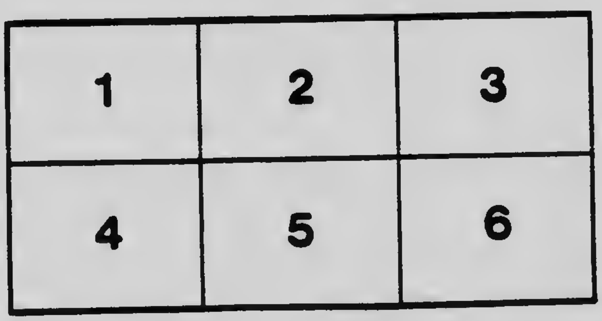
- [ ] Coloured pages / Pages de couleur
- [ ] Pages damaged / Pages endommagées
- [ ] Pages restored and/or laminated / Pages restaurées et/ou pelliculées
- [x] Pages discoloured, stained or foxed / Pages décolorées, tachetées ou piquées
- [ ] Pages detached / Pages détachées
- [x] Showthrough / Transparence
- [ ] Quality of print varies / Qualité inégale de l'impression
- [ ] Includes supplementary material / Comprend du matériel supplémentaire
- [ ] Pages wholly or partially obscured by errata slips, tissues, etc., have been refilmed to ensure the best possible image / Les pages totalement ou partiellement obscurcies par un feuillet d'errata, une pelure, etc., ont été filmées à nouveau de façon à obtenir la meilleure image possible.
- [ ] Opposing pages with varying colouration or discolourations are filmed twice to ensure the best possible image / Les pages s'opposant ayant des colorations variables ou des décolorations sont filmées deux fois afin d'obtenir la meilleur image possible.

This item is filmed at the reduction ratio checked below/
Ce document est filmé au taux de réduction indiqué ci-dessous.

10X	12X	14X	16X	18X	20X	22X	24X	26X	28X	30X	32X
				✓							

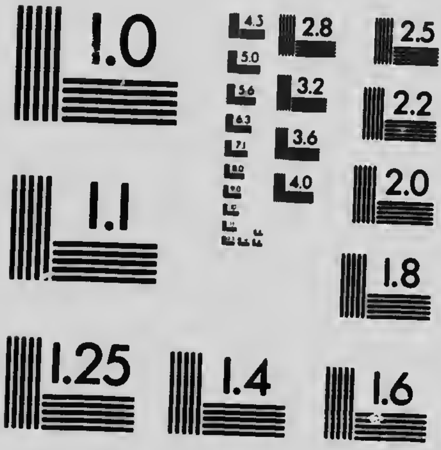

1
2
3


1
2
3


1
2
3
4
5
6

MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART

(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)



APPLIED IMAGE Inc
1653 East Main Street
Rochester, New York 14609 USA
(716) 482 - 0300 - Phone
(716) 288 - 5989 - Fax

NOTIONS DE

TRIGONOMETRIE PRATIQUE

AVEC 368 EXERCICES GRADUES

PAR

LES FRERES DE L'INSTRUCTION CHRETIENNE

PRIX : 30 sous.

LAPRAIRIE

PROCURE DES FRÈRES DE L'INSTRUCTION CHRÉTIENNE

1918

NOTIONS DE
TRIGONOMETRIE
PRATIQUE

AVEC 368 EXERCICES GRADUES

PAR

LES FRERES DE L'INSTRUCTION CHRETIENNE

LAPRAIRIE

Procure des Frères de l'Instruc.ion Chrétienne.

1918

Enregistré, conformément à la loi du Parlement du Canada, l'an mil neuf cent dix-huit par les Frères l'Instruction Chrétienne, au bureau du Ministre de l'Agriculture.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE PREMIER : Lignes trigonométriques en général.

CHAPITRE II : Résolution des triangles.

CHAPITRE III : **Addition, soustraction, multiplication et division des arcs.**

Résolution des triangles. — Applications.

NOTIONS DE TRIGONOMETRIE PRATIQUE

CHAPITRE PREMIER

LIGNES TRIGONOMETRIQUES EN GENERAL

LIGNES TRIGONOMETRIQUES CONSIDEREES DANS LE CERCLE

Définitions.

1. Objet de la trigonométrie. — La trigonométrie est une science qui a pour objet la résolution des triangles par le calcul. Résoudre un triangle, c'est en déterminer les parties inconnues, angles, côtés, surface, à l'aide des parties données.

2. Mesure d'un angle. — Un angle a pour mesure l'arc de cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre avec un rayon quelconque (*Eléments de Géométrie,* N° 132). En trigonométrie, on emploie indifféremment les mots *arc* et *angle.*

3. Lignes trigonométriques. — Il est difficile d'établir les relations qui existent entre les côtés d'un triangle et les arcs qui en mesurent les angles; aussi remplace-t-on dans les calculs la valeur des arcs par celle de certaines lignes qui en dépendent et dont la longueur varie avec la grandeur de ces arcs. Les arcs étant connus, ces lignes le sont aussi et réciproquement. Elles prennent le nom de *lignes trigonométriques.* (1)

Ces lignes trigonométriques sont au nombre de six : le *sinus*, la *tangente*, la *sécante*, le *cosinus*, la *cotangente*, la *cosécante*.

4. Définitions des lignes trigonométriques. — Soit un angle quelconque AOP. Avec un rayon égal à l'*unité linéaire*, décrivons du sommet O comme centre, un cercle $AB'A'B$. L'arc AP que nous appellerons a est la mesure de l'angle AOP.

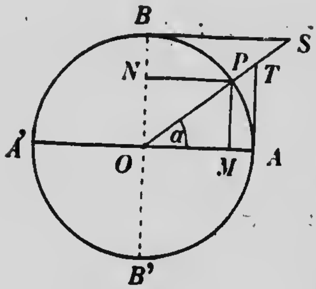


Fig. 1.

Dans la figure ci-contre, les lignes, PM, AT, sont menées perpendiculairement au diamètre AA'; BS et PN, perpendiculairement au diamètre BB'.

I. — Le *sinus* d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre passant par l'origine de cet arc.

On a $$\sin a = PM.$$

II. — La *tangente* est la droite menée tangentiellement à l'arc depuis son origine jusqu'au prolongement du rayon passant par l'extrémité de cet arc.

On a $$\text{tg } a = AT.$$

III. — La *sécante* est la droite qui va du centre à l'extrémité de la tangente.

On a $$\text{séc } a = OT.$$

(1) On les appelle encore *fonctions trigonométriques* ou *fonctions circulaires*, parce que leur valeur étant liée à celle de l'arc considéré, elles sont *fonctions* de cet arc.

IV. — Le *cosinus* d'un arc est la partie du rayon comprise entre le centre du cercle et le pied du sinus.

On a $\cos a = OM = NP.$

Le cosinus de l'arc AP est OM et le sinus de l'arc BP est NP. Comme $OM = NP$, il s'ensuit que *le cosinus d'un arc est égal au sinus de son complément.*

V. — La *cotangente* est la droite menée tangentiellement à l'arc depuis l'origine de son complément jusqu'à la rencontre du prolongement du rayon passant par l'extrémité de l'arc. La cotangente d'un arc est la tangente de son complément.

On a $\text{cotg } a = BS.$

VI. — La *cosécante* est la droite qui va du centre à l'extrémité de la cotangente. La cosécante d'un arc est la sécante de son complément.

On a $\text{cosec } a = OS.$

5. Remarque I. — Si l'on désigne l'arc AP par a et son complément BP par b, on a donc

$$\begin{aligned} \sin a &= PM = ON = \cos b; \\ \sin b &= PN = OM = \cos a; \\ \text{tg } a &= AT = \text{cotg } b; \\ \text{tg } b &= BS = \text{cotg } a; \\ \text{séc } a &= OT = \text{coséc } b; \\ \text{séc } b &= OS = \text{coséc } a. \end{aligned}$$

Si l'arc $a = 35°$, son complément $b = 90° - 35° = 55°$, et

$$\begin{aligned} \sin 35° &= \cos 55°; & \sin 55° &= \cos 35°; \\ \text{tg } 35° &= \text{cotg } 55°; & \text{tg } 55° &= \text{cotg } 35°; \\ \text{séc } 35° &= \text{coséc } 55°; & \text{séc } 55° &= \text{coséc } 35°. \end{aligned}$$

Le *cosinus*, la *cotangente* et la *cosécante* d'un arc n'étant que le *sinus*, la *tangente* et la *sécante* du complément de cet arc sont appelés pour cette raison *fonctions complémentaires.*

6. Remarque II. — Dans la figure 1, on a sin $a = PM$. Comme $R = 1$, on peut écrire sin $a = \frac{PM}{R}$ et la valeur numérique de PM exprime la vraie valeur du rapport $\frac{PM}{R}$. Le sinus peut donc être considéré comme un *rapport;* il en est ainsi des autres lignes trigonométriques, et l'on a les relations suivantes :

$$\sin a = \frac{PM}{R}; \qquad \cos a = \frac{OM}{R};$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{AT}{R}; \qquad \operatorname{cotg} a = \frac{BS}{R};$$

$$\text{séc}\, a = \frac{OT}{R}; \qquad \text{cosec}\, a = \frac{OS}{R}.$$

On a supposé le rayon égal à l'*unité linéaire,* mais il peut avoir n'importe quelle valeur positive. Aussi les fonctions trigonométriques sont-elles beaucoup mieux exprimées par les rapports des lignes au rayon que par les lignes elles-mêmes.

Ces rapports ne varient pas pour le même angle; ils sont indépendants du rayon du cercle considéré. Il est facile de s'en rendre compte.

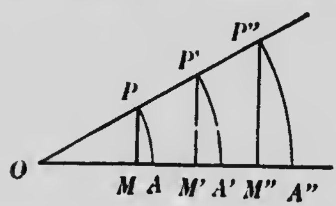


Fig. 2.

Soit un angle O mesuré par l'arc AP décrit avec le rayon $OP = OA = 1$, ou par tout autre arc $A'P'$, $A''P''$, décrit avec un rayon quelconque OP', OP''.

Abaissons les perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$ sur le côté OA'' de l'angle.

Les triangles semblables OPM, $OP'M'$, $OP''M''$ (*Eléments de Géom.*, N° 167) permettent d'écrire :

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{P''M''}{OP''}$$

ou $$\frac{PM}{R} = \frac{P'M'}{R'} = \frac{P''M''}{R''}.$$

Mais $\sin a = \dfrac{PM}{R}$.

Donc $\sin a = \dfrac{P'M'}{R'} = \dfrac{P''M''}{R''}$.

La démonstration serait la même pour les autres lignes trigonométriques. (Voir N° 21.)

On peut donc définir les lignes trigonométriques de la manière suivante :

1° Le **sinus** est le *rapport au rayon* de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre passant par l'origine de cet arc.

2° La **tangente** est le *rapport au rayon* de la droite menée tangentiellement à l'arc depuis son origine jusqu'au prolongement du rayon passant par l'extrémité de cet arc.

3° La **secante** est le *rapport au rayon* de la droite qui va du centre à l'extrémité de la tangente.

Les définitions des trois fonctions complémentaires se déduisent des précédentes.

7. Remarque III. — L'adoption du rayon 1 pour le cercle trigonométrique a permis de simplifier les formules; il n'est pas nécessaire d'y faire entrer le symbole R.

Ainsi, on a dans le cercle trigonométrique :

Circonférence ou arc de 360° $= 2\pi$;
Demi-circonférence ou arc de 180° $= \pi$;
Quadrant ou arc de 90° $= \dfrac{\pi}{2}$;

Arc de 60° $= \dfrac{\pi}{3}$;

Arc de 45° $= \dfrac{\pi}{4}$;

Arc de 30° $= \dfrac{\pi}{6}$.

On peut écrire de même :

$$\sin 3° = \sin \frac{\pi}{60}, \quad \cos 42° = \frac{14\pi}{60}, \text{ etc.}$$

Signes des lignes trigonométriques.

Les signes des lignes trigonométriques dépendent de la grandeur de l'angle. Les angles d'un triangle étant toujours moindres que deux droits, il suffit, dans les applications des formules à la résolution des triangles, de considérer la variation de ces lignes pour un angle ou un arc allant de 0° à 180°.

8. Lignes positives, lignes négatives. — Si l'on détermine un point sur une ligne quelconque, droite ou courbe, on convient généralement de considérer comme *positives* toutes les distances comptées dans un sens à partir de ce point, et comme *négatives*, celles qui sont comptées en sens contraire.

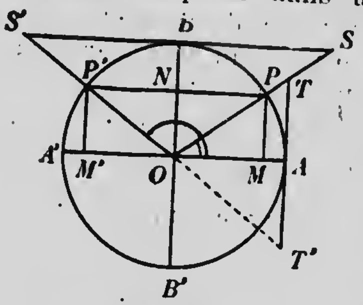


Fig. 3.

9. Sens positif et sens négatif par rapport aux diamètres du cercle trigonométrique. — Décrivons une circonférence avec un rayon égal à 1, et menons les diamètres rectangulaires AA' et BB'.

Nous admettons que :

1° Les lignes perpendiculaires à AA' sont *positives* au-dessus de ce diamètre et *négatives* au-dessous. C'est le cas du sinus et de la tangente.

2° Les lignes perpendiculaires à BB' sont *positives* à droite de ce diamètre et *négatives* à gauche. C'est le cas du cosinus et et de la cotangente.

3° La sécante et la cosécante qui ne suivent pas les directions rectangulaires AA', BB', sont *positives* quand elles passent par l'extrémité P de l'arc et *négatives* quand leur prolongement y passe.

Remarque. — La sécante et la cosécante pourraient être reportées, la 1re sur AA', la 2e sur BB', en menant la tangente à l'*extrémité P* de l'arc, au lieu de la mener à son *origine A*.

10. Signes des lignes trigonométriques. — Examinons les lignes trigonométriques des arcs AP et AP'; le premier est plus petit que 90°; le second, plus grand que 90°, mais moindre que 180°.

1^{er} *quadrant*, arc AP. — Le sinus PM et la tangente AT (N° 9, 1°), le cosinus OM et la cotangente BS (N° 9, 2°), la sécante OT et la cosécante OS (N° 9, 3°) sont positifs.

2^e *quadrant*, arc AP'. — Le sinus $P'M'$ (N° 9, 1°), et la cosécante OS' (N° 9, 3°) sont positifs; le cosinus OM' et la cotangente BS' (N° 9, 2°), la tangente AT' (N° 9, 1°) et la sécante OT' (N° 9, 3°) sont négatifs.

[N. B. — Il sera bon, pour comprendre la position des lignes de l'angle obtus, de se rappeler les définitions données au N° 4, surtout en ce qui concerne la sécante et la tangente.]

11. Remarque. — Par ce qui précède, on voit que :

1° Les lignes trigonométriques des arcs plus petits que 90° sont toutes positives.

2° Les lignes trigonométriques des arcs compris entre 90° et 180° sont négatives, à l'exception du sinus et de la cosécante qui sont positifs.

Marche des lignes trigonométriques.

1^{er} Cas. — *L'arc passe de* 0° *à* 90°.

12. Lignes trigonométriques de l'arc de 0°. — Lorsque l'arc est nul, c'est-à-dire lorsque OP coïncide avec OA, d'après les définitions des lignes trigonométriques, le sinus est *nul*, le cosinus est *égal au rayon*, la tangente est *nulle*, la sécante est *égale au rayon;* la cotangente est *infinie*, car elle est menée de B parallèlement au rayon OA et ne peut le rencontrer; la cosécante, qui doit rencontrer l'extrémité de la cotangente en passant par A, est également infinie.

Si $R = 1$, on a donc pour un arc de 0°

$$\sin 0° = 0, \quad \operatorname{tg} 0° = 0, \quad \text{séc}\, 0° = 1,$$
$$\cos 0° = 1, \quad \operatorname{cotg} 0° = \infty, \quad \text{coséc}\, 0° = \infty.$$

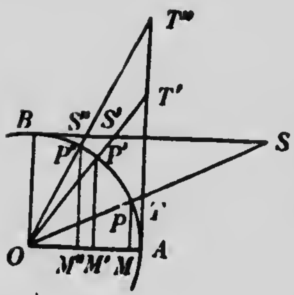


Fig. 4.

13. Lignes trigonométriques de l'arc variant de 0° a 90°. — Si l'arc passe de 0° à 90°, il est facile, par des constructions graphiques (Fig. 4), de montrer que le sinus, la tangente, la sécante augmentent tandis que le cosinus, la cotangente et la cosécante diminuent.

Lorsque l'arc atteint 90°, le sinus *coïncide* avec le rayon OB; la tangente et la sécante sont *infinies*; le cosinus et la cotangente sont *nuls*; la cosécante est *égale au rayon.*

Si $R = 1$, on a donc pour un arc de 90°

$$\sin 90° = 1, \quad \operatorname{tg} 90° = \infty, \quad \text{séc}\, 90° = \infty,$$
$$\cos 90° = 0, \quad \operatorname{cotg} 90° = 0, \quad \text{coséc}\, 90° = 1.$$

Ce résultat est d'ailleurs conforme à ce qui a été dit (N° 5) des fonctions des arcs complémentaires.

14. Remarque. — On peut dire que, pour les angles aigus :

1° Les sinus et les cosinus sont toujours < 1.

2° Les sécantes et les cosécantes sont toujours > 1.

3° Les tangentes et les cotangentes peuvent avoir toutes les valeurs entre 0 et ∞.

2ᵉ Cas. — *L'arc passe de 90° à 180°.*

15. Lignes trigonométriques de l'arc variant de 90° a 180°. — Si l'arc passe de 90° à 180° (Fig. 5), le sinus, la tangente et la sécante diminuent en valeur absolue, tandis que le cosinus, la cotangente et la cosécante augmentent en valeur absolue. Lorsque l'arc vaut 180°, le sinus est nul, le cosinus est égal à — 1; lorsque l'arc passe le 90° degré, la tangente saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$ et devient nulle lorsque l'arc vaut 180°; la cotangente va de 0 à $-\infty$; la sécante saute de $+\infty$ à $-\infty$ et devient égale à — 1 lorsque l'arc vaut 180°; la cosécante croît de 1 à $+\infty$.

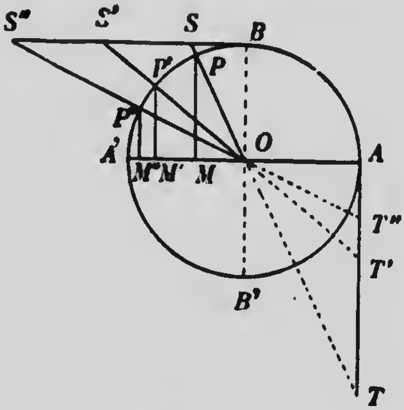


Fig. 5.

