

différence, 2° leur somme et celle de leurs carrés, 3° leur différence et la somme de leurs carrés ont au plus 2 pour p. g. c. d.

DÉMONSTRATION.

1° *Hypothèse* : A et B sont premiers entre eux.

Conclusion : $A + B$ et $A - B$ ont au plus 2 pour p. g. c. d.

$$\begin{array}{r|l} A + B & A - B \quad \text{Divisant } A + B \text{ par} \\ -A + B & \hline 26 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A - B, \text{ on trouve } 2B \\ \text{pour reste. On sait} \end{array}$$

que le p. g. c. d. de deux nombres est le même que celui du plus petit et du reste de leur division. Donc le p. g. c. d. de $A + B$ et $A - B$ est le même que celui de $A - B$ et $2B$. Or, en vertu du cinquième théorème, $A - B$ et B sont premiers entre eux. Donc le p. g. c. d. de $A - B$ et $2B$ est au plus 2.

Il s'ensuit que le p. g. c. d. de $A + B$ et $A - B$ est au plus 2.

2° *Hypothèse* : A et B sont premiers entre eux.

Conclusion : $A^2 + B^2$ et $A + B$ ont au plus 2 pour p. g. c. d.

Divisant $A^2 + B^2$ par $A + B$, on trouve $2B^2$ pour reste (la suite est la même que pour la première partie).

3° *Hypothèse* : A et B sont premiers entre eux.

Conclusion : $A^2 + B^2$ et $A - B$ ont au plus 2 pour p. g. c. d.

(Démonstration analogue.)

Remarque. — Comme la somme et la différence de deux nombres impairs sont des nombres pairs, le p. g. c. d. dans les trois cas sera 2, si les deux nombres sont impairs.

Comme la somme et la différence d'un nombre impair et d'un nombre pair ou vice-versa sont des nombres impairs, le p. g. c. d., dans les trois cas sera 1, si les nombres sont l'un pair et l'autre impair.

Application. — Démontrez d'une manière analogue que si A et B sont pre-

miers entre eux, $A^2 + A \cdot B + B^2$ ont au plus 2 pour p. g. c. d. et que $A^2 - A \cdot B + B^2$ ont 1 ou 3 pour p. g. c. d.

THÉORÈME VIII. — *Le p. g. c. d. de deux nombres est le même que celui du plus petit et du reste de leur division.*

Hypothèse : $A > B$, le reste de leur division est R.

Conclusion : p. g. c. d. de A et R est le même que celui de B et de $B - R$.

En effet, soit q la partie entière du quotient de A par B. Il vient $A = B \times q + R$ ou $A = B \times q + B - B + R$ ou $A = B(q + 1) - (B - R)$.

Si D est le p. g. c. d. de A et B, D divisant $B(q + 1)$, multiple de B et divisant A, divisera leur différence, qui est $B - R$. Donc D ne peut surpasser le p. g. c. d. de B et $B - R$.

Si d est le p. g. c. d. de B et $B - R$, d divisant $B(q + 1)$, multiple de B et divisant $B - R$, divisera leur différence, qui est A. Donc d ne peut surpasser le p. g. c. d. de A et B.

Il s'ensuit que, D ne pouvant être plus grand que d et d ne pouvant surpasser D, les p. g. c. d. D et d sont égaux.

V. LEBON.

Exercices de calcul.

I. Un ouvrier dépense 55 centins pour l'entretien de sa famille. Au bout de l'année, après avoir payé ses dépenses avec le gain qu'il a fait en travaillant 25 jours par mois, il trouve qu'il a mis de côté \$39.25. Combien a-t-il gagné par jour de travail ?

Rép. \$0.80.

Solution :

La dépense annuelle de l'ouvrier = $.55 \times 365 = \$200.75$.

Son gain annuel = $\$200.75 + \$39.25 = \$240$.

Il a travaillé pendant $25 \times 12 = 300$ jours.