

Exercices mathématiques.

L'épargne annuelle.

PROBLÈME. " Un ouvrier place, au commencement de chaque année, une somme de 60 piastres, qui porte intérêt à 4 pour cent par an ; chaque année, au règlement des comptes, les intérêts sont capitalisés. " Quelle sera, au bout de 10 ans, la valeur totale ainsi amassée ? "

Solution arithmétique.

On peut calculer, année par année, la valeur totale et réelle des placements.

1^{re} année.

| | |
|---------------------------|-------|
| 1 ^{er} placement | \$ 60 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 2,40 |
| valeur finale | 62,40 |

2^e année.

| | |
|---------------------------|---------|
| Valeur avec 60 \$ en plus | 122,40 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 4,896 |
| valeur finale | 127,296 |

3^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 187,296 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 7,492 |
| valeur finale | 194,788 |

4^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 254,788 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 10,192 |
| valeur finale | 264,980 |

5^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 324,980 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 12,999 |
| valeur finale | 337,979 |

6^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 397,979 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 15,919 |
| valeur finale | 413,898 |

7^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 473,898 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 18,956 |
| valeur finale | 492,854 |

8^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 552,854 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 22,114 |
| valeur finale | 574,968 |

9^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 634,968 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 25,399 |
| valeur finale | 660,367 |

10^e année.

| | |
|--------------------------|---------|
| Valeur avec 60 en plus | 720,367 |
| Intérêt, les 4 centièmes | 28,815 |
| valeur finale | 749,182 |

Résumé. L'ouvrier a versé en tout 10 fois 60 piastres, soit 600 piastres ; les intérêts produits montent à \$149,18, et la valeur finale est de \$749,18.

Solution algébrique.

Au taux de 4 pour cent, une somme quelconque produit, en un an, les 4 centièmes de sa valeur ; par exemple, 1 piastre produit 4 centims, et devient \$1.04.

Réprésentons par h cette valeur de 1 piastre augmentée de son intérêt d'un an.

Une valeur de a piastres devient, en 1 an, a fois ce que devient 1 piastre, soit $a \times 1.04$ ou ah .

Pendant une seconde année, la valeur ah devient $ah \times h$ ou ah^2 ; pendant une troisième année, la valeur ah^2 devient $ah^2 \times h$ ou ah^3 , et ainsi de suite ; de sorte qu'une somme a placée à intérêts composés pendant n années devient ah^n .

Par exemple, le premier placement de 60 piastres portant intérêt pendant 10 ans devient ah^{10} , ou $60 \times 1,04^{10}$; le deuxième ne portant intérêt que pendant 9 ans devient ah^9 , et ainsi de suite ; le dernier ne porte intérêt que pendant 1 an, et devient simplement ah^1 ou $60 \times 1,04$.

La somme des valeurs finales des versements est donc, en commençant par les derniers :

$$ah + ah^2 + ah^3 + \dots + ah^8 + ah^9 + ah^{10}$$

$$\text{ou } ah(1 + h + h^2 + \dots + h^7 + h^8 + h^9)$$

La parenthèse est la somme des termes d'une progression géométrique ayant h pour raison ; d'après la règle connue, on a cette somme en multipliant le dernier terme par la raison, retranchant le premier terme, et divisant par la raison moins 1 ; ce qui donne ici

$$(h^9 h - 1) : (h - 1) \text{ ou } (h^{10} - 1) : (h - 1)$$

On a donc, pour la somme des valeurs finales,

$$\frac{ah(h^{10} - 1)}{h - 1} \text{ ou } \frac{60 \cdot 1,04(1,04^{10} - 1)}{0,04}$$

soit $15,104(1,04^{10} - 1)$ ou $1560(1,04^{10} - 1)$ valeur à calculer ; nous allons faire directement le calcul de la 10^e puissance