Si $R = 1$, on a donc pour un arc de 180°

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ &= 0, \\ \cos 180^\circ &= -1, \\ \operatorname{tg} 180^\circ &= 0, \\ \operatorname{cotg} 180^\circ &= -\infty, \\ \text{séc}\, 180^\circ &= -1, \\ \text{coséc}\, 180^\circ &= \infty. \end{aligned}$$

16. Remarque. — De la comparaison des valeurs des lignes trigonométriques des arcs de 0° à 180°, on peut conclure que deux arcs supplémentaires ont leurs lignes trigonométriques égales et de signes contraires, à l'exception du sinus et de la cosécante qui restent positifs.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - 35^\circ) &= \sin 35^\circ, \\ \cos(180^\circ - 35^\circ) &= -\cos 35^\circ, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - 35^\circ) &= -\operatorname{tg} 35^\circ, \\ \operatorname{cotg}(180^\circ - 35^\circ) &= -\operatorname{cotg} 35^\circ, \\ \text{séc}\,(180^\circ - 35^\circ) &= -\text{séc}\, 35^\circ, \\ \text{coséc}\,(180^\circ - 35^\circ) &= \text{coséc}\, 35^\circ. \end{aligned}$$

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES CONSIDÉRÉES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

17. Soit le triangle rectangle ABC.

Avec un rayon égal à l'hypoténuse, décrivons du sommet A un cercle $XYX'Y'$.

Menons les lignes trigonométriques de l'angle BAC que nous appellerons simplement A (1).

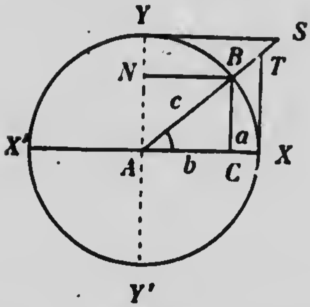


Fig. 6.

Si nous désignons par a, b, c, les côtés BC, AC, AB, il vient (Remarque N° 6) :

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Les deux triangles semblables ATX et ABC nous donnent les rapports égaux

$$\frac{XT}{AX} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{AC}.$$

Le premier rapport est l'expression de la tangente de l'angle A. Le second, qui lui est égal, exprime aussi la valeur de la même ligne.

Nous avons donc $\quad \operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}.$

---

(1) Dans la partie de la trigonométrie qui ne regarde pas directement les triangles, les angles sont généralement désignés par les lettres a, b, c, ... comme les arcs qui leur servent de mesure. Mais lorsqu'il s'agit de la résolution des triangles, on les désigne par les lettres A, B, C, ... placées à leurs sommets, les côtés opposés à ces angles s'appelant respectivement a, b, c, ...

Au moyen des triangles semblables, nous obtiendrons également :

$$\text{cotg } A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a},$$

$$\text{séc } A = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

$$\text{coséc } A = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

18. Remarque I. — Dans le triangle rectangle, on appelle donc, si l'on considère l'angle aigu adjacent à la base :

Sinus, le quotient de la hauteur par l'hypoténuse;

Cosinus, le quotient de la base par l'hypoténuse;

Tangente, le quotient de la hauteur par la base;

Cotangente, le quotient de la base par la hauteur;

Sécante, le quotient de l'hypoténuse par la base;

Cosécante, le quotient de l'hypoténuse par la hauteur.

19. Remarque II. — Pour chacun des deux angles aigus, le côté opposé à l'angle considéré prendra le nom de *hauteur*, tandis que le côté adjacent sera considéré comme *base;* de sorte que chacun des côtés de l'angle droit sera, à la fois, une hauteur pour l'angle opposé et une base pour l'angle adjacent.

20. Remarque III. — Les deux angles aigus étant complémentaires, il s'ensuit (N° 5) que le sinus, la tangente, la sécante de l'un sont le cosinus, la cotangente, la cosécante de l'autre.

Si l'angle B est le complément de l'angle A, on a

$$\sin B = \frac{b}{c}, \qquad \text{tg } B = \frac{b}{a}, \qquad \text{séc } B = \frac{c}{a},$$

$$\cos B = \frac{a}{c}, \qquad \text{cotg } B = \frac{a}{b}, \qquad \text{coséc } B = \frac{c}{b}.$$

21. Remarque IV. — Nous avons déjà démontré que la valeur des rapports trigonométriques est constante pour le même angle (N° 6).

L'examen de la figure 7 conduit à la même conclusion.

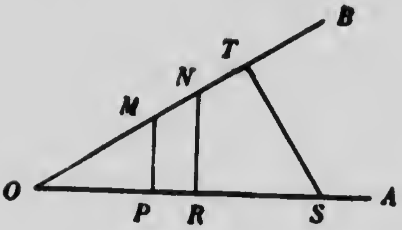


Fig. 7.

AOB est un angle aigu. Des points quelconques M et N, abaissons des perpendiculaires MP, NR sur OA. D'un point S pris sur OA, menons une perpendiculaire ST sur OB.

Les trois triangles rectangles OMP, ONR, OTS, sont semblables comme ayant un angle aigu commun (*Eléments de Géométrie*, N° 169).

Ils donnent : $$\frac{MP}{OM} = \frac{NR}{ON} = \frac{ST}{OS}.$$

Or, ces rapports expriment le *sinus* de l'angle AOB dans chacun des triangles. Ce sinus est donc le même, de quelque triangle qu'il soit obtenu.

On prouverait de même que les autres rapports sont constants pour le même angle, quelles que soient les longueurs des côtés de l'angle.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMETRIQUES

Formules simples.

Entre les lignes trigonométriques d'un arc, il existe certaines relations qu'il importe d'établir.

22. Somme des carrés du sinus et du cosinus.

Soit l'arc AP d'un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité linéaire (Fig. 8).

Nous avons (N° 4)

$\sin a = PM,$ $\quad$ $\operatorname{tg} a = AT,$ $\quad$ $\text{séc}\, a = OT,$

$\cos a = OM,$ $\quad$ $\operatorname{cotg} a = BS,$ $\quad$ $\text{coséc}\, a = OS.$

Le triangle rectangle OPM donne :

$$\overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2;$$

mais $OP = R = 1$, d'où :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1. \qquad [1]$$

Cette formule est fondamentale et peut s'énoncer ainsi :

La somme des carrés du sinus et du cosinus d'un arc est égale à l'unité.

23. Valeur de la tangente.

Les triangles rectangles semblables OAT, OPM, donnent :

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OM};$$

mais $OA = R = 1$, d'où :

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}. \qquad [2]$$

La tangente d'un arc est le quotient du sinus par le cosinus.

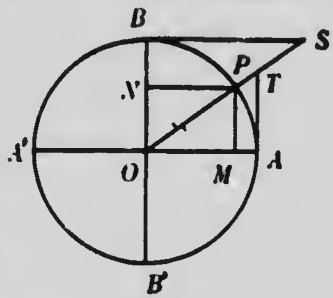


Fig. 8.

24. Valeur de la sécante.

Ces mêmes triangles nous donnent encore :

$$\frac{OT}{OA} = \frac{OP}{OM}.$$

mais $OA = OP = R = 1$, d'où :

$$\text{séc}\, a = \frac{1}{\cos a}. \qquad [3]$$

La sécante d'un arc est égale au quotient de l'unité par le cosinus.

25. Valeur de la cotangente.

Les triangles semblables OBS, ONP, donnent :

$$\frac{BS}{OB} = \frac{PN}{ON}.$$

mais $OB = 1$, $PN = OM$, et $ON = PM$; d'où :

$$\text{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\sin a}. \qquad [4]$$

La cotangente d'un arc est le quotient du cosinus par le sinus.

26. Valeur de la cosécante.

Les mêmes triangles donnent aussi :

$$\frac{OS}{OB} = \frac{OP}{ON}; \text{ d'où :}$$

$$\text{coséc}\, a = \frac{1}{\sin a}. \qquad [5]$$

La cosécante d'un arc est égale au quotient de l'unité par le sinus.

27. Formules diverses déduites des précédentes.

Multipliant membre à membre les égalités [2] et [4], il vient :

$$\text{tg}\, a \ \text{cotg}\, a = \frac{\sin a \ \cos a}{\cos a \ \sin a} = 1. \qquad [6]$$

De [3], on tire $\quad \text{séc}\, a \ \cos a = 1. \qquad [7]$

De [5], on tire $\quad \sin a \ \text{coséc}\, a = 1. \qquad [8]$

28. Remarque I. — Ces trois dernières formules montrent que le sinus est l'inverse de la cosécante; le cosinus, l'inverse de la sécante; la tangente, l'inverse de la cotangente, et réciproquement.

Les cinq premières formules permettent de calculer toutes les lignes trigonométriques d'un arc donné lorsque l'on connaît l'une de ces lignes.

29. Remarque II. — Ces formules auraient pu être trouvées par les rapports trigonométriques du triangle rectangle.

Ainsi, de $a^2 + b^2 = c^2,$

on tire $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 1,$

ou $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1;$

mais (N° 17) $\dfrac{a}{c} = \sin a$

et $\dfrac{b}{c} = \cos a.$

Donc $\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

Application des formules.

30. — I. Montrer que $\operatorname{cotg} a \operatorname{séc} a \sin a = 1.$

On a, en effet (N° 25), $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\sin a},$

et (N° 24) $\operatorname{séc} a = \dfrac{1}{\cos a};$

d'où $\operatorname{cotg} a \operatorname{séc} a \sin a = \dfrac{\cos a}{\sin a} \times \dfrac{1}{\cos a} \times \dfrac{\sin a}{1} = 1.$

II. Une ligne trigonométrique étant donnée, calculer les autres à l'aide des formules fondamentales.

Si l'on a, par exemple, $\sin a = \dfrac{1}{2}$, on peut écrire :

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{séc} a = \frac{1}{\cos a} = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{coséc} a = \frac{1}{\sin a} = 1 \div \frac{1}{2} = 2.$$

Calcul des lignes trigonométriques de quelques arcs.

Certains angles se rencontrent très souvent dans les problèmes; les valeurs de leurs lignes trigonométriques sont donc d'un usage fréquent; nous allons les déterminer.

31. *Lignes trigonométriques d'un arc de* 30°.

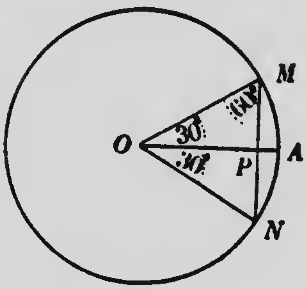


Fig. 9.

Soit un angle MON de 60°; la corde MN qui sous-tend l'arc est égale au rayon, et le rayon perpendiculaire sur cette corde la divise en deux parties égales (*Eléments de Géométrie*, N° 124). L'arc MAN est lui-même divisé en deux parties égales et $AM = 30°$.

$$MN = R = 1.$$

$$MP \text{ ou } \sin 30° = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}.$$

On tire :

De [1], $\quad (\tfrac{1}{2})^2 + \cos^2 30° = 1;$

$$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De [2], $\quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

De [4], $\quad \operatorname{cotg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$

De [3], $\quad \text{séc } 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

De [5], $\quad \text{coséc } 30° = 1 \div \frac{1}{2} = 2.$

32. *Lignes trigonométriques d'un arc de* 60°.

L'angle de 60° étant complémentaire de celui de 30°, il vient :

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{cotg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{séc } 60° = \text{cosséc } 30° = 2;$$

$$\text{cosséc } 60° = \text{séc } 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

33. *Lignes trigonométriques d'un arc de* 45°.

Pour l'arc de 45°, le sinus est égal au cosinus, la tangente à la cotangente, la sécante à la cosécante, car les deux arcs complémentaires sont égaux.

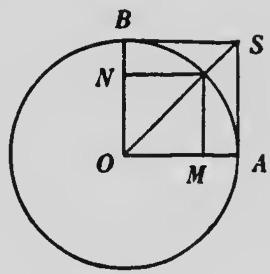


Fig. 10.

La formule [1] donne

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1,$$

ou

$$2\sin^2 45° = 1,$$

$$\sin^2 45° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De [2], on tire $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

De [3], on tire $\text{séc } 45° = \text{cosséc } 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

VALEUR DES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES ET DES ARCS CORRESPONDANTS

Calcul du rapport trigonométrique, étant donné l'arc.

1er Cas. — *L'arc a un nombre exact de degrés.*

34. — Au moyen des formules fondamentales (Nos 22-27) et d'autres formules qui en dérivent, et en employant des procédés de calcul très laborieux que nous n'exposerons pas ici, on a construit des Tables donnant la valeur des *rapports trigonométriques* pour les arcs de 0° à 90° se succédant par intervalles rapprochés (de minute en minute, de 30" en 30", de 10" en 10", et même de seconde en seconde).

La Table de la page 19 contient les valeurs des rapports trigonométriques, de degré en degré, pour les arcs de 0° à 90°.

On sait que (N° 5)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ;$$
$$\sin 44^\circ = \cos 46^\circ;$$
$$\sin 43^\circ = \cos 47^\circ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La valeur des rapports-sinus de 0° à 45° est donc la même que celle des rapports-cosinus de 45° à 90°. Par conséquent :

Pour trouver les rapports trigonométriques de 0° à 45°, on lit la Table en descendant, et pour ceux de 45° à 90°, on la lit en montant.

Ex. : *Trouver la valeur des rapports :*

1° sin 10°;	3° tg 51°,	5° séc 43°;
2° cos 38°;	4° cotg 72°;	6° cosée 57°.

La Table donne :

1° sin 10° = 0.1736;		4° cotg 72° = 0.3249;
2° cos 38° = 0.7880;		5° séc 43° = 1.3673;
3° tg 51° = 1.2349;		6° cosée 57° = 1.1924.

Angle	sin	cos	tg	cotg	séc	cosée	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞	**90°**
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	**89°**
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	**88°**
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	1.0014	19.1073	**87°**
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	**86°**
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	**85°**
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	**84°**
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	**83°**
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	**82°**
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	**81°**
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	**80°**
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	**79°**
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	**78°**
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	**77°**
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	**76°**
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	**75°**
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	**74°**
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	**73°**
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	**72°**
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	**71°**
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	**70°**
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	**69°**
[illegible]	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	**68°**
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	**67°**
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	**66°**
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	**65°**
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	**64°**
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	**63°**
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	**62°**
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	**61°**
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	**60°**
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	**59°**
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	**58°**
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	**57°**
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	**56°**
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	**55°**
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	**54°**
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	**53°**
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	**52°**
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	**51°**
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	**50°**
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	**49°**
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	**48°**
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	**47°**
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	**46°**
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	**45°**
	cos	sin	cotg	tg	cosée	séc	Angle

2e Cas. — *L'arc contient des minutes et des secondes.*

35. — Si l'arc contient des minutes et des secondes, on cherche la différence entre les valeurs du rapport pour le nombre donné de degrés et le nombre de degrés suivant ; on prend une partie de cette différence proportionnée au nombre de minutes ou de secondes ; puis on ajoute ou on retanche la valeur trouvée suivant le cas.

Ex. : *Trouver la valeur des rapports :*

1° sin 18° 28'; 2° cos 63° 16' 20".

1° La Table donne :

$$\sin 18° = 0.3090,$$
$$\sin 19° = 0.3256.$$

Différence pour 60' $0.3256 - 0.3090 = 0.0166.$

Différence pour 28' $\dfrac{0.0166 \times 28}{60} = 0.0078.$

$$\sin 18° 28' = 0.3090 + 0.0078 = 0.3168.$$

2° La Table donne :

$$\cos 63° = 0.4540,$$
$$\cos 64° = 0.4384.$$

Différence pour 1° ou 3600'' $= 0.0156.$

Pour 16'20'' ou 980'', $\dfrac{0.0156 \times 980}{3600} = 0.0043.$

$$\cos 63° 16' 20'' = 0.4540 - 0.0043 = 0.4497.$$

Remarque. — Il est facile de voir (N° 13) que, pour le sinus, la tangente et la sécante, on ajoute les parties proportionnelles, et que, pour le cosinus, la cotangente et la cosécante, on les retranche.

Calcul de l'arc, étant donné le rapport.

36. — Ex. I : *Trouver l'arc dont le sinus vaut* 0.4067.

La Table donne $\sin 24° = 0.4067$.

L'arc demandé est donc 24°.

Ex. II : *Trouver l'arc dont le sinus vaut* 0.5786.

La Table donne $\sin 35° = 0.5736$,
$\sin 36° = 0.5878$.

Différence pour 1° $= 0.0142$.

Différence entre sin *a* et sin 35° $0.5786 - 0.5736 = 0.0050$.

Ce qui correspond à $\dfrac{60' \times 50}{142} = 21'$.

L'arc demandé est donc 35° 21'.

Ex. III : *Trouver l'arc dont le cosinus vaut* 0.8965.

La Table donne $\cos 26° = 0.8988$,
$\cos 27° = 0.8910$.

Différence pour 1° $= 0.0078$.

Différence entre cos 26° et cos *a* $0.8988 - 0.8965 = 0.0023$.

Ce qui correspond à $\dfrac{3600'' \times 23}{78} = 17'41''$.

L'arc demandé est donc 26° 17'41''.

Remarque. — Dans la question précédente, nous avons calculé les secondes; il est bon de faire remarquer cependant que le nombre trouvé pour les secondes *n'est pas sûr*; des tables à 4 décimales ne peuvent guère donner qu'une approximation d'une *minute de degré* pour la valeur des arcs. Cette approximation est suffisante dans la pratique.

Toutefois, pour les lignes trigonométriques allant à l'infini (tangentes, cotangentes, sécantes et cosécantes), une Table ne donnant que les degrés ne peut servir pour calculer avec une exactitude suffisante même les minutes et les erreurs augmentent avec la grandeur de ces lignes. Il faut avoir recours à des Tables plus complètes. C'est ce qu'on a fait pour le calcul de cotg 15° 28' (N° 43) et de cotg 34° 22' (N° 45).

EXERCICES

Exprimer en fonction de l'arc complémentaire :

1. 1° sin 25° ; 2° sin 42° ; 3° sin 48° 30' ; 4° sin 75° 42'.

2. 1° cos 64° ; 2° cos 49° ; 3° cos 8° 15' ; 4° cos 89° 28'.

