or $P_{r-1} \cdot P_s = P_{r'-1} \cdot P_{s'}$, car ces deux produits renferment les mêmes facteurs simples et en nombre moindre que n ; de quelque manière qu'on effectue le produit, il doit donc, d'après la supposition, rester le même ; donc aussi $P_r P_s = P_{r'} P_{s'}$. Or le théorème est vrai pour trois facteurs, il subsiste donc aussi pour quatre facteurs, etc.

11. *Problème* 2. De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs inégaux ?

Solution. Désignons par le symbole P_n ce nombre de manières ; et par P_{n+1} ce nombre lorsqu'il survient un nouveau facteur K, et que l'on a $n+1$ facteurs ; cherchons la relation entre P_{n+1} et P_n. De quelque manière qu'on s'y prenne pour effectuer P_n, il faudra toujours exécuter $n-1$ multiplications. Ceci est évident lorsqu'on multiplie le premier facteur par le second ; ce premier produit par le troisième facteur ; ce second produit par le quatrième facteur, et ainsi de suite : il en est encore de même lorsqu'on exécute par groupes. Exemples : soit $n=12$, il faut onze multiplications, par le mode *successif* ; et si on décompose en trois groupes de trois, quatre et cinq facteurs, le premier groupe nécessite deux multiplications, le second en exige trois et le troisième quatre ; à quoi il faut ajouter deux multiplications pour les trois groupes ; ainsi, en tout, encore onze ; et le même raisonnement s'applique à un nombre quelconque de facteurs.

Cela posé, soient d'abord deux facteurs a, b, on a évidemment $P_2 = 2$, savoir : ab, ba ; prenons un troisième facteur c ; on peut le combiner comme multiplicateur, ou multiplicande avec ab, entièrement effectué, ce qui donne deux manières, cab, abc ; ou bien encore faire intervenir c pendant la multiplication ; ainsi, $ac \times b$, $ca \times b$, $a \times bc$, $a \times cb$, ce qui donne quatre manières, en tout six manières ; raisonnant de même sur ba, on voit que l'on a $P_3 = 12 = 2.6$; prenons un quatrième facteur d, et combinons-le avec le produit abc ; d'abord entièrement effectué, on obtient deux manières $dabc$, $abcd$; ensuite pendant l'opération, abc exige deux multiplications ; en introduisant d pendant la première, celle de a par bc, on obtient quatre manières : $ad.\ bc$, $da.\ bc$, $a.\ dbc$, $a.\ bcd$, et autant pendant la seconde multiplication, celle de ab par c ; en tout dix manières. On en dit autant d'un produit quelconque, d'où $P_4 = 120 = 2.\ 6.\ 10$; on trouverait de même $P_5 = 2.\ 6.\ 10.\ 14$; et ainsi de suite.

En général, soit M une des manières employées pour obtenir le produit de n facteurs. Le nouveau facteur K peut se combiner, multiplicande ou multiplicateur avec M, ce qui donne deux manières ; si on l'introduit pendant l'exécution, il y a $n-1$ multiplications dont chacune donne quatre manières, et en tout $4(n-1)+2=4n-2$: ce qu'on dit pour M peut s'appliquer à toute manière d'obtenir le produit de n facteurs ; donc

$$P_{n+1} = (4n-2)P_n, \text{ ou bien } P_n = (4n-6)\ P_{n-1}.$$

Faisant successivement $n=2, 3, 4, \ldots n$, et considérant que $P_1 = 1$, on a

$$P_2 = 2\ ;\ P_3 = 2.6\ ;\ P_4 = 2.6.10\ ;\ P_5 = 2.6.10.14\ ;$$
$$P_6 = 2.6.10.14.18\ ;$$

$$\text{et } P_n = 2.6.10\ldots(4n-6) = 2^{n-1}.1.3.5\ldots(2n-3) = \frac{2^n[2n-3]}{2}\ ;$$

les crochets désignent un produit continuel.

Observation. Cette ingénieuse solution est due à M. Rodrigues (Olinde). La formule avait été trouvée auparavant par M. Catalan à l'aide de considérations combinatoires. (*Journal* de Liouville, t. III, p. 315 et 549. 1838.)

12. *Problème* 3. De combien de manières peut-on effectuer un produit de n facteurs, lorsqu'il y a des facteurs égaux ?

