Dans la série (1), faisons $x=\frac{\pi}{2}$, le premier membre égalera zéro ; puis remplaçons x^2 par $\frac{1}{y}$, d'où $y=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$, et multiplions par y^m, il viendra :

$$y^m-\frac{y^{m-1}}{2}-\frac{y^{m-2}}{24}-\frac{y^{m-3}}{720}+\ldots\ldots=0.$$

Les racines de cette équation sont les multiples impairs de $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$, leur somme égale le coefficient du second terme changé de signe, donc

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}+\ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots \qquad (3$$

Cette série peut servir à calculer π; il est facile d'en déduire encore d'autres séries plus convergentes ;

Écrivons :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots=S,$$

nous aurons :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots\ldots=\frac{S}{4};$$

retranchons la deuxième égalité de la première, il viendra :

$$S-\frac{S}{4}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad S=\frac{\pi^2}{6};$$

donc

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\ldots \qquad (4)$$