3. 1° tg 84° ; 2° tg 78° ; 3° tg 2° 10' ; 4° cotg 84° 38'.

4. 1° cotg 62° 45' ; 2° cotg 38° 21' ; 3° séc 40° 59' ; 4° séc 1° 2'.

5. 1° séc 49° ; 2° cosée 39° 20' ; 3° cosée 28° 15' ; 4° cosée 60° 38'.

6. 1° sin 18° 15' ; 2° cotg 42° 20' ; 3° séc 60° 49' ; 4° cotg 9° 31'.

7. 1° tg 64° 36' ; 2° cosée 58° 29' ; 3° cos 38° 16' ; 4° sin 16° 37'.

8. 1° séc 30° 59' ; 2° tg 86° 8' ; 3° cotg 24° 48' ; 4° cosée 49° 17'.

Exprimer en fonction de l'arc supplémentaire :

9. 1° sin 135° ; 2° sin 128° 20' ; 3° sin 175° 49' ; 4° cos 159°.

10. 1° cos 174° 2' ; 2° cos 91° 35' ; 3° tg 162° ; 4° tg 102° 27'.

11. 1° tg 128° 32' ; 2° cotg 157° ; 3° cotg 139° 49' ; 4° cotg 100° 58'.

12. 1° séc 139° ; 2° séc 115° 21' ; 3° séc 97° 11' ; 4° cosée 141°.

13. 1° cosée 174° 6'; 2° cosée 99° 23'; 3° sin 115°; 4° cos 118° 38'.

14. 1° tg 148°; 2° cotg 174°; 3° séc 163°; 4° cosée 98° 33'.

15. 1° sin 109° 17'; 2° cosée 98° 7'; 3° tg 119° 48'; 4° cotg 94° 39'.

16. 1° séc 111° 11'; 2° cos 99° 31'; 3° cotg 172° 23'; 4° cos 164° 17'.

EXPRESSION DES LIGNES TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES AIGUS DU TRIANGLE RECTANGLE EN FONCTION DES COTES DE CE TRIANGLE

Trouver les valeurs des lignes trigonométriques de l'angle A d'un triangle rectangle si a, b, c ont pour valeurs respectives :

17. 3, 4, 5.

18. 8, 15, 17.

19. 15, 36, 39.

20. 7, 24, 25.

21. 9, 40, 41.

22. 33, 56, 65.

23. 207, 224, 305.

24. 12, 35, 37.

25. 3.9, 8, 8.9.

26. 4.5, 6, 7.5.

27. 1.19, 1.20, 1.69.

28. 39, 52, 65.

29. $a^2 - 1,\ 2a,\ a^2 + 1$.

30. $a^2 - b^2,\ 2ab,\ a^2 + b^2$.

31. $a + b,\ \dfrac{2ab}{a - b},\ \dfrac{a^2 + b^2}{a - b}$.

32. Quel rapport doit exister entre les longueurs données pour qu'elles puissent être les côtés d'un triangle rectangle? Montrer que les valeurs données dans l'exercice précédent satisfont à la condition demandée.

Sachant que $a^2 + b^2 = c^2$, trouver les lignes trigonométriques des angles A et B, si

33. $a = 48$; $b = 286$.

34. $c = 305$; $a = 207$.

35. $c = 65$; $b = 60$.

36. $a = 264$; $c = 265$.

37. $b = 38$; $c = 77.2$.

38. $a = \sqrt{x^2 + y^2}$; $b = \sqrt{2xy}$.

39. $c = x + y$; $b = \sqrt{x^2 + xy}$.

40. $a = 2b$.

41. $a = \frac{3}{4}c$.

42. Trouver a, si $\operatorname{tg} A = \frac{8}{5}$ et $b = 10$.

43. Trouver a, si $\sin A = \frac{11}{20}$ et $c = 7$.

44. Trouver b, si $\cos A = \frac{3}{5}$ et $c = 10.25$.

45. Trouver c, si $\operatorname{coséc} A = 13.9$ et $a = 17.8$.

46. Trouver c, si $\operatorname{séc} A = 2$ et $b = 15$.

47. Trouver a, si $\operatorname{tg} A = 0.7$ et $b = 5.6$.

48. Si $\sin A = \frac{3}{8}$, trouver $\operatorname{coséc} A$.

49. Si $\cos A = \frac{1}{2}$, trouver $\operatorname{séc} A$.

50. Si $\operatorname{tg} A = 5\frac{1}{3}$, trouver $\operatorname{cotg} A$.

51. Si $\operatorname{séc} A = \sqrt{7}$, trouver $\cos A$.

52. Si $\operatorname{cotg} A = 3\sqrt{5}$, trouver $\operatorname{tg} A$.

53. Si $\operatorname{coséc} A = 2$, trouver $\sin A$.

54. Si $\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, trouver $\operatorname{coséc} A$.

55. Si $\cos A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, trouver $\operatorname{séc} A$.

Problèmes.

56. Les côtés AC, AB, BC d'un triangle rectangle ont 35 ver., 37 ver., 12 ver. Calculer la valeur de séc A, sin A, cos B, tg B.

57. L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 30 pieds, et l'un des côtés de l'angle droit 18 pieds. Calculer le troisième côté et les sinus, tangente, cosécante et cosinus de l'angle opposé.

58. Le sommet d'une échelle de 65 pieds est appuyé à une maison, et son extrémité inférieure en est éloignée de 25 pieds. A quelle hauteur atteint-elle? Trouver le sinus, la cotangente, le cosinus et la sécante de l'angle que cette échelle fait avec le plan horizontal.

59. Une échelle de 58 pieds est placée de façon à atteindre un point situé à 42 pieds de terre. Trouver les lignes trigonométriques de l'angle que fait l'échelle avec le mur.

60. Dans un quadrilatère $ABCD$, l'angle BAD est droit. Si la diagonale BD fait un angle droit avec BC, et si $BD = 60$, $BC = 63$, $AB = 48$, calculer sin ABD, tg ADB, cos BDC, coséc BCD.

61. Dans un carré, on joint le sommet A au milieu E de BC. Trouver les rapports trigonométriques de l'angle BAE.

62. Trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés ont 9 pieds et 40 pieds. Montrer que la somme des carrés du sinus et du cosinus de l'angle A est égale à 1.

CALCULS SUR LES FORMULES TRIGONOMETRIQUES

Montrer que

63. $$\text{séc}^2 a = 1 + \text{tg}^2 a. \text{ (1)}$$

64. $$\text{coséc}^2 a = 1 + \text{cotg}^2 a. \text{ (1)}$$

65. $$\cos a \,\text{tg}\, a \,\text{coséc}\, a = 1.$$

66. $$\text{tg}\, a = \sin a \,\text{séc}\, a.$$

---

(1) Il serait bon de retenir cette identité.

67. $$\sin a = \text{tg}\, a \cos a.$$

68. $$\text{coséc}\, a\, \text{tg}\, a = \text{séc}\, a.$$

69. $$\text{tg}^2 a \cos^2 a + \cos^2 a = 1.$$

70. $$\sin^2 a\, \text{cotg}^2 a\, \text{séc}\, a = \cos a.$$

71. $$\cos^4 a - \sin^4 a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

72. $$\cos a\, \text{coséc}\, a = \text{cotg}\, a.$$

73. $$\text{séc}\, a - \cos a = \sin a\, \text{tg}\, a.$$

74. $$\sin^2 a(1 + \text{tg}^2 a) = \text{tg}^2 a.$$

75. $$(1 - \sin^2 a)\text{séc}^2 a = 1.$$

76. $$\sin^2 a\, \text{séc}^2 a = \text{séc}^2 a - 1.$$

77. $$(\text{séc}^2 a - 1)\text{cotg}^2 a = 1.$$

78. $$(1 - \cos^2 a)(1 + \text{cotg}^2 a) = 1.$$

79. $$\sin^2 a\, \text{cotg}^2 a + \sin^2 a = 1.$$

80. $$(1 + \text{tg}^2 a)(1 - \sin^2 a) = 1.$$

81. $$\text{cotg}^2 a(1 - \cos^2 a) = \cos^2 a.$$

82. $$\frac{1 + \sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 - \sin a}.$$

Une ligne trigonométrique étant donnée, calculer les autres.

83. $\sin a = \frac{2}{3}$. 84. $\sin a = \frac{4}{5}$. 85. $\cos a = 0.35$.

86. $\text{tg}\, a = \frac{4}{3}$. 87. $\text{séc}\, a = 3$. 88. $\text{cotg}\, a = 1$.

89. $\text{coséc}\, a = \frac{3}{2}$. 90. $\sin a = \frac{12}{13}$. 91. $\text{séc}\, a = \frac{5}{3}$.

92. $\text{cotg}\, a = \frac{2}{5}$. 93. $\cos a = \frac{5}{7}$. 94. $\text{tg}\, a = \frac{15}{8}$.

95. $\text{séc}\, a = x$. 96. $\sin a = x$. 97. $\text{tg}\, a = -3$.

98. $$\cos a = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

99. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc en fonction de sin a.

100. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc en fonction de cos a.

101. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc en fonction de tg a.

102. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc en fonction de cotg a.

La valeur des lignes trigonométriques des arcs de 30°, 60°, 45°, étant connue, calculer les valeurs des expressions suivantes :

103. $2 \sin 30° \cos 30° \operatorname{cotg} 60°$.

104. $\operatorname{cotg}^2 30° + 2 \operatorname{cotg}^2 45°$.

105. $\operatorname{tg}^2 45° \cos 30° \operatorname{cotg} 60° \operatorname{cotg}^2 30°$.

106. $\operatorname{tg}^2 30° + 2 \sin 60° + \operatorname{cotg} 45° - (\operatorname{cotg} 30° - \cos^2 30°)$.

107. $2 \operatorname{séc}^2 45° - 3 \operatorname{coséc}^2 60° + \operatorname{tg}^2 45°$.

108. $\operatorname{séc}^2 45° + \operatorname{tg} 30° \operatorname{cotg} 60° + \operatorname{coséc}^2 60°$.

109. $\operatorname{tg}^3 45° + 4 \sin^2 30°$.

110. $3 \operatorname{coséc}^2 60° + 4 \sin^2 45° + \operatorname{cotg}^2 30°$.

111. $\operatorname{coséc}^2 45° + \frac{1}{2} \operatorname{séc}^2 30° - 2 \operatorname{cotg}^2 60°$.

112. $\cos^2 60° \operatorname{cotg}^2 30° \operatorname{tg}^2 45°$.

113. $2 \operatorname{cotg} 45° + \sin^3 30° - 2 \cos^4 30°$.

114. $\operatorname{tg}^2 45° - (\sin^2 60° - \cos 60°)$.

VALEUR DES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES

Trouver la valeur des rapports trigonométriques suivants :

115. 1° sin 42° ;
2° cos 74° ;
3° tg 58°.

116. 1° cotg 19° ;
2° séc 37° ;
3° coséc 53°.

117. 1° sin 15° 42';
2° sin 37° 18' 20";
3° cos 64° 36'.

118. 1° cos 37° 40' 28";
2° tg 43° 15';
3° tg 38° 22' 19".

119. 1° cotg 42° 43' 44";
2° sin 39° 25' 26";
3° sin 47° 32' 10".

120. 1° tg 39° 24';
2° cos 41° 34' 20";
3° cotg 44° 6' 4".

121. 1° tg 24° 42' 58";
2° sin 74° 30' 15";
3° cos 83° 45' 28".

122. 1° tg 25° 41';
2° tg 20° 7' 28";
3° cos 50° 25' 35".

Calculer la valeur de l'arc pour lequel on a :

123. 1° sin a = 0.3480;
2° sin a = 0.7695;
3° cos a = 0.9016.

124. 1° cos a = 0.4930;
2° tg a = 0.3716;
3° tg a = 2.4312.

125. 1° cotg a = 1.5262;
2° cotg a = 0.5908;
3° cos a = 0.9042.

126. 1° sin a = 0.9105;
2° cotg a = 5.0350;
3° tg a = 0.2590.

127. 1° sin a = 0.4313;
2° sin a = 0.9022;
3° cos a = 0.6415.

128. 1° tg a = 0.4527;
2° cotg a = 2.6707;
3° cos a = 0.7855.

CHAPITRE II

RESOLUTION DES TRIANGLES

RESOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

Théorèmes fondamentaux.

Les relations qui existent entre les angles et les côtés du triangle rectangle peuvent se déduire des rapports trouvés au N° 17. Nous allons toutefois démontrer deux propositions.

37. Théorème I. — *Chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent.*

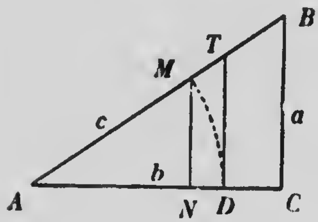


Fig. 11.

Soit le triangle rectangle ABC. De A comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons l'arc MD et menons la perpendiculaire MN.

$$MN = \sin A.$$

Les triangles semblables ABC et AMN donnent

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{1};$$

d'où $$a = c \sin A\,.$$

Les angles A et B étant complémentaires, on a :

$$\sin A = \cos B\,;$$

on a donc aussi $$a = c \cos B\,.$$

On aurait de même $$b = c \sin B = c \cos A\,.$$

38. Théorème II. — *Chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle adjacent.*

Soit le triangle rectangle ABC (Fig. 11).

Menons la tangente TD.

Les triangles semblables ABC, ATD donnent

$$\frac{BC}{TD} = \frac{AC}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\text{tg}\, A} = \frac{b}{1};$$

d'où $$a = b \,\text{tg}\, A.$$

Les angles A et B étant complémentaires, $\text{tg}\, A = \text{cotg}\, B$.

On a donc aussi $$a = b \,\text{cotg}\, B.$$

On aurait de même $$b = a \,\text{tg}\, B = a \,\text{cotg}\, A.$$

Usage des logarithmes.

39. Tables. — Pour calculer les côtés ou les angles, on peut utiliser les rapports trigonométriques ou bien leurs logarithmes. Des Tables ont été construites donnant les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes des angles de 0° à 90°. Les logarithmes des sécantes et des cosécantes ne sont pas ordinairement donnés; ces deux rapports étant les inverses du cosinus et du sinus, au lieu de multiplier par séc a ou cosée a, on divise par cosinus a ou sinus a.

40. Remarque. — Certaines Tables donnent une caractéristique augmentée de 10. Ainsi, le log sin 35° 23' y est exprimé par 9.76 271; il faut donc avoir soin, lorsqu'on cherche le nombre correspondant, de retrancher 10 à la caractéristique, ce qui revient, pour l'exemple ci-dessus, à chercher le nombre correspondant à $\bar{1}.76\,271$. D'ailleurs, la réponse trouvée en prenant cette caractéristique augmentée de 10 serait absurde. Ainsi, s'il s'agit de trouver en milles la distance entre deux villes et que par exemple 9.47 712 soit le logarithme du résultat, la distance cherchée serait de 3 000 000 000 de milles, ce qui ne peut pas être.

Ex. I : Soit à trouver log sin 28° 15' 20".

La **Table** donne :

$$\log \sin 28^\circ\,15' = 9.67\,515 - 10\,,$$
$$\log \sin 28^\circ\,16' = 9.67\,539 - 10\,.$$

Différence pour 1' $\qquad 9.67\,539 - 9.67\,515 = 0.00\,024\,.$

Différence pour 20'' $\qquad \dfrac{0.00\,024 \times 1}{3} = 0.00\,008\,.$

$$\log \sin 28^\circ\,15'\,20'' = (9.67\,515 + 0.00\,008) - 10$$
$$= 9.67\,523 - 10 \quad \text{ou} \quad \overline{1}.67\,523\,.$$

La valeur correspondante doit être le rapport trigonométrique sinus 28° 15' 20'' ou 0.4734.

Ex. II : Soit à trouver log cos 45° 5' 25".

$$\log \cos 45^\circ\,5' = 9.84\,885 - 10\,,$$
$$\log \cos 45^\circ\,6' = 9.84\,773 - 10\,.$$

Différence pour 1' $\qquad 0.00\,012\,.$

Différence pour 25'' $\qquad \dfrac{0.00\,012 \times 25}{60} = 0.00\,005\,.$

$$\log \cos 45^\circ\,5'\,25'' = (9.84\,885 - 0.00\,005) - 10$$
$$= 9.84\,880 - 10 = \overline{1}.84\,880.$$

La valeur correspondante, 0.7060, est la valeur du rapport trigonométrique cos 45° 5' 25''.

Ex. III : Si log sin a = 9.80 209 — 10, calculer l'angle a.

$$\log \sin 39^\circ\,20' = 9.80\,197 - 10\,.$$
$$\log \sin 39^\circ\,21' = 9.80\,213 - 10\,.$$

Différence pour 1' $\quad 9.80\,213 - 9.80\,197 = 0.00\,016\,.$

Différence entre log sin a et log sin 39° 20'

$$9.80\,209 - 9.80\,197 = 0.00\,012\,.$$

Ce qui correspond à $\qquad \dfrac{60'' \times 12}{16} = 45''\,.$

L'angle a vaut : 39° 20' 45''.

Ex. IV : Si log cotg a = 9.74 210, calculer l'angle a.

$$\log \operatorname{cotg} 61^\circ\,5' = 9.74\,226 - 10\,,$$
$$\log \operatorname{cotg} 61^\circ\,6' = 9.74\,196 - 10\,.$$

Différence pour 1' : $9.74\,226 - 9.74\,196 = 0.00\,030\,.$

Différence entre log cotg 61° 5' et log cotg a

$$9.74\,226 - 9.74\,210 = 0.00\,016\,.$$

Ce qui correspond à $\dfrac{60'' \times 16}{30} = 32''.$

L'angle demandé vaut : 61° 5' 32''.

Différents cas de résolution des triangles rectangles.

41. — Les théorèmes précédents permettent de résoudre un triangle rectangle, lorsqu'on connaît :

1° Un côté quelconque et un angle aigu.
2° Deux côtés quelconques.

1er Cas.

On connaît un côté quelconque et un angle aigu.

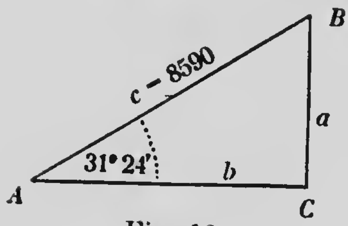


Fig. 12.