Solution. Soit $a^a b^b c^c \ldots$, et $a+b+c, \ldots = n$ on aura

$$P_n = \frac{2.6.10\ldots\ldots(4n-6)}{(1.2.3\ldots a)\ (1.2.3\ldots b)\ (1.2.3\ldots c)\ldots}$$

Cette formule, déduite de la théorie combinatoire est aussi de M. Catalan. (*Journal* de Liouville, t. VI, p. 74. 1841.)

Observation. Ces solutions conviennent aussi au problème 1 (§ 8).

Division, diviseurs, résidus.

13. La division est une opération par laquelle on trouve combien de fois on peut soustraire un nombre d'un autre jusqu'à ce que le reste soit devenu plus petit que le nombre soustrait. Le *dividende* est le nombre duquel on soustrait ; le *diviseur*, le nombre qu'on soustrait ; le *quotient* marque le nombre de soustractions à effectuer ; le *résidu* de deux nombres est le reste de la division du grand nombre par le petit. Ainsi, pour les deux nombres 19 et 5, 19 est le dividende, 5 le diviseur, 3 le quotient et 4 le résidu.

Soient a, dividende ; p, diviseur ; q, quotient ; r, résidu, on a l'identité $a = pq + r$.

Observation. La division et la multiplication sont deux opérations *inverses* et peuvent se contrôler mutuellement.

14. Lorsque le résidu de deux nombres est zéro, le dividende est dit *multiple* du diviseur, et le diviseur est un *sous-multiple* du dividende. On dit aussi, dans un sens restreint, qu'un nombre est *diviseur* d'un autre, lorsque leur résidu est nul ; ainsi 5 est diviseur de 15, et 15 est un multiple de 5. Zéro est divisible par un nombre quelconque.

15. *Notation.* Nous proposons de désigner le multiple quelconque d'un nombre par un point placé sur ce nombre ; ainsi $\dot 5$, $\dot p$ désignent des multiples quelconques de 5 ou de p, et l'équation $a = \dot p$ signifie que a est un multiple de p.

Observation. Le point est déjà employé pour désigner une multiplication quand il est placé à côté du nombre.

$\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ désigne la partie entière du quotient de a divisé par b ; ainsi $\mathrm{E}\left(\frac{20}{7}\right) = 2$, $\mathrm{E}\left(\frac{31}{5}\right) = 6$.

16. Lorsque le même nombre divise d'autres nombres, on dit qu'il est *diviseur commun* à ces deux nombres ; ainsi 3 est diviseur commun à 15, 21, 36.

Un est diviseur commun à tous les nombres.

17. Un nombre premier est celui qui n'est divisible que par lui-même, 7, 11, 13, 17, etc., *sont des nombres premiers* ; les autres nombre sont dits non premiers ou composés. 2 est le seul nombre premier pair ; 1.2.3 sont trois nombres premiers consécutifs, il ne saurait y en avoir d'autres aussi consécutifs.

18. Deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité ; ainsi 25 et 36 *sont premiers entre eux.*

Corollaire 1. *Un* est le premier à l'égard de tous les autres nombres.

Corollaire 2. Un nombre premier est nécessairement premier avec tout nombre plus petit ; avec un nombre plus grand, il est premier ou il en est un sous-multiple.

19. *Théorème* 3. La somme algébrique de tant de nombres qu'on voudra, multiples chacun du même nombre, est un multiple de ce nombre.

Ce théorème peut s'écrire ainsi : $a = \dot p$, $b = \dot p$, $c = \dot p$, etc. ; on a $a + b + c + \ldots\ldots = \dot p$.

20. *Théorème* 4. La somme algébrique de tant de multiples d'un même nombre qu'on voudra, et affectés chacun d'un coefficient entier, est un multiple de ce même nombre.

Ce théorème peut s'écrire ainsi : $a = \dot p$, $b = \dot p$, $c = \dot p$, etc., on a aussi $ma + nb + rc + \ldots\ldots = \dot p$.

Corollaire. Si $a = \dot p$, $b = \dot p$, $c = \dot p\ldots$ on a $a^m b^n c^r \ldots\ldots = \dot p$, m, n, r étant des exposants entiers positifs.

Observation. Nous omettons la démonstration trop facile de ces théorèmes.

21. *Théorème* 5. Le diviseur commun à deux nombres est aussi commun à leur résidu.