42. Ex. I : Si $A = 31°\,24'$ et $c = 8\,590$, calculer B, a, b.

$$A + B = 90°\,;$$

d'où $B = 90° - A\,.$

On a (N° 37) $a = c \sin A\,.$

et $b = c \cos A\,.$

1° *Calcul au moyen des rapports :*

$$B = 90° - 31°\,24' = 58°\,36'\,;$$
$$a = c \sin A = 8\,590 \times 0.5210 = 4\,475.39\,;$$
$$b = c \cos A = 8\,590 \times 0.8536 = 7\,332.424\,.$$

Remarque. — Il suffit d'écrire $a = 4\,475$ et $b = 7\,332$, car on ne peut compter que sur quatre chiffres exacts.

2° *Calcul par logarithmes :*

$$\log a = \log c + \log \sin A$$
$$\log c = 3.93\,399$$
$$\log \sin A = \overline{1}.71\,685$$
$$\log a = 3.65\,084$$
$$a = 4\,475.5\,;$$

$$\log b = \log c + \log \cos A$$
$$\log c = 3.93\,399$$
$$\log \cos A = \overline{1}.93\,123$$
$$\log b = 3.86\,522$$
$$b = 7\,332\,.$$

43. Ex. II : Si $A = 15° 28'$ et $a = 152$, trouver B, b, c.

$$A + B = 90°;$$

d'où $B = 90° - A.$

On a (N° 38) $b = a \operatorname{cotg} A$.

et (N° 37) $b = c \sin A$;

d'où $c = \dfrac{a}{\sin A}$.

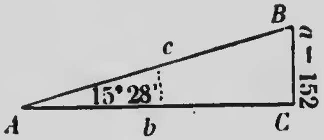


Fig. 13.

1° *Calcul au moyen des rapports :*

$$B = 90° - 15° 28' = 74° 32';$$

$$b = a \operatorname{cotg} A = 152 \times 3.6140 = 549.328;$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = 152 \div 0.2667 = 569.92\,.$$

2° *Calcul par logarithmes :*

$$\log b = \log a + \log \operatorname{cotg} A$$
$$\log a = 2.18\,184$$
$$\log \operatorname{cotg} A = 0.55\,799$$
$$\log b = 2.73\,983$$
$$b = 549.325\,.$$

$$\log c = \log a + \operatorname{colog} \sin A$$
$$\log a = 2.18\,184$$
$$\operatorname{colog} \sin A = 0.57\,401$$
$$\log c = 2.75\,585$$
$$c = 569.97\,.$$

44. Ex. III : Si $A = 50° 2'$ et $b = 176$, calculer B, a, c.

$$A + B = 90°;$$

d'où $B = 90° - A$.

On a (N° 38) $a = b \operatorname{tg} A$;

et (N° 37) $b = c \cos A$;

d'où $c = \dfrac{b}{\cos A}$.

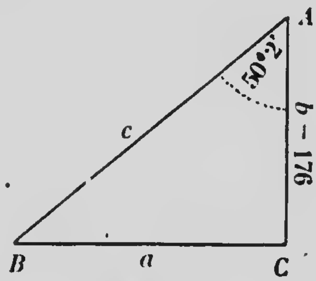


Fig. 14.

1° *Calcul au moyen des rapports :*

$$B = 90° - 50° 2' = 39° 58'.$$

$$a = b \operatorname{tg} A = 176 \times 1.1932 = 210\,.$$

$$c = \frac{b}{\cos A} = 176 \div 0.6423 = 274\,.$$

2° *Calcul par logarithmes :*

$$\begin{aligned}\log a &= \log b + \log \operatorname{tg} A\\ \log b &= 2.24\,551\\ \log \operatorname{tg} A &= 0.07\,670\\ \hline \log a &= 2.32\,221\\ a &= 210\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log c &= \log b + \operatorname{colog} \cos A\\ \log b &= 2.24\,551\\ \operatorname{colog} \cos A &= 0.19\,223\\ \hline \log c &= 2.43\,774\\ c &= 274\,.\end{aligned}$$

2^e Cas.

On connaît deux côtés quelconques.

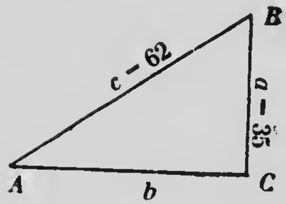


Fig. 15.

45. Ex. I : Si $c = 62$ et $a = 35$, calculer A, B, b.

On a (N° 17) $\sin A = \dfrac{a}{c}$;

$$B = 90° - A\,.$$

(N° 38) $b = a \operatorname{cotg} A$.

1° *Calcul au moyen des rapports :*

$$\sin A = \frac{35}{62} = 0.5645;$$

$$A = 34°\,22';$$

$$B = 90° - 34°\,22' = 55°\,38';$$

$$b = a \operatorname{cotg} A = 35 \times 1.4623 = 51.18\,.$$

2° *Calcul par logarithmes :*

$$\begin{aligned}\log \sin A &= \log a + \operatorname{colog} c\\ \log a &= 1.54\,407\\ \operatorname{colog} c &= \bar{2}.20\,761\\ \hline \log \sin A &= \bar{1}.75\,168\\ A &= 34°\,22'\,9''.\\ B &= 55°\,37'\,51''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log b &= \log a + \log \operatorname{cotg} A\\ \log a &= 1.54\,407\\ \log \operatorname{cotg} A &= 0.16\,503\\ \hline \log b &= 1.70\,910\\ b &= 51.18\,.\end{aligned}$$

46. Ex. II : Si $a = 72$ et $b = 96$, calculer A, B, c.

On a (N° 17) $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$.

$$B = 90° - A.$$

(N° 37) $a = c \sin A$;

d'où $c = \dfrac{a}{\sin A}$.

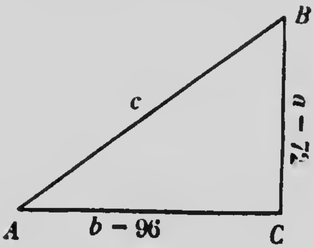


Fig. 16.

1° *Calcul au moyen des rapports :*

$$\operatorname{tg} A = \frac{72}{96} = 0.7500.$$

$$A = 36° 52'.$$

$$B = 53° 8'.$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{72}{0.6000} = 120.$$

2° *Calcul au moyen des logarithmes :*

$$\log \operatorname{tg} A = \log a + \operatorname{colog} b$$
$$\log a = 1.85\,733$$
$$\operatorname{colog} b = \underline{2.01\,773}$$
$$\log \operatorname{tg} A = \bar{1}.87\,506$$
$$A = 36° 52' 12''.$$
$$B = 53° 7' 48''.$$

$$\log c = \log a + \operatorname{colog} \sin A$$
$$\log a = 1.85\,733$$
$$\operatorname{colog} \sin A = \underline{0.22\,185}$$
$$\log c = 2.07\,918$$
$$c = 120.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

Théorèmes fondamentaux.

[Relations entre les angles et les côtés d'un triangle quelconque.]

47. Théorème I. — *Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Soient les deux triangles quelconques ABC; menons les hauteurs CD. Désignons par a, b, c, les côtés opposés aux angles A, B, C, et par h la hauteur.

On a, dans les deux figures, (N° 17)

$$\frac{h}{b} = \sin A \quad (1).$$

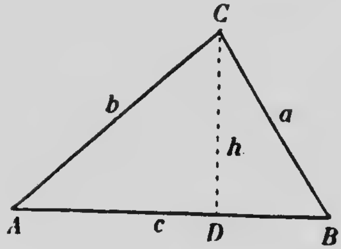


Fig. 17.

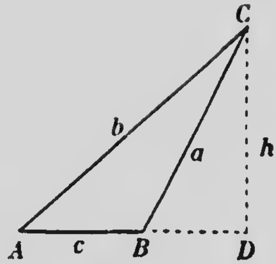


Fig. 18.

Dans le premier triangle, on a

$$\frac{h}{a} = \sin B \quad (2);$$

dans le second, on a de même (N° 16)

$$\frac{h}{a} = \sin(180° - B) = \sin B.$$

De l'égalité (1), on tire $h = b \sin A$.

De l'égalité (2), on tire $h = a \sin B$;

d'où $a \sin B = b \sin A$;

d'où aussi la proportion $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

En abaissant des perpendiculaires des sommets A et B sur les côtés opposés, on trouverait :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

et

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C};$$

d'où la relation $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. **[9]**

48. Théorème II. — *Le carré d'un côté quelconque d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces derniers par le cosinus de l'angle compris.*

1° *Le côté est opposé à un angle aigu.*

Soient les deux triangles quelconques ABC.

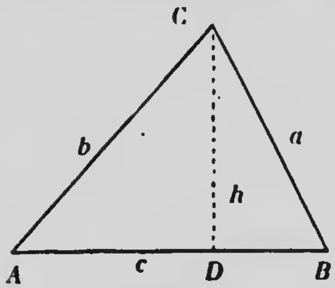


Fig. 19.

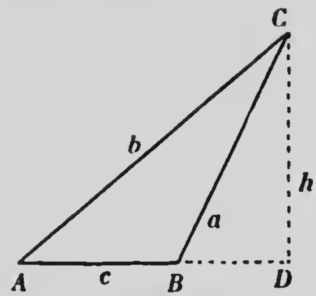


Fig. 20.

Si, dans ces deux triangles, on considère le côté a,

on a $$a^2 = h^2 + \overline{BD}^2.$$

Dans le 1[er] triangle, $BD = c - AD$.

Dans le 2[e] triangle, $BD = AD - c$.

En élevant au carré chacune de ces égalités, on obtient, dans les deux triangles,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2c \times AD + c^2.$$

Par conséquent, $a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 - 2c \times AD + c^2$.

Mais, $h^2 + \overline{AD}^2 = b^2$, et $AD = b \cos A$ (N° 37);

donc,
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A\,. \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B\,, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\,. \end{aligned}\right\} \quad [\mathbf{10}]$$
(On aurait de même pour la deuxième ligne.)

2° *Le côté est opposé à un angle obtus.*

Dans le triangle, fig. 20, $b^2 = h^2 + \overline{AD}^2$,

$$AD = BD + c,$$
$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + 2c \times BD + c^2 ;$$
mais $\overline{BD}^2 = a^2 - h^2$,
et $BD = a \cos DBC = -a \cos B$ (N° 16) ;
d'où $\overline{AD}^2 = a^2 - h^2 - 2ac \cos B + c^2$,
et $b^2 = h^2 + a^2 - h^2 - 2ac \cos B + c^2$
$= a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$

(Voir *Eléments de Géométrie,* N° 179.)

Calcul des angles et des côtés.

49. — La formule [9] permet de résoudre un triangle lorsqu'on connaît :

1° Un côté et deux angles (1er Cas) ;
2° Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux (2e Cas).

Les formules [10] permettent de le résoudre quand on connaît :

1° Deux côtés et l'angle compris (3e Cas) ;
2° Les trois côtés (4e Cas).

1er Cas.

On connaît un côté et deux angles.

50. Exemple : Résoudre le triangle ABC, étant donnés a, A, B.

Il s'agit de trouver l'angle C et les côtés b et c.

$$C = 180° - (A + B).$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}; \qquad \text{d'où} \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}; \qquad \text{d'où} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Application. — Si $a = 795$, $A = 79° 59'$, $B = 44° 41'$, calculer C, b, c.

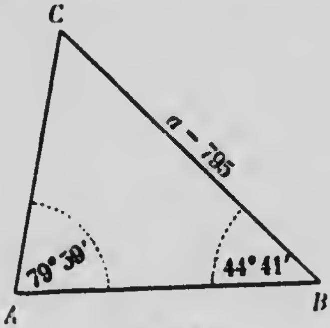


Fig. 21.

$$C = 180° - (79° 59' + 44° 41') = 55° 20';$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{795 \times 0.7032}{0.9848} = 567.68;$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{795 \times 0.8225}{0.9848} = 663.98.$$

Solution par logarithmes :

$$\log b = \log a + \log \sin B + \text{colog} \sin A$$

$$\log a = 2.90\,037$$
$$\log \sin B = \bar{1}.84\,707$$
$$\text{colog} \sin A = 0.00\,667$$

$$\log b = 2.75\,411$$
$$b = 567.69$$

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{colog} \sin A$$

$$\log a = 2.90\,037$$
$$\log \sin C = \bar{1}.91\,512$$
$$\text{colog} \sin A = 0.00\,667$$

$$\log c = 2.82\,216$$
$$c = 663.99.$$

2ᵉ Cas.

On connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

51. Exemple : Résoudre un triangle ABC, a, b et A étant connus.

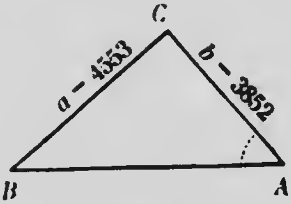


Fig. 22.

Il s'agit de trouver B, C, c.

De $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

on tire $$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

$$C = 180° - (A + B).$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \qquad \text{d'où} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Application. — Si $a = 4\,553$, $b = 3852$ et $A = 51° 9' 16''$, calculer B, C, c.

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A + \operatorname{colog} a \qquad \log c = \log a + \log \sin C + \operatorname{colog} \sin A$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3.58\,569 & \log a &= 3.65\,830 \\ \log \sin A &= \bar{1}.89\,143 & \log \sin C &= \bar{1}.99\,963 \\ \operatorname{colog} a &= \bar{4}.34\,170 & \operatorname{colog} \sin A &= 0.10\,857 \\ \log \sin B &= \bar{1}.\,81\,882 & \log c &= 3.76\,650 \\ B &= 41°\,13'. & c &= 5\,841\,. \end{aligned}$$

$$C = 180° - (51°\,9'\,16'' + 41°\,13') = 87°\,37'\,44''.$$

3e Cas.

On connaît deux côtés et l'angle compris.

52. — On calcule d'abord le 3e côté au moyen des valeurs des Rapports trigonométriques, en employant l'une des formules [10]; puis, on trouve un des deux angles inconnus au moyen des formules [9]. Le troisième sera évidemment la différence entre 180° et la somme des deux autres.

53. Remarque. — Il sera préférable de calculer d'abord le plus petit des angles inconnus, en se basant sur le principe qu'au plus petit côté est opposé le plus petit angle. On évitera ainsi l'alternative de choisir entre deux angles, l'un plus petit et l'autre plus grand que 90°, ayant le même sinus.

Exemple : Si $a = 48$, $b = 34$, $C = 37° 28'$, calculer c, A, B.

De la formule [10] $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

on tire

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}\,.$$

De la formule [9] $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

on tire $\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}$.

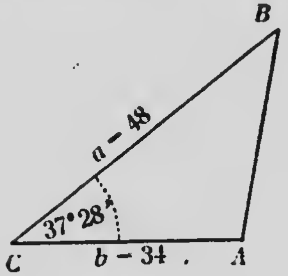


Fig. 23.

On a, d'autre part,

$$A = 180° - (B + C)\,.$$

Pour l'exemple ci-dessus,

$$c = \sqrt{48^2 + 34^2 - 2 \times 48 \times 34 \times 0.7937}$$
$$= \sqrt{869.3632} = 29.48;$$

$$\sin B = \frac{34 \times 0.6083}{29.48} = 0.7016,$$

d'où $B = 44° 33'$,

$$A = 180° - (37° 28' + 44° 33') = 97° 59'.$$

4e Cas.

On connaît les trois côtés.

54. — On peut faire usage des formules [10] pour trouver les trois angles; ou bien, après avoir calculé le premier, on peut se servir des formules [9] pour trouver l'un des deux autres, le troisième sera évidemment la différence entre 180° et la somme des deux premiers.

Exemple : $a = 42$, $b = 52$, $c = 62$, calculer A, B, C.

De la formule [10]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

on tire

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2; \text{ d'où}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad [11]$$

$$= \frac{52^2 + 62^2 - 42^2}{2 \times 52 \times 62}$$

$$= 0.7419.$$

$$A = 42° 6'.$$

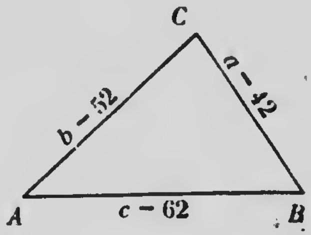


Fig. 24.

De la formule [9] $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$,

on tire $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a} = \dfrac{52 \times 0.6704}{42} = 0.8300$;

$$B = 56° 6';$$

$$C = 180° - (42° 6' + 56° 6')$$
$$= 81° 48'.$$

Calcul du rayon du cercle circonscrit.

55. — Il existe une relation intéressante entre les rapports égaux de la formule [9] et le diamètre du cercle circonscrit.

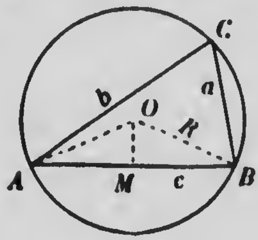


Fig. 25.

Soit le triangle ABC; dans le cercle circonscrit, menons les rayons OA, OB et la perpendiculaire OM à AB.

Les deux angles AOB et ACB interceptent le même arc; l'angle au centre O égale donc $2C$, et l'angle AOM égale l'angle C; dans le triangle AOM, on a

$$AM = OA \sin AOM = R \sin C,$$

mais $$AM = \frac{c}{2} \text{ (\textit{Elém. de Géom.}, N° 124)};$$

d'où $$c = 2R \sin C.$$

On aurait aussi $$a = 2R \sin A,$$

et $$b = 2R \sin B;$$

d'où la relation $$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad [12]$$

Le rapport d'un côté quelconque d'un triangle au sinus de l'angle opposé est donc égal au diamètre du cercle circonscrit.

Calcul de la médiane.

56. — Si l'on connaît les trois côtés du triangle, on emploie les formules trouvées en géométrie (*Eléments de Géométrie*, N^{os} 182-186).

$$m = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}};$$

$$m' = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4}};$$

$$m'' = \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

Si l'on connaît les côtés et les angles, on emploie les formules [10].

Soit à calculer la médiane CM; on aura, pour $a = 24$, $c = 28$ et $B = 72°$:

$$m^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ac \cos 72°$$
$$= 24^2 + 14^2 - 24 \times 28 \times 0.3090;$$
$$m = \sqrt{564.352} = 23.75 .$$

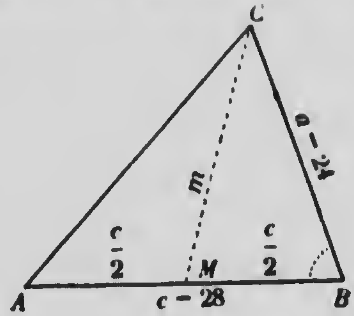


Fig. 26.

Calcul de la surface d'un triangle.

57. — On peut trouver directement la surface d'un triangle si l'on connaît :

1° Deux côtés et l'angle compris.
2° Deux angles et un côté quelconque.
3° Trois côtés.

1er Cas.

On connaît deux côtés et l'angle compris.

58. — La surface de tout triangle est exprimée par le demi-produit de la base par la hauteur.

Si c est la base et h la hauteur,

$$S = \tfrac{1}{2}ch .$$

Or, $\quad h = a \sin B;$

donc, $\quad S = \tfrac{1}{2}ac \sin B .$
De même, $\quad S = \tfrac{1}{2}bc \sin A ,$ **[13]**
et $\quad S = \tfrac{1}{2}ab \sin C .$

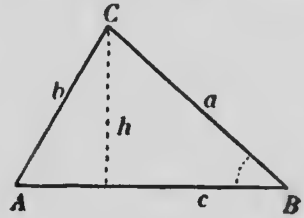


Fig. 27.

Application. — Si l'on a $a = 18.75$ pi., $c = 21.25$ pi., $B = 34°\ 25'$, on peut écrire :

$$S = \frac{18.75 \times 21.25 \times \sin 34°\ 25'}{2}$$

$$= \frac{18.75 \times 21.25 \times 0.5652}{2}$$

$$= 112.598 \text{ pi. carrés.}$$

Calcul par logarithmes :

$$\begin{aligned} \log 18.75 &= 1.27\,300 \\ \log 21.25 &= 1.32\,736 \\ \log \sin 34°\ 25' &= \overline{1}.75\,221 \\ \text{colog } 2 &= \overline{1}.69\,897 \\ \hline \log S &= 2.05\,154 \\ S &= 112.6 \text{ pi. carrés.} \end{aligned}$$

2^e Cas.

On connaît deux angles et un côté quelconque.

59. — Si deux angles sont connus, le troisième peut être aisément calculé.

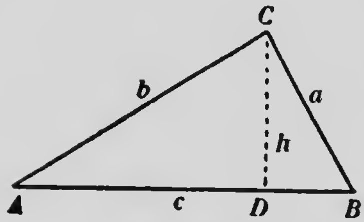


Fig. 28.

Supposons que le côté a et les deux angles adjacents B et C soient connus.

On a $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$;

d'où, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.

On a aussi $h = a \sin B$;

donc

$$S = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} \times \frac{a \sin C}{\sin A} \times a \sin B.$$

$$= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Mais $\sin A = \sin(B + C)$, car $(B + C) = 180° - A$;

donc $$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)}. \qquad \textbf{[14]}$$

REMARQUE. — La formule $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ peut être employée lorsqu'on a la valeur des trois angles; il vaut mieux se servir de la formule [14] lorsque l'on connaît les angles adjacents au côté donné; on peut ainsi se dispenser de chercher le troisième angle.

Application. — Soient $a = 28.34$ chaînes, $B = 59° 36'$, $c = 87° 15'$.

On a $$S = \frac{28.34^2 \times \sin 59° 36' \times \sin 87° 15'}{2 \sin 146° 51'}.$$
$$= \frac{28.34^2 \times 0.8625 \times 0.9988}{2 \times 0.5468}$$
$= 632.68$ chaînes carrées.

Calcul par logarithmes : $\log 28.34 = 1.45\,240$

$$\begin{aligned}
2 \log 28.34 &= 2.90\,480 \\
\log \sin 59° 36' &= \bar{1}.93\,577 \\
\log \sin 87° 15' &= \bar{1}.99\,950 \\
\operatorname{colog} 2 &= \bar{1}.69\,897 \\
\operatorname{colog} \sin 146° 51' &= 0.26\,215 \\
\hline
\log S &= 2.80\,119 \\
S &= 632.70 \text{ chaînes carrées} \\
& \quad \text{ou } 63.27 \text{ Acres.}
\end{aligned}$$

3ᵉ Cas.

On connaît les trois côtés.

60. — On peut employer la formule trouvée en géométrie (*Eléments de Géométrie,* N° 216), dans laquelle p désigne le demi-périmètre :

$$S = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,. \qquad \textbf{[15]}$$

Application. — Soit le triangle ABC (fig. 24, N° 54) dans lequel $a = 42$, $b = 52$, $c = 62$.

On a
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{42+52+62}{2} = 78;$$
$$p - a = 78 - 42 = 36;$$
$$p - b = 78 - 52 = 26;$$
$$p - c = 78 - 62 = 16.$$
$$S = \sqrt{78 \times 36 \times 26 \times 16}$$
$$= \sqrt{26^2 \times 36 \times 16 \times 3}$$
$$= 26 \times 6 \times 4\sqrt{3} = 1\,080.7992.$$

Il est préférable d'employer le calcul logarithmique lorsque les nombres qui expriment les côtés ont plus de deux chiffres. La formule
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
permet d'écrire :
$$\log S = \tfrac{1}{2}[\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)].$$

Remarque I. — Cette formule peut être trouvée directement par la trigonométrie en transformant la formule [13], $S = \frac{1}{2}bc \sin A$; mais pour y arriver, il faut connaître les formules ayant trait à la multiplication des arcs, ce qui ne sera étudié quo dans le chapitre suivant, N° 74.

Remarque II. — Connaissant la surface, il est facile de calculer les angles.

Les formules [13] donnent
$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \sin B = \frac{2S}{ac}, \quad \sin C = \frac{2S}{ab} \quad [\mathbf{16}].$$

On a
$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.30\,103 \\ \log S &= 3.03\,375 \\ \text{colog } b &= \bar{2}.28\,400 \\ \text{colog } c &= \bar{2}.20\,761 \\ \hline \log \sin A &= \bar{1}.82\,639\,; \\ A &= 42^\circ\, 6'\, 15''. \end{aligned}$$

$$\log 2 = 0.30\,103$$
$$\log S = 3.03\,375$$
$$\operatorname{colog} a = \bar{2}.37\,675$$
$$\operatorname{colog} c = \bar{2}.20\,671$$

$$\log \sin B = \bar{1}.91\,914\ ;$$
$$B = 56°\ 6'\ 40''.$$

$$\log 2 = 0.30\,103$$
$$\log S = 3.03\,375$$
$$\operatorname{colog} a = \bar{2}.37\,675$$
$$\operatorname{colog} b = \bar{2}.28\,400$$

$$\log \sin C = \bar{1}.99\,553\ ;$$
$$C = 81°\ 47'\ 20''.$$

$$\text{Preuve :}\quad \begin{array}{r} 42°\ \ 6'\,15'' \\ +\ 56°\ \ 6'\,40'' \\ +\ 81°\ 47'\,20'' \\ \hline 180°\ 00'\,15''. \end{array}$$

Résultat satisfaisant pour des Tables à cinq décimales.

APPLICATION DE LA TRIGONOMETRIE A LA GEOMETRIE.

61. Problème I. — *Déterminer une hauteur dont le pied est accessible.*

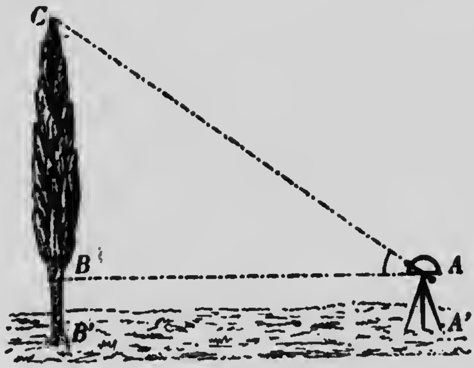


Fig. 29.

On mesure la base $A'B' = AB$ et l'angle BAC (*Eléments de Géométrie*, N° 322).

Soient $AB = 146\frac{3}{4}$ pi.

et $BAC = 24° 30'$.

On a (N° 38) :

$$\begin{aligned} BC &= AB \text{ tg } BAC \\ &= 146.75 \text{ tg } 24° 30' \\ &= 146.75 \times 0.4557 = 66.87 \text{ pieds.} \end{aligned}$$

Calcul par logarithmes :

$$\begin{aligned} \log 146.75 &= 2.16\,658 \\ \log \text{tg } 24° 30' &= \bar{1}.65\,870 \\ \hline \log BC &= 1.82\,528 \end{aligned}$$

$$BC = 66.87 \text{ pieds.}$$

Pour avoir la hauteur $B'C$, il faut ajouter à BC la hauteur de l'instrument, $AA' = BB'$.

62. Problème II. — *Déterminer une hauteur dont le pied est inaccessible.*

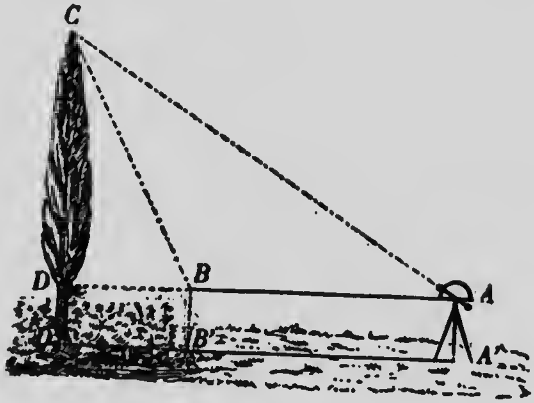


Fig. 30.

On mesure la base $A'B' = AB$, puis l'angle BAC et l'angle CBA, ou le supplément CBD de ce dernier (*Eléments de Géométrie*, N° 323).

Soient $AB = 45\frac{1}{2}$ pieds, $BAC = 35° 25'$, $CBA = 118° 15'$. On a :

angle $CBD = 180° - 118° 15' = 61° 45'$;
angle $BCA = 180° - (118° 15' + 35° 25') = 26° 20'$.

Le triangle ABC donne (N° 47) :

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AB}{\sin BCA};$$

d'où $$BC = \frac{AB \sin BAC}{\sin BCA}.$$

Mais le triangle rectangle CDB donne (N° 37) :

$$CD = BC \sin CBD.$$

En remplaçant BC par sa valeur $\dfrac{AB \sin BAC}{\sin BCA}$, on a :

$$CD = \frac{AB \sin BAC \sin CBD}{\sin BCA}$$

$$= \frac{45.5 \sin 35° \, 25' \sin 61° \, 45'}{\sin 26° \, 20'}$$

$$= \frac{45.5 \times 0.5795 \times 0.8809}{0.44356} = 52.36 \text{ pieds.}$$

Calcul par logarithmes :

$$\begin{aligned} \log 45.5 &= 1.65\,801 \\ \log \sin 35° \, 25' &= \bar{1}.76\,307 \\ \log \sin 61° \, 45' &= \bar{1}.94\,492 \\ \text{colog} \sin 26° \, 20' &= 0.35\,302 \\ \hline \log CD &= 1.71\,902 \\ CD &= 52.262 \text{ pieds.} \end{aligned}$$

On ajoutera à CD la hauteur de l'instrument $AA' = DD'$.

63. Problème III. — *Déterminer la distance qui sépare deux points* A *et* B, *dont l'un est inaccessible.*

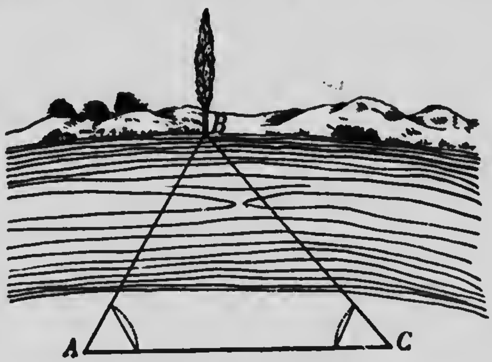


Fig. 31.

On prend une base quelconque AC et l'on mesure en A et en C les angles formés par cette ligne avec AB et BC (*Eléments de Géométrie,* N° 318).

Soient $AC = 1\,020$ pi., $A = 67° \, 20'$, $C = 54° \, 15'$.

On a, par suite,

$$B = 180° - (67° 20' + 54° 15')$$
$$= 180° - 121° 35' = 58° 25'.$$

Le triangle ABC donne (N° 47) :

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B};$$

d'où
$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{1\,020 \sin 54° 15'}{\sin 58° 25'}$$
$$= \frac{1\,020 \times 0.8116}{0.8519} = 971.7 \text{ pieds.}$$

Calcul par logarithmes :

$$\begin{aligned} \log 1\,020 &= 3.00\,860 \\ \log \sin 54° 15' &= \bar{1}.90\,933 \\ \text{colog} \sin 58° 25' &= 0.06\,962 \\ \hline \log AB &= 2.98\,755 \\ AB &= 971.74 \text{ pieds.} \end{aligned}$$

64. Problème IV. — *Déterminer la distance qui sépare deux points* A *et* B *inaccessibles.*

On prend une base CD et on mesure en C et D les quatre angles ACD, BCD, BDC, ADC (*Eléments de Géométrie*, N° 319).

Soient
$$\begin{aligned} CD &= 6\,500 \text{ pieds,} \\ ACD &= 109° 20', \\ BCD &= 41° 50', \\ BDC &= 100° 10', \\ ADC &= 40° 25'. \end{aligned}$$

Pour trouver AB, il suffit de connaître, dans le triangle ADB, les côtés AD et BD et l'angle compris ADB.

1° *Calcul de* ADB.

On a :
$$ADB = BDC - ADC$$
$$= 100° 10' - 40° 25' = 59° 45'.$$

2° *Calcul de* AD *dans le triangle* ACD.

Le triangle ACD donne (N° 47) :

$$\frac{AD}{\sin ACD} = \frac{CD}{\sin CAD},$$

ou $$\frac{AD}{\sin 109° 20'} = \frac{6500}{\sin 180° - (40° 25' + 109° 20')},$$

ou $$\frac{AD}{\sin 109° 20'} = \frac{6500}{\sin 30° 15'};$$

d'où $$AD = \frac{6500 \sin 109° 20'}{\sin 30° 15'}$$

$$= \frac{6500 \times 0.9436}{0.5038}$$

$$= 12\,174 \text{ pieds.}$$

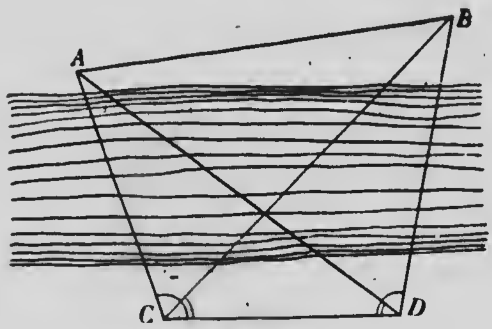


Fig. 32.

Calcul par logarithmes :

$$\log 6\,500 = 3.81\,291$$
$$\log \sin 109° 20' = \bar{1}.97\,479$$
$$\text{colog} \sin 30° 15' = 0.29\,776$$
$$\log AD = 4.08\,546$$
$$AD = 12\,175 \text{ pieds.}$$

3° *Calcul de* BD *dans le triangle* BDC.

On a, dans ce triangle (N° 47) :

$$\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{CD}{\sin CBD},$$

ou
$$\frac{BD}{\sin 41° 50'} = \frac{6500}{\sin 180° - (100° 10' + 41° 50')},$$

ou
$$\frac{BD}{\sin 41° 50'} = \frac{6500}{\sin 38°};$$

d'où
$$BD = \frac{6500 \sin 41° 50'}{\sin 38°}$$

$$= \frac{6500 \times 0.6670}{0.6157} = 7\,041.6 \text{ pieds.}$$

Calcul par logarithmes :

$$\begin{aligned} \log 6\,500 &= 3.81\,291 \\ \log \sin 41° 50' &= \bar{1}.82\,410 \\ \text{colog} \sin 38° &= 0.21\,066 \\ \hline \log BD &= 3.84\,767 \\ BD &= 7\,041.6 \text{ pieds.} \end{aligned}$$

4° *Calcul de* AB *dans le triangle* ADB.

On a (N° 48) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2AD \times BD \cos ADB$$

$$= 12174^2 + 7041.6^2 - 2 \times 12174 \times 7041.6 \times \cos 59° 45'$$

$$= 12174^2 + 7041.6^2 - 2 \times 12174 \times 7041.6 \times 0.5038$$

$$= 111\,414\,462 \text{ (1)};$$

$$AB = \sqrt{111\,414\,462} = 10\,555 \text{ pieds.}$$

---

(1) Ce nombre est le résultat qu'on obtient en effectuant les calculs indiqués; comme la valeur du *cosinus* est donnée à $\frac{1}{10000}$ près, il ne contient que quatre chiffres *sûrement exacts* (Nos 36 et 42, Rem.) : on pourrait se contenter d'écrire 111 410 000 et d'extraire la racine carrée de ce nombre.

Calcul par logarithmes :

Calcul de $\overline{AD}^2$

$$2 \log AD = 8.17\,092$$
$$\overline{AD}^2 = 148\,230\,000$$

Calcul de $\overline{BD}^2$

$$2 \log BD = 7.69\,534$$
$$\overline{BD}^2 = 49\,584\,000$$

On a donc $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 197\,814\,000$

Calcul de $2AD \times BD \cos ADB$

$$\log 2 = 0.30\,103$$
$$\log AD = 4.08\,546$$
$$\log BD = 3.84\,767$$
$$\log \cos 59° 45' = \bar{1}.70\,224$$

$$\log 2AD \times BD \cos ADB = 7.93\,640$$
$$2AD \times BD \cos ADB = 86\,377\,000$$

Donc $\overline{AB}^2 = 111\,437\,000$

$$2 \log AB = 8.04\,703$$
$$\log AB = 4.02\,351$$
$$AB = 10\,556 \text{ pieds.}$$

Remarque. — On trouverait les mêmes résultats en calculant AB dans le triangle ACB; il faudrait déterminer AC, BC et l'angle ACB.

EXERCICES

CALCUL LOGARITHMIQUE

Trouver le logarithme de :

129. 1° sin 38°;
2° sin 34° 28';
3° sin 44° 31' 25".

130. 1° sin 22° 18' 20";
2° cos 49° 28';
3° cos 54° 32' 15".

131. 1° cos 49° 54' 40";
2° tg 32° 15' 45";
3° tg 64° 29' 18".

132. 1° tg 9° 44' 28";
2° cotg 72° 57' 50";
3° cotg 69° 56' 56".

133. 1° cotg 89° 25' 15";
2° sin 12° 12' 12";
3° cos 77° 47' 48".

134. 1° cos 32° 28' 18";
2° tg 17° 2' 17";
3° cotg 48° 4' 5".

135. 1° cotg 29° 10' 22";
2° cos 36° 15' 12";
3° sin 28° 39'.

136. 1° cos 45° 30' 30";
2° sin 28° 7' 40";
3° cos 12° 40' 35".

137. 1° tg 24° 27' 24";
2° cotg 36° 15' 20";
3° sin 42° 0' 30".

138. 1° cos 75° 31' 8";
2° tg 41° 41' 41";
3° cotg 48° 18' 19".

Les logarithmes des rapports trigonométriques étant donnés, trouver l'angle A.

N. B. — Les logarithmes donnés ont une caractéristique augmentée de 10; les récrire d'abord avec la vraie caractéristique.

139. 1° $\log \sin A = 9.67\,315$;
2° $\log \sin A = 9.94\,277$;
3° $\log \cos A = 9.95\,653$.

140. 1° $\log \cos A = 9.88\,993$;
2° $\log \operatorname{tg} A = 10.08\,454$;
3° $\log \operatorname{tg} A = 10.49\,308$.

141. 1° $\log \operatorname{cotg} A = 10.50\,539$;
2° $\log \operatorname{cotg} A = 10.04\,343$;
3° $\log \sin A = 9.69\,066$.

142. 1° $\log \cos A = 9.70\,661$;
2° $\log \operatorname{tg} A = 9.79\,093$;
3° $\log \operatorname{cotg} A = 9.80\,718$.

143. 1° $\log \operatorname{cotg} A = 10.02\,867$;
2° $\log \operatorname{tg} A = 9.35\,090$;
3° $\log \sin A = 9.31\,576$.

144. 1° $\log \cos A = 9.98\,452$;
2° $\log \sin A = 9.80\,320$;
3° $\log \operatorname{tg} A = 10.10\,134$.

145. 1° $\log \operatorname{cotg} A = 10.64\,011$;
2° $\log \sin A = 9.99\,866$;
3° $\log \sin A = 9.90\,151$.

146. 1° $\log \operatorname{tg} A = 9.18\,854$;
2° $\log \operatorname{cotg} A = 9.28\,865$;
3° $\log \cos A = 9.72\,843$.

RESOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

Certains éléments d'un triangle rectangle étant donnés, calculer les autres.

147. $A = 43°\,38'$;
$c = 156$.

148. $A = 31°\,17'\,30''$;
$c = 275$.

149. $A = 31^\circ\ 45'$; $a = 4\,804$.

150. $A = 61^\circ\ 48'$; $a = 857$.

151. $c = 6\,500$; $a = 3\,008$.

152. $c = 372$; $a = 210$.

153. $a = 546$; $b = 836$.

154. $a = 2\,402$; $b = 3\,880$.

155. $A = 13^\circ\ 35'$; $b = 90.80$.

156. $A = 81^\circ\ 30'$; $b = 3\,104$.

157. $A = 48^\circ\ 36'\ 25''$; $c = 148$.

158. $A = 38^\circ\ 58'$; $a = 136.9$.

159. $c = 62$; $b = 35$.

160. $c = 244$; $b = 175$.

161. $a = 4\,877$; $b = 3\,255$.

162. $A = 23^\circ\ 30'$; $c = 627$.

163. $c = 3\,133$; $a = 1\,120$.

164. $A = 56^\circ\ 3'$; $a = 35.89$.

165. $c = 4\,596$; $a = 109.50$.

166. $A = 22^\circ\ 59'$; $b = 4\,921$.

167. $a = 1\,698$; $b = 7\,834$.

168. $a = 637$; $b = 7\,946$.

169. $A = 66^\circ\ 51'$; $b = 7\,548$.

170. $A = 27^\circ\ 50'$; $a = 78$.

171. $B = 39^\circ\ 58'$; $b = 88$.

172. $B = 35^\circ\ 29'$; $c = 584$.

173. $B = 34^\circ\ 1'$; $a = 40$.

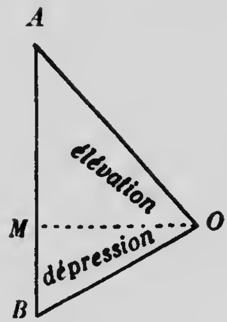
174. $b = 386$; $c = 975$.

175. $B = 51^\circ\ 19'\ 15''$; $b = 7\,174$.

176. $A = 41^\circ\ 41'\ 46''$; $c = 4\,266$.

Problèmes.

N. B. — Dans les problèmes suivants, on appellera *angle d'élévation* ou bien *angle de dépression,* l'angle que forme une ligne menée de l'œil à l'objet avec une ligne horizontale menée dans le même plan vertical.



Ainsi, pour un observateur se trouvant en O, *l'angle AOM* est *l'angle d'élévation* du point A et l'angle BOM, *l'angle de* dépression du point B.

177. Une échelle de 65 pieds atteint un point situé à 52 pieds de terre. Quel angle fait-elle avec la terre?

178. D'un point situé à 480 pieds de la base d'un monument, l'angle d'élévation du sommet de ce monument est de 28°. Quelle en est la hauteur?

179. Deux points M, N, sont choisis sur les bords opposés d'un étang. On mène, sur l'une des rives, au point M, une ligne MP, de 375 verges, perpendiculaire à MN. Si l'angle $NPM = 50°$, calculer la largeur de l'étang.

180. Du sommet d'une tour, l'angle de dépression d'un objet situé à 750 pieds de la base de cette tour, et sur le même plan horizontal, est de 15°. Trouver la hauteur de la tour.

181. Une échelle a une longueur de 65 pieds. On la dresse contre une maison, et elle atteint une fenêtre située à une hauteur de 39 pieds. On la dresse ensuite, sans en déplacer le pied, contre une autre maison, située en face de la première et elle atteint à une hauteur de 25 pieds. Quelle est la distance entre les deux maisons, et quels angles fait l'échelle avec les maisons?

182. Du haut d'une falaise qui se dresse verticalement à une hauteur de 489 pieds, l'angle de dépression d'un bateau est de 24°. A quelle distance du pied de la falaise se trouve le bateau?

183. Si une tour de 150 pieds de hauteur projette une ombre de 87.50 pieds, quel est l'angle d'élévation du soleil?

184. En face d'une fenêtre située à 30 pieds de terre, se trouve une plate-bande de 9 pieds de largeur. Quelle est la longueur de l'échelle qui irait du bord de la plate-bande à la fenêtre? (Calculer au moyen des angles.)

185. Les angles de dépression de deux objets vus du sommet d'une colline et situés au niveau du pied de la colline sont de 5° et 15°. Calculer la hauteur de la colline, si la distance qui sépare ces objets est de 840 verges.

186. L'angle d'élévation d'une colline, mesuré d'un certain point, est de 36°; mesuré d'un autre point plus rapproché de 750 pieds du pied de la colline, l'angle est de 48°. Trouver la hauteur de la colline.

187. Une route a une inclinaison de 7° 30'. Si une personne fait un mille sur cette route, de combien de pieds aura-t-elle monté ou descendu?

188. Chacun des côtés égaux d'un triangle isocèle mesure 75 pieds; si les angles égaux ont 65° 30' 20", calculer le troisième côté et la hauteur correspondante.

189. Les côtés égaux d'un triangle isocèle ont 143 pieds et le troisième 110; calculer les angles et la hauteur abaissée sur le troisième côté.

190. Dans un triangle isocèle, la hauteur est de 145 verges, et les angles opposés aux côtés égaux mesurent 75° 34'. Calculer les trois côtés.

191. La base et la hauteur d'un triangle isocèle ont 81 verges et 180 verges. Calculer les angles et les côtés égaux.

192. Le côté d'un triangle équilatéral est de 24 pi. Calculer le rayon du cercle inscrit et celui du cercle circonscrit.

193. La hauteur d'un triangle équilatéral est de 100 verges. Calculer le côté de ce triangle.

194. Calculer la corde d'un arc de 54° 26', dans un cercle de 248 verges de rayon.

195. Une corde de 26 verges sous-tend un arc de 22° 34' 20"; calculer le rayon du cercle.

196. Le côté d'un décagone régulier égale 64 verges; calculer le rayon du cercle circonscrit et l'apothème du décagone.

197. L'apothème d'un hexagone régulier est de 18 verges. Calculer le rayon du cercle circonscrit et le côté de l'hexagone.

198. Calculer le côté et l'apothème d'un décagone régulier, si le rayon du cercle circonscrit est de 15 verges.

199. Deux individus, placés à 1 500 verges l'un de l'autre et se faisant face, mesurent au même instant les angles d'élévation d'un ballon situé dans le même plan vertical qu'eux, et trouvent que ces angles sont de 58° et 75°. A quelle hauteur se trouve le ballon? On suppose que les observateurs sont situés sur le même plan horizontal.

200. La cheminée d'une usine surpasse de 55 pieds le toit de cette usine. D'un certain point, sur le même plan horizontal que la base d'observation, les angles d'élévation du sommet de la cheminée et du toit de l'usine sont de 74° et 57°. Trouver la hauteur de l'usine.

RESOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

A l'aide des éléments connus d'un triangle, calculer les autres. Calculer aussi la surface.

201. $a = 5\,569$; $A = 54°\,27'$; $C = 47°\,14'$.

202. $b = 1\,603$; $A = 52°\,9'$; $B = 70°\,55'$.

203. $c = 205$; $B = 141°\,59'$; $C = 12°\,49'$.

204. $a = 93$; $A = 60°\,5'$; $B = 63°\,7'$.

205. $a = 420$; $b = 636$; $B = 146°\,15'\,26''$.

206. $b = 88$; $c = 104.2$; $B = 57°\,37'\,17''$.

207. $a = 27.43$; $c = 22.428$; $A = 118°\,56'$.

208. $b = 124$; $A = 65°\,15'$; $B = 79°\,3'$.

209. $a = 726$;
$b = 2\,301$;
$B = 36° 53' 2''$.

210. $b = 4\,553$;
$c = 3\,333$;
$B = 54° 31' 13''$.

211. $c = 550$;
$A = 46° 36'$;
$C = 10° 12'$.

212. $a = 500$;
$B = 37° 58'$;
$C = 65° 2'$.

213. $a = 35.42$;
$B = 48° 52' 13''$;
$C = 75° 18' 25''$.

214. $a = 534.62$;
$b = 345.18$;
$A = 58° 17' 36''$.

215. $a = 3\,429$;
$b = 2\,743$;
$B = 46° 30'$.

216. $a = 4\,957$;
$b = 9\,406$;
$A = 28° 33' 55''$.

Deux côtés et l'angle compris étant donnés, calculer les autres éléments du triangle et sa surface.

217. $a = 53$;
$b = 67$;
$C = 72° 41'$.

218. $a = 95$;
$b = 170$;
$C = 133° 10'$.

219. $b = 79$;
$c = 107$;
$A = 71° 35'$.

220. $a = 357$;
$c = 706$;
$B = 81° 10' 30''$.

221. $a = 1\,834$;
$c = 1\,355$;
$B = 14° 34' 24''$.

222. $b = 2\,345$;
$c = 3\,079$;
$A = 21° 16' 20''$.

223. $a = 289$;
$b = 204$;
$C = 59° 17'$.

224. $b = \sqrt{6}$;
$c = \sqrt{7}$;
$A = 51° 53'$.

Calculer les angles des triangles dont les côtés sont :

225. $a = 650$; $b = 736$; $c = 914$.

226. $a = 321$; $b = 361$; $c = 402$.

227. $a = 73$; $b = 91$; $c = 82$.

228. $a = 58$; $b = 156$; $c = 202$.

229. $a = 77$; $b = 56$; $c = 63$.

230. $a = 68$; $b = 38$; $c = 98$.

231. $a = 24$; $b = 32$; $c = 40$.

232. $a = 340$; $b = 220$; $c = 156$.

Problèmes.

233. Dans un triangle, $A = 72°$, $B = 78°$ et $c = 12$ pouces. Trouver le diamètre du cercle circonscrit.

234. Quel est le diamètre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral dont le côté est de 37 pieds?

235. L'angle du sommet d'un triangle isocèle est de 18°. Si les deux côtés égaux mesurent 24 pieds, quel est le diamètre du cercle circonscrit?

236. Deux côtés d'un triangle ont 600 pieds et 240 pieds, l'angle compris est de 150°; calculer la surface de ce triangle.

237. Trouver la surface d'un triangle dont les côtés ont 342 verges, 408 verges et 390 verges.

238. Un côté d'un triangle mesure 30 pieds, les angles adjacents ont 22° 30' et 112° 30'; calculer la surface de ce triangle.

239. Si deux côtés d'un parallélogramme ont 84 pieds et

64 pieds, et si l'angle compris entre ces côtés est de 30°, trouver la surface du parallélogramme.

240. Dans un triangle, deux côtés ont 126 pi. et 153 pi., l'angle compris mesure 33° 18'. Trouver la surface.

241. Les bases d'un trapèze ont 114 et 218 verges, les angles formés par la grande base et les côtés non parallèles sont de 53° 49' et 67° 55'. Trouver la longueur de ces côtés.

242. Un champ triangulaire a un côté de 126 perches de longueur. Si les angles formés par ce côté avec les deux autres ont 43° et 76°, calculer les deux autres côtés.

243. Si une corde de 368 pieds sous-tend un arc de 63° 33', quel est le rayon du cercle?

244. Si les deux côtés d'un parallélogramme ont 71 et 128 verges et si la petite diagonale a 146 verges, quelle est l'autre?

245. Dans un triangle, un angle a 118° 50', et les côtés qui le forment sont dans le rapport de 6 à 11. Calculer les autres angles.

246. Une corde de 30 verges de longueur sous-tend un arc de 12° 32', calculer le rayon du cercle.

247. Une tour a une circonférence de 75 verges; deux tangentes à cette tour partent d'un même point en formant un angle de 24° 30'; on demande à quelle distance du centre de la tour ces tangentes se rencontrent.

248. Deux observateurs distants de 3 750 verges mesurent en même temps la hauteur d'un ballon, qui se trouve dans le plan vertical de la base d'observation; les angles d'élévation ont 78° et 62°; on demande la hauteur du ballon, les deux observateurs étant sur le même horizon.

249. Dans un cercle de 138 pieds de rayon, on veut inscrire un polygone régulier de 9 côtés : calculer la longueur du côté.

250. La latitude de Montréal est de 45° 32'. Quelle est la longueur du rayon du parallèle de latitude passant par cette ville, le rayon de la terre étant de 3 956 milles?

251. Du sommet d'une colline de 500 pieds de haut, l'angle de dépression d'un navire est de 77° 35'. A quelle distance du sommet de la colline se trouve ce navire?

252. Un édifice de 103 pieds de haut est situé sur le bord d'une rivière. Du sommet de l'édifice, l'angle de dépression d'un objet situé sur la rive opposée est de 34° 25'. Calculer la largeur de la rivière.

253. Un mât est placé au sommet d'un monticule haut de 20 pieds. Les angles d'élévation du pied et du sommet du mât sont de 30° et de 60°. Calculer la longueur de ce mât.

254. Deux observateurs, se faisant face, mesurent en même temps les angles d'élévation d'un nuage; ces angles sont de 44° 56' et 36° 4'. Si la hauteur du nuage est de 295 pieds, quelle distance sépare les observateurs?

255. Calculer la surface d'un parallélogramme dont les côtés ont 7 ch. 68 et 5 ch. 73, si l'angle compris mesure 47° 30'.

256. Deux côtés d'un triangle ont 6 ch. 19 et 3 ch. 39 et l'angle compris 46° 24'. Calculer la surface de ce triangle.

257. Les trois côtés d'un triangle mesurent 21 ch. 28, 24 ch. 56 et 18 ch. Trouver la surface.

258. Les diagonales d'un quadrilatère ont 102 ver. et 168 ver. Si elles se coupent en faisant un angle de 58°, trouver la surface du quadrilatère.

259. Calculer la surface d'un pentagone régulier dont le côté est de 75 verges.

260. Dans un cercle dont le rayon est de 134 verges, on inscrit un polygone régulier de 12 côtés. Calculer la longueur du côté.

261. Un heptagone régulier dont le côté est de 485 pieds est inscrit dans un cercle. Calculer le rayon de ce cercle.

262. La longueur de l'ombre donnée par un édifice est de 185 pieds, et celle donnée par la hampe d'un drapeau placé à son sommet est de 48 pieds. Si l'angle d'élévation du soleil à ce moment est de 40°, calculer la hauteur de l'édifice et celle du drapeau.

263. Les angles de dépression de deux objets vus du sommet d'une colline et séparés par une distance de 360 pieds sont de 19° et 25°; calculer la hauteur de la colline.

264. Une personne, marchant sur une route plane, remarque que de deux points séparés par un mille, les angles d'élévation d'une colline sont de 30° et 75°. Calculer la hauteur de la colline.

265. La parallaxe (1) horizontale de la lune est en moyenne de 57' 3''. Si le rayon de la terre est de 3 960 milles, quelle est la distance de la lune au centre de la terre?

266. Le diamètre du soleil vu de la terre sous-tend un arc de 32' 4''. Si la distance du soleil au centre de la terre est de 92 000 000 de milles, quel est le diamètre du soleil?

267. L'angle d'élévation d'une montagne est de 47°. Après avoir marché 1 000 verges vers le sommet sur un plan incliné de 32°, l'angle d'élévation du sommet est de 77°. Trouver la hauteur de la montagne au-dessus du premier point d'observation.

---

(1) Angle formé au centre d'un astre par une tangente à la terre et la ligne des centres de la terre et de cet astre.

CHAPITRE III (1)

ADDITION — SOUSTRACTION — MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARCS — RESOLUTION DES TRIANGLES — APPLICATIONS

ADDITION ET SOUSTRACTION DES ARCS

65. — *Calculer le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux arcs, connaissant le sinus et le cosinus de chacun de ces arcs.*

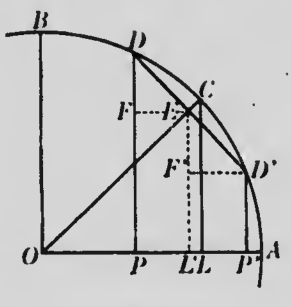


Fig. 33.

Soient les arcs $AC = a$, et $CD = b$.

Portons CD en CD'; nous avons

$AD = a + b$, $AD' = a - b$.

Menons le rayon OC et la corde DD'; abaissons DP, $D'P'$, CL et EL', perpendiculaires sur OA, et menons EF et $D'F'$ parallèles à OA.

Les triangles égaux $EF'D'$ et DFE donnent : $DF = EF'$, $EF = F'D' = L'P'$.

(1) Le programme du Baccalauréat classique et celui des Ecoles normales de la province de Québec ne comportent pas l'étude des formules relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division des arcs; cependant, à cause de leur importance pratique, nous avons cru bon d'en faire l'objet d'un chapitre spécial.

On a :

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a+b) &= DP = FP + DF = EL' + DF,\\
\cos(a+b) &= OP = OL' - PL' = OL' - EF,\\
\sin(a-b) &= D'P' = EL' - EF' = EL' - DF,\\
\cos(a-b) &= OP' = OL' + F'D' = OL' + EF.
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Les triangles rectangles OCL et DEF ont leurs côtés perpendiculaires. Ils sont donc semblables et donnent :

$$\frac{DE}{OC \text{ ou } 1} = \frac{DF}{OL} = \frac{EF}{CL};$$

d'où l'on tire :

$$DF = OL \times DE = \cos a \sin b;$$
$$EF = CL \times DE = \sin a \sin b.$$

Les triangles semblables OCL et OEL' permettent d'écrire :

$$\frac{OE}{OC \text{ ou } 1} = \frac{OL'}{OL} = \frac{EL'}{CL};$$

$$OL' = OL \times OE = \cos a \cos b;$$
$$EL' = CL \times OE = \sin a \cos b.$$

En portant ces valeurs dans les égalités (A), on obtient :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad [17]$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad [18]$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \qquad [19]$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \qquad [20]$$

Bien que ces relations aient été établies pour des arcs dont la somme et la différence ne dépassent pas 90°, elles sont vraies pour deux arcs quelconques. La démonstration serait analogue à la précédente.

Ex. : *Connaissant les sinus et cosinus des arcs de 30° et de 45°, trouver les sinus et cosinus des arcs de 75° et de 15°.*

On a (N^os 31-33), $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Transportant ces valeurs dans les formules [17], [18], [19], [20], il vient successivement :

$$\begin{aligned}
\sin 75° &= \sin (45° + 30°) \\
&= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = 0.9659. \\
\cos 75° &= \cos (45° + 30°) \\
&= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = 0.2588. \\
\sin 15° &= \sin (45° - 30°) \\
&= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = 0.2588. \\
\cos 15° &= \cos (45° - 30°) \\
&= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = 0.9659.
\end{aligned}$$

66. — *Calculer la tangente de la somme et de la différence de deux arcs, connaissant la tangente de chacun de ces arcs.*

De même qu'on a $\quad \operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a},$

on a aussi $\quad \operatorname{tg} (a+b) = \dfrac{\sin (a+b)}{\cos (a+b)}.$

Remplaçant $\sin (a+b)$ et $\cos (a+b)$ par leurs valeurs (N° 65), on a :

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Divisant le numérateur et le dénominateur du second membre de cette égalité par $\cos a \cos b$, il vient :

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \qquad [21]$$

On obtiendrait de la même manière :

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \qquad [22]$$

Ex. : *Etant données les tangentes de 30° et de 45°, calculer les tangentes de 75° et de 15°.*

On a déjà montré (Nos 31 et 33) que

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Appliquant les formules [21] et [22], en y transportant les valeurs ci-dessus, on a successivement :

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}.$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 3.7321.$$

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 0.2679.$$

MULTIPLICATION DES ARCS

67. — *Calculer sin* 2a, *cos* 2a *et tg* 2a, *connaissant sin* a, *cos* a *et tg* a.

Si, dans la formule [17], on fait $b = a$, il vient :

$$\sin 2a = \sin a \cos a + \cos a \sin a,$$

$$\text{ou} \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a. \qquad [23]$$

La formule [18] devient, en y faisant $b = a$:

$$\cos 2a = \cos a \cos a - \sin a \sin a,$$

$$\text{ou} \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \qquad [24]$$

En faisant $b = a$ dans la formule [21], on obtient :

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a},$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \qquad [25]$$

Remarque. — Ces formules subsistent quelle que soit **la valeur de l'arc considéré.**

Si, dans chacune d'elles, on remplace a par $\frac{a}{2}$, il vient :

$$\sin a = 2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2},$$

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2},$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}.$$

Ex. : *Connaissant le sinus, le cosinus et la tangente de l'arc de 75°, calculer le sinus, le cosinus et la tangente du double de cet arc.*

1° $\sin (75° \times 2)$ ou $150° = 2 \sin 75° \cos 75°$,
ou (N° 65, Ex.) $\sin 150° = 2 \times 0.9659 \times 0.2588$
$= 0.4999$ ou $\frac{1}{2}$.

2° $\cos (75° \times 2)$ ou $150° = \cos^2 75° - \sin^2 75°$
$= 0.2588^2 - 0.9659^2$
$= -0.8660$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3^\circ \quad \text{tg}\,(75^\circ \times 2) \text{ ou } 150^\circ = \frac{2\,\text{tg}\,75^\circ}{1 - \text{tg}^2\,75^\circ}$$

$$\text{ou (N}^\circ\text{ 65, Ex.)} \quad \text{tg}\,150^\circ = \frac{2 \times 3.7321}{1 - 3.7321^2}$$

$$= -\,0.5774 \text{ ou } -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Remarque. — L'arc de 150° est supplémentaire de l'arc de 30°; aussi les trois valeurs trouvées ci-dessus confirment le principe émis au N° 16.

DIVISION DES ARCS

68. *Calculer* $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ *et* $\text{tg}\,\frac{a}{2}$, *connaissant* $\cos a$.

Si l'on remplace a par $\frac{a}{2}$ dans les formules [1] et [24], on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} &= 1, \\ \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} &= \cos a. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ajoutant d'abord et retranchant ensuite membre à membre ces deux équations, on obtient le système (B) équivalent au système (A) :

$$\left.\begin{aligned} 2\cos^2\frac{a}{2} &= 1 + \cos a, \\ 2\sin^2\frac{a}{2} &= 1 - \cos a. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

On en tire :

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \qquad [26]$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \qquad [27]$$

Si enfin on divise membre à membre la formule [27] par la formule [26], il vient :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \qquad [28]$$

Ex. : *Le cosinus de l'arc de 30° étant* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, *calculer les cosinus, sinus et tangente de l'arc de 15°.*

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = 0.9659;$$

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = 0.2588;$$

$$\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}} = 0.2679.$$

Remarques. — L'arc donné étant du premier quadrant, les solutions négatives indiquées par les formules [26], [27] et [28] n'ont pas ici leur raison d'être.

Les valeurs ci-dessus ont déjà été trouvées aux Nos 65 et 66.

TRANSFORMATION EN UN PRODUIT DE LA SOMME OU DE LA DIFFERENCE DE DEUX LIGNES TRIGONOMETRIQUES

69. — *Transformer en un produit* $\sin p \pm \sin q$ *et* $\cos p \pm \cos q$.

Les formules

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

ajoutées membre à membre, et ensuite retranchées membre à membre, donnent :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b,$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b.$$

Les formules

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\,,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\,,$$

donnent de même :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b\,,$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b\,.$$

Posons $a + b = p,$

et $a - b = q.$

On en tire :

$$a = \frac{p+q}{2}\,,$$
$$b = \frac{p-q}{2}\,.$$

Si, dans les formules précédentes, on remplace a et b par leur valeur, il vient :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}\,, \qquad \textbf{[29]}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\,, \qquad \textbf{[30]}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}\,, \qquad \textbf{[31]}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\,. \qquad \textbf{[32]}$$

Si l'on divise membre à membre les formules [29] et [30], on obtient :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}\,.$$

$$\text{Or,}\quad \frac{\sin\dfrac{p+q}{2}}{\cos\dfrac{p+q}{2}} = \operatorname{tg}\frac{p+q}{2},$$

$$\text{et}\quad \frac{\cos\dfrac{p-q}{2}}{\sin\dfrac{p-q}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{p-q}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{p-q}{2}} \quad (\text{N}^\circ\ 28).$$

Donc

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{p-q}{2}}. \qquad [33]$$

70. — *Transformer en un produit* $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$.

La formule [2] permet d'écrire :

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b},$$

ou, en réduisant au même dénominateur les deux termes du second membre,

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}.$$

Mais [17], $\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin (a + b)$.

Donc

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}. \qquad [34]$$

On trouverait de même :

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}. \qquad [35]$$

Ex. I : *Calculer* $\sin 54° + \sin 38°$.

La formule [29] donne :

$$\sin 54° + \sin 38° = 2 \sin \frac{54° + 38°}{2} \cos \frac{54° - 38°}{2}$$

$$= 2 \sin 46° \cos 8°.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.30\,103 \\ \log \sin 46° &= \bar{1}.85\,693 \\ \log \cos 8° &= \bar{1}.99\,575 \\ \hline \log(\sin 54° + \sin 38°) &= 0.15\,371\,. \end{aligned}$$

N. C. 1.42 466. . .

Ex. II : *Calculer* $\cos 33° - \cos 47°$.

La formule [32] permet d'écrire :

$$\cos 33° - \cos 47° = -2 \sin \frac{33° + 47°}{2} \sin \frac{33° - 47°}{2}$$

$$= 2 \sin 40° \sin 7°.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.30\,103 \\ \log \sin 40° &= \bar{1}.80\,807 \\ \log \sin 7° &= \bar{1}.08\,589 \\ \hline \log(\cos 33° - \cos 47°) &= \bar{1}.19\,499\,. \end{aligned}$$

N. C. 0.15 667 .

Ex. III : *Calculer* $tg\ 72° - tg\ 34°$.

La formule [35] donne :

$$tg\ 72° - tg\ 34° = \frac{\sin(72° - 34°)}{\cos 72° \cos 34°}$$

$$= \frac{\sin 38°}{\cos 72° \cos 34°}.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 38° &= \bar{1}.78\,934 \\ \text{colog} \cos 72° &= 0.51\,002 \\ \text{colog} \cos 34° &= 0.08\,143 \\ \hline \log(tg\ 72° - tg\ 34°) &= 0.38\,079\,. \end{aligned}$$

N. C. 2.40 322. . .

CACUL DES ANGLES D'UN TRIANGLE RECTANGLE LORSQUE a DIFFERE PEU DE c (N° 45).

71. — Lorsque a diffère peu de c, le rapport $\frac{a}{c}$ diffère très peu de l'unité; alors l'angle A est voisin de 90°, et l'angle B est voisin de 0°. Il est impossible de déterminer ces angles avec une approximation suffisante; car, comme on peut le constater à l'inspection des Tables, les différences tabulaires sont très petites pour les sinus des angles voisins de 90° et pour les cosinus des angles voisins de 0°.

Il est mieux de calculer B de la manière suivante :

La formule [28] donne :

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}.$$

De $\cos B = \frac{a}{c}$, on tire :

$$1 - \cos B = 1 - \frac{a}{c} = \frac{c - a}{c}$$

$$\text{et} \quad 1 + \cos B = 1 + \frac{a}{c} = \frac{c + a}{c}.$$

Donc

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c - a}{c + a}}. \qquad [\mathbf{36}]$$

Ex. : *Si* c = 370 *et* a = 356, *calculer* B.

La formule [36] donne :

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{370 - 356}{370 + 356}}.$$

$$\log(370 - 356) = 1.14\,613$$
$$\operatorname{colog}(370 + 356) = \bar{3}.13\,906$$
$$= \bar{2}.28\,519$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\bar{2}.28\,519}{2} = \bar{1}.14\,259\,;$$

$$\frac{B}{2} = 7°\,54'\,20'',$$

$$B = 15°\,48'\,40''.$$

RESOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

Calcul des angles et des côtés.

3e Cas.

On connaît deux côtés et l'angle compris (Nos 52 et 53).

72. — *Résoudre un triangle, connaissant les côtés* a *et* b *et l'angle compris* C.

On connaît la demi-somme $\frac{A+B}{2}$ des angles à trouver : elle égale $\frac{180° - C}{2}$.

Pour avoir la valeur de A et de B, il faut calculer celle de la demi-différence $\frac{A-B}{2}$.

La relation $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ou $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$ donne (*Alg.*, N° 208) :

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-b},$$

ou, d'après la formule [33],

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b};$$

d'où
$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2};$$

ou, en remarquant que

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}. \qquad [37]$$

Connaissant $\dfrac{A+B}{2}$ et $\dfrac{A-B}{2}$, on obtient facilement A et B par une addition et une soustraction.

Puis on calcule le côté c au moyen de la formule

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$ qui donne

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

On peut toujours supposer qu'on a : $a \gtreqless b$; alors la formule [37] donne pour $\dfrac{A-B}{2}$ une seule valeur plus petite que 90° .

Ex. : *Si* a = 48, b = 34, C = 37° 28', calculer A et B (Fig. 23).

La formule [37] donne :

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{48-34}{48+34}\operatorname{cotg}\frac{37°\,28'}{2}$$
$$= \frac{14 \operatorname{cotg} 18°\,44'}{82}.$$

$$\begin{aligned} \log 14 &= 1.14\,613 \\ \log \operatorname{cotg} 18^\circ 44' &= 0.46\,963 \\ \operatorname{colog} 82 &= \bar{2}.08\,619 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \bar{1}.70\,195$$

$$\frac{A-B}{2} = 26^\circ 43' 21''. \qquad (1)$$

D'ailleurs, $$\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - 37^\circ 28'}{2} = 71^\circ 16'. \quad (2)$$

Résolvant les équations (1) et (2), on trouve

$$A = 97^\circ 59' 21'',$$
$$B = 44^\circ 32' 39''.$$

N. B. — Il serait intéressant de comparer ces résutats à ceux déjà obtenus avec les mêmes données au N° 53.

4e Cas.

On connaît les trois côtés (N° 54).

73. — *Connaissant les trois côtés* a, b, c, *calculer les trois angles* A, B, C.

De la formule [10] $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on tire :

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 ;$$

d'où

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad \textbf{[38]}$$

Au moyen de cette formule, on peut calculer la valeur de l'angle A.

De la formule [9] $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, on tire :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

A et B étant connus, on a :

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

La formule [38] n'est pas calculable par logarithmes. Pour la transformer, on se sert des relations (B) (N° 68) dans lesquelles on remplace $\cos A$ par la valeur précédente :

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

La première donne :

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{A}{2} &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}; \end{aligned}$$

d'où
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Si l'on désigne le périmètre du triangle par $2p$, on a :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p, \\ b + c - a &= 2(p - a), \\ a + c - b &= 2(p - b), \\ a + b - c &= 2(p - c). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2p \times 2(p-a)}{4bc}},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{ou} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.\\
&\text{On a de même :} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\\
&\qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.
\end{aligned}\right\} \quad [39]$$

La seconde relation du système (B) donne :

$$\begin{aligned}
2\sin^2\frac{A}{2} &= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
&= \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}\\
&= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\\
&= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}\\
&= \frac{2(p-c)\times 2(p-b)}{2bc};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{d'où} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.\\
&\text{On aurait de même :}\\
&\qquad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\
&\qquad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.
\end{aligned}\right\} \quad [40]$$

En divisant les formules [40] par les formules [39], on a :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\
\operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\
\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.
\end{aligned}\right\} \quad [41]$$

Dans toutes ces formules, les radicaux ne sont affectés que du signe +, car chacun des angles devant avoir moins de 180°, sa moitié est plus petite que 90°, et l'on sait que, dans le premier quadrant, toutes les lignes trigonométriques sont positives. Lorsqu'on n'a qu'un angle à déterminer, on peut faire usage indifféremment des formules [39], [40] ou [41]. Mais il est préférable d'employer les formules [41] lorsqu'on doit calculer les trois angles, car elles demandent seulement quatre logarithmes au lieu de six ou sept, et les résultats sont plus exacts.

Ex. : *Si* a = 42, b = 52, c = 62, *calculer* A, B, C.

$$p = \frac{42+52+62}{2} = 78.$$

La formule [41] donne : $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(78-52)(78-62)}{78(78-42)}}.$

$$\begin{aligned}
\log 78 - 52 &= 1.41\,497\\
\log 78 - 62 &= 1.20\,412\\
\operatorname{colog} 78 &= \bar{2}.10\,791\\
\operatorname{colog} 78 - 42 &= \bar{2}.44\,370\\
&\overline{\bar{1}.17\,070}
\end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\bar{1}.17\,070}{2} = \bar{1}.58\,535;$$

$$\frac{A}{2} = 21°\,3'\,6''.$$

D'où $A = 42°\,6'\,12''.$

Si l'on employait la formule [39], on aurait :

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{78(78-52)}{42\times 62}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 78 &= 1.89\,209\\
\log 78-52 &= 1.41\,497\\
\operatorname{colog} 42 &= \bar{2}.37\,675\\
\operatorname{colog} 62 &= \bar{2}.20\,761\\
\hline
&\ \bar{1}.89\,142
\end{aligned}$$

$$\log\cos\frac{B}{2} = \frac{\bar{1}.89\,142}{2} = \bar{1}.94\,571,$$

$$\frac{B}{2} = 28°\,3'\,20''.$$

D'où $B = 56°\,6'\,40''$,

$C = 180° - (A+B)$

$= 81°\,47'\,7''$.

Recherche de la formule exprimant la surface d'un triangle en fonction des trois côtés (N° 60, Rem. I).

74. On a [13] $\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A;$

mais (N° 67) $\quad \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$

$$[40]\quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$[39]\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

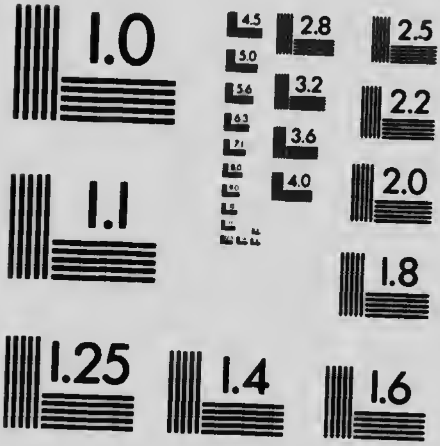
donc

$$S = bc\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART

(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)



Calcul des angles quand on connait la surface.

75. — Les formules [16], données au N° 60 pour le calcul des angles,

$$\sin A = \frac{2S}{bc},$$

$$\sin B = \frac{2S}{ac},$$

$$\sin C = \frac{2S}{ab},$$

sont quelquefois avantageusement remplacées par d'autres formules que l'on va démontrer.

En divisant membre à membre les relations

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

et $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on obtient : $$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{S} = \frac{1}{p(p-a)};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{d'où l'on tire} & \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{S}{p(p-a)}. \\ \text{On aurait de même} & \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{S}{p(p-b)}, \\ & \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{S}{p(p-c)}. \end{array}\right\} \quad [42]$$

Ex. : *Pour* a = 42, b = 52, c = 62, *on a* (N° 60) : p = 78, p — a = 36, p — b = 26, p — c = 16, S = 1080.7992; *calculer les angles* A, B, C.

Calcul de A.

$$\begin{aligned}
\log\ S &= 3.03\,375 \\
\text{colog}\ p &= \bar{2}.10\,791 \\
\text{colog}\ p - a &= \bar{2}.44\,370 \\
\hline
\log \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ A &= \bar{1}.58\,536 \\
\tfrac{1}{2}\ A &= 21^\circ\ 3'\ 8'', \\
A &= 42^\circ\ 6'\ 16''.
\end{aligned}$$

Calcul de B.

$$\begin{aligned}
\log\ S &= 3.03\,375 \\
\text{colog}\ p &= \bar{2}.10\,791 \\
\text{colog}\ p - b &= \bar{2}.58\,503 \\
\hline
\log \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ B &= \bar{1}.72\,669 \\
\tfrac{1}{2}\ B &= 28^\circ\ 3'\ 20'', \\
B &= 56^\circ\ 6'\ 40''.
\end{aligned}$$

Calcul de C.

$$\begin{aligned}
\log\ S &= 3.03\,375 \\
\text{colog}\ p &= \bar{2}.10\,791 \\
\text{colog}\ p - c &= \bar{2}.79\,588 \\
\hline
\log \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ C &= \bar{1}.93\,754 \\
\tfrac{1}{2}\ C &= 40^\circ\ 53'\ 38'', \\
C &= 81^\circ\ 47'\ 16''.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 42^\circ\ \ 6'\ 16'' \\
 & 56^\circ\ \ 6'\ 40'' \\
\text{Preuve} & 81^\circ\ 47'\ 16'' \\
\hline
 & \bar{1}80^\circ\ 00'\ 12''.
\end{array}$$

Résultat qu'on peut comparer avec ceux qui ont été trouvés au N° 54, à la Rem. II du N° 60 et au N° 73.

EXERCICES

ADDITION ET SOUSTRACTION DES ARCS

Calculer directement, sans le secours des Tables :

268.	**269.**	**270.**
$\sin 105°$,	$\sin 120°$,	$\sin 135°$,
$\cos 105°$,	$\cos 120°$,	$\cos 135°$,
$\operatorname{tg} 105°$,	$\operatorname{tg} 120°$,	$\operatorname{tg} 135°$,
$\operatorname{cotg} 105°$.	$\operatorname{séc} 120°$.	$\operatorname{coséc} 135°$.

271. Calculer les lignes trigonométriques de l'arc de 150° .

272. Etant donnés $\sin 18° = 0.3090$ et $\cos 15° = 0.9659$, calculer :

$\sin 33°$, $\cos 108°$, $\operatorname{tg} 153°$, $\cos 132°$.

273. Connaissant $\sin a = \frac{1}{5}$ et $\cos b = \frac{1}{3}$, calculer :

$\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\operatorname{tg}(a+b)$,
$\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{tg}(a-b)$.

274. Si $\cos x = 0.8910$ et $\sin y = 0.5446$, calculer les sinus, cosinus et tangentes des arcs $(x+y)$ et $(x-y)$.

275. Etant données $\operatorname{tg} a = 1.0862$ et $\operatorname{tg} b = 0.6330$, calculer $\operatorname{tg}(a-b)$.

276. Calculer $\operatorname{tg}(m+n)$ et $\operatorname{cotg}(m-n)$, si $\operatorname{tg} m = 1$ et $\operatorname{tg} n = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

MULTIPLICATION DES ARCS

277. Trouver $\sin 2x$, étant donnés $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

278. Calculer $\cos 2x$, si $\cos x = \frac{3}{5}$.

279. Si tg $x = 0.649$, trouver tg $2x$.

280. Calculer les lignes trigonométriques de l'arc de 36°, si on a sin 18° = 0.3090.

281. Connaissant sin $a = \frac{2}{3}$, calculer sin $2a$ et cos $2a$.

282. Si cos $x = \frac{3}{7}$, trouver sin $2x$ et séc $2x$.

283. Etant donné sin $a = 0.3969$, calculer tg $2a$.

284. On demande tg $2b$ et cotg $2b$ si tg $b = 2.3053$.

285. Connaissant tg $x = 1\frac{2}{3}$, calculer cotg $2x$.

286. Etant donné sin $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calculer séc a et cosée $2a$.

DIVISION DES ARCS

287. Calculer sin 7°5 et cos 7°5, si cos 15° = 0.9659.

288. Calculer les sinus, cosinus et tangente de l'arc de 9°, si cos 18° = 0.9511.

289. Si sin 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, trouver sin 22°5, cos 22°5, tg 22°5.

290. Connaissant cos $a = \frac{1}{3}$, calculer cos $\frac{a}{2}$ et sin $\frac{a}{2}$.

291. Si sin $x = \frac{3}{5}$, trouver cos $\frac{x}{2}$ et sin $\frac{x}{2}$.

292. Calculer tg $\frac{b}{2}$, si l'on a cos $b = \frac{4}{7}$.

293. Calculer séc $\frac{a}{2}$, si l'on a sin $a = 0.272$.

294. Calculer cotg $\frac{x}{2}$, si l'on a cos $x = 0.709$.

295. Calculer $\operatorname{tg} \frac{y}{2}$, si l'on a $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

296. Calculer $\operatorname{cos\acute{e}c} \frac{m}{2}$ et $\operatorname{cotg} \frac{m}{2}$, si l'on donne $\sin m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

297. Si $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$, calculer $\cos a$.

298. Calculer $\sin x$, si $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1.5$.

EXPRESSIONS A RENDRE CALCULABLES PAR LOGARITHMES

Rendre calculables par logarithmes les expressions trigonométriques suivantes :

299. $\sin 28^\circ 12' + \sin 25^\circ 35'$.

300. $\sin 54^\circ 46' - \sin 37^\circ 28'$.

301. $\cos 49^\circ 15' - \cos 33^\circ 54'$.

302. $\cos 64^\circ 26' + \cos 12^\circ 18'$.

303. $\cos 42^\circ 32' - \cos 25^\circ 28'$.

304. $\operatorname{tg} 12^\circ 35' + \operatorname{tg} 37^\circ 33'$.

305. $\operatorname{tg} 53^\circ 12' - \operatorname{tg} 26^\circ 42'$.

306. $\dfrac{\sin 54^\circ 18' + \sin 30^\circ 45'}{\sin 54^\circ 18' - \sin 30^\circ 45'}$.

307. $\dfrac{\sin 37^\circ 15' + \sin 17^\circ 12'}{\sin 37^\circ 15' - \sin 17^\circ 12'}$.

308. $\sin a + \cos b$.

309. $1 + \sin a.$

310. $1 + \sin 45° 28'.$

311. $1 - \cos 37° 42'.$

312. $1 - \sin 64° 36'.$

313. $1 + \cos 18° 9'.$

314. $1 - \operatorname{tg} 27° 18'.$

315. $1 + \operatorname{tg} 12° 34'.$

316. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 12° 27'}{1 + \operatorname{tg} 12° 27'}.$

317. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 34° 18'}{1 - \operatorname{tg} 34° 18'}.$

RESOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

Calculer les angles lorsque a diffère peu de c.

318. $c = 75,$
$a = 70.$

319. $c = 3\,133,$
$a = 3\,120.$

320. $c = 270.2,$
$a = 260.8.$

321. $c = 4\,832,$
$a = 4\,778.$

322. $c = 1\,137.5,$
$a = 1\,079.4.$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

3e Cas.

Deux côtés et l'angle compris étant connus, calculer les deux autres angles.

Nos 217-224 (page 61).

4e Cas.

Nos 225-232 (page 62).

1° Calculer les angles au moyen des formules [41].

2° Calculer la surface.

3° Calculer les angles, la surface étant connue, au moyen des formules [42].

PROBLÈMES

323. Sous quel angle un objet de 11 pieds de long est-il vu par un observateur dont l'œil est situé à 10 pieds d'une extrémité de cet objet et à 16 pieds de l'autre?

324. Les côtés d'un triangle ont 2 436 pieds, 2 562 pieds et 2 722 pieds. Calculer le plus grand angle.

325. Les côtés d'un triangle ont 292, 334 et 374 pieds. Calculer la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet du plus grand angle sur le côté opposé.

326. Les diagonales d'un parallélogramme ont 33 et 42 ver.; l'un des angles formés par leur intersection est de 37° 14'; calculer les côtés du parallélogramme.

327. Deux trains partent ensemble d'une mêm gare et vont dans deux directions faisant un angle de 67° 45'. Si l'un fait 32 milles à l'heure et l'autre 46 milles, à quelle distance seront-ils l'un de l'autre au bout de 3 heures ?

328. Si les deux trains du problème précéden. sont éloignés de 175 milles après quatre heures de marche, quel angle font leurs directions ?

329. Afin de mesurer la distance entre deux villes séparées par un marais, on choisit un point. Les distances de ce point aux deux villes sont de 7 650 verges et 6 950 verges, et l'angle formé par les lignes joignant le point aux deux villes est de 62° 31'. Quelle est la distance entre les deux villes ?

330. Mon œil est à 24 pieds d'une extrémité d'un mât de 20 pieds de haut et à 34 pieds de l'autre extrémité. Si l'on suppose inscrit dans un cercle le triangle formé par le mât et les rayons visuels allant à ses extrémités, quelle est la valeur de l'arc sous-tendu par le mât ?

331. Dans un triangle, $a = 120$, $b = 80$, $c = 84$, on demande la longueur de la médiane CM.

332. Les côtés d'un triangle ont 51, 63 et 84 verges. Calculer la médiane correspondant au grand côté.

333. Un arbre est planté sur le bord d'une rivière. De la rive opposée, l'angle d'élévation du sommet de cet arbre est de 59° 35'; si l'on s'éloigne de 38 pi., cet angle n'est plus que de 49° 38'. Trouver la largeur de la rivière.

334. Un navire se dirigeant vers le sud voit deux phares dans la direction de l'est. Une heure après, l'un des phares apparaît au nord-est et l'autre au nord-nord-est. Si les phares sont séparés par une distance de 10 milles, dire quelle est la vitesse du navire.

335. Un arbre est situé sur le penchant d'une colline inclinée de 16° 34' sur l'horizon. Si l'on gravit la colline à une distance de 90 pi. du pied de l'arbre, l'angle d'élévation du sommet de l'arbre est de 35°. Calculer sa hauteur.

336. Deux pièces d'artillerie, A et B, séparées par une distance de 480 ver., vont bombarder la tourelle cuirassée d'un fort. Vue de A, cette tourelle forme un angle de 78° 50' avec la direction AB; vue de B, elle détermine un angle de 98° 1'. Comment l'officier commandant ces deux pièces doit-il diriger leur tir?

337. La surface d'un champ formant un angle de 18° 40' avec plan horizontal a été calculée suivant la pente et trouvée de 10.92 acres. On demande la *base productive* ou surface horizontale de ce champ.

338. On lève le plan d'un terrain $ABCD$ par la méthode de cheminement. Le côté AB a 30 chaînes de long et se dirige vers l'est; BC a 36 ch. et se dirige vers le nord; CD mesure 32.31 ch. et fait à l'ouest, avec la direction sud, un angle de 68° 12': Trouver, en acres, la surfacede e terrain.

339. On lève le plan d'un bois $ABCDE$. Les alignements AB, BC, CD et DE ont respectivement 35 chaînes, 39.6 ch., 32.45 ch. et 32.3 ch. Les angles ABC, BCD et CDE ont une valeur respective de 94° 30', 95° 42' et 132° 25'. Quelle est, en acres, la superficie de ce bois?

340. On a levé à la boussole un terrain $ABCD$ et on a trouvé les données suivantes :

AB = 30 ch. et prend une direction 45° N.-E.
BC = 34.65 ch. et prend une direction 75° S.-E.
CD = 54.63 ch. et prend une direction 15° S.-O.
DA = 57.33 ch. et prend une direction 45° N.-O.

Calculer la surface de ce terrain.

341. Une compagnie d'infanterie, abritée derrière un monticule, ne peut voir l'ennemi. Mais, de deux postes d'observation A et B dont l'alignement passe par l'abri et qui sont situés l'un à 65 mètres à gauche de l'abri, l'autre à 92 m. à droite, l'officier commandant cette compagnie est averti qu'un groupement ennemi est signalé. Du poste A, l'ennemi est dans une direction formant un angle de 72° 50' avec l'alignement AB des postes; au poste B, cet angle est de 99° 36'. Pour quelle distance l'officier doit-il commander le feu?

PROBLEMES D'EXAMENS

UNIVERSITE LAVAL

1891.

342. Un observateur, qui est à quelque distance d'un arbre, trouve que l'angle d'élévation de cet arbre est de 60 degrés. Il s'éloigne de 100 pieds et le même angle est réduit de moitié. Quelle est la hauteur de l'arbre?

1893.

343. La génératrice d'un cône de révolution a 2.40 mètres; elle fait avec l'axe un angle de 22 degrés. Quel est le volume de ce cône?

1894.

344. Un poteau de 10 pieds est fixé verticalement sur un terrain horizontal; l'ombre qu'il projette mesure 13 pieds. Trouver la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon.

1895.

345. Résoudre un triangle quelconque, connaissant le côté a 1320 mètres, l'angle B 39° 47' et l'angle C 127° 30'.

1896.

346. Un des angles d'un triangle a 35° 18'; les deux côtés qui le comprennent ont 87 mètres et 72 mètres. Résoudre le triangle.

1897.

347. Etant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver un angle. (Démonstration.)

1898.

348. Les côtés AB et AC d'un triangle ABC valent respectivement 53 mètres et 67 mètres et l'angle compris vaut 72° 35' 45"; quelle est la surface du cercle inscrit dans ce triangle?

349. La ligne qui suit le penchant d'une montagne fait un angle de 60° 25' avec une ligne horizontale dirigée de terre vers le centre de la montagne; mais, à 500 pieds plus loin, l'angle formé par l'horizontale et la ligne dirigée au sommet de la montagne n'est plus que de 40° 35'. Quelle est la hauteur de la montagne?

1899.

350. Définir les lignes trigonométriques *sinus*, *cosinus* et *tangente*, et donner leur valeur respective en fonction l'une de l'autre.

351. Un objet vertical de 1.75 mètre est vu sous un angle de 1° 5'; à quelle distance est-on de cet objet?

1900.

352. Quelle est la hauteur perpendiculaire d'une colline, lorsque l'observateur placé au pied de cette colline en voit le sommet sous un angle de 46° et que, à 200 pieds plus loin, il ne le verra que sous l'angle de 31°?

1901.

353. Un rectangle a 321.45 mètres de base et 67.87 mètres de hauteur; quels sont les angles formés par la diagonale?

1902.

354. Trouver la surface d'un rectangle, sachant que sa diagonale a 1000 pieds de longueur, et qu'elle fait un angle de 22° 10' avec un des côtés parallèles.

1903 et 1908.

355. L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale dont le pied est inaccessible est de 24° 36'; on s'avance de 32 mètres vers la tour, l'angle d'élévation est alors égal à 40° 12'. Quelle est la hauteur de la tour? La base d'observation est horizontale et l'œil de l'observateur est élevé de 1.50 mètre.

1904.

356. Deux des côtés d'un triangle mesurent 120 et 140 pieds; l'angle compris entre ces deux côtés vaut 54° 17'. Trouver le troisième côté et les deux autres angles.

1905.

357. Quelle est la hauteur verticale d'une montagne, lorsque l'observateur, placé au pied de cette montagne, en voit le sommet sous un angle de 47° 19', et qu'à 60 pieds plus loin, il le voit sous l'angle de 23° 45'?

1906.

358. Un phare de 54 pieds de hauteur est situé sur un rocher; un observateur, placé sur un bateau, voit le sommet du phare sous un angle de 4° 52' et le sommet du rocher sous un angle de 4° 2'. Trouver la hauteur du rocher et sa distance du bateau.

1907.

359. Dans un triangle, le côté a mesure 1200 pieds, le côté b 560 pieds. L'angle C compris entre ces deux côtés mesure 30° 28'. On demande de faire connaître le côté c.

1909.

360. Dans un triangle, les côtés a et b ont respectivement 847 pieds et 573 pieds; l'angle compris C mesure 65° 23' 30". Résoudre le triangle.

1910.

361. Quels sont les côtés d'un parallélogramme, sachant que sa surface est 2.30 m² et que les angles formés à l'extrémité d'une diagonale valent respectivement 50° et 120°?

1911.

362. Quel est le plus grand de deux triangles, l'un rectangle avec une hypoténuse de 10 mètres et un angle aigu de 52° 15", l'autre avec les trois côtés de 14 m., 10 m. et 6 m.?
Dire aussi la valeur du plus grand angle de ces deux triangles.

1912.

363. Les côtés d'un triangle étant : $a = 75$ pieds, $b = 92$ pi., $c = 107$ pi., faire connaître l'angle A et la surface de ce triangle.

1913.

364. Si un rectangle de 24.56 mètres de base et de 15.25 mètres de hauteur est traversé par une diagonale, quelle est la longueur de cette diagonale et quels angles forme-t-elle avec les côtés du rectangle?

1914.

365. Dans un triangle, le côté a a 25 pieds, le côté b 26 pieds et le côté c 27 pieds. Trouver l'angle A.

366. La corde sous-tendant un arc de 82° est à 20 mètres du centre; quelle est la longueur de cette corde?

1916.

367. Un observateur placé sur un terrain horizontal, en face d'une tour, trouve que l'angle d'élévation de cette tour est de 24°. Il se rapproche de la tour d'une longueur de 66 pieds et l'angle d'élévation est alors de 32°. Quelle est la hauteur de la tour si la lunette de l'instrument est à 4 pi du sol?

1917.

368. Un observateur placé en face d'une tour trouve que l'angle d'élévation de cette tour est de 24° 18'. Il se rapproche de la tour d'une longueur de 66 pieds et l'angle d'élévation est alors de 32° 16'. Quelle est la hauteur de la tour?