Démonstration. Ce résidu est égal au dividende, *moins* le diviseur multiplié par le quotient ; donc...... (théorème 4).

Corollaire. Le résidu de deux nombres premiers entre eux est toujours premier avec le diviseur.

22. *Théorème* 6. Le résidu de la somme algébrique de plusieurs nombres relativement à un même diviseur, est égal à la somme des résidus.

Démonstration. Soit $a=\dot{p}+r$, $b=\dot{p}+s$, $c=\dot{p}+t$, etc. ; p étant le diviseur et r, s, t les résidus, on a

$$a+b+c+\ldots\ldots=\dot{p}+r+s+t+\ldots ;$$

donc, etc.

Observation. Si la somme des résidus surpasse le diviseur p, on prend le résidu de cette somme.

23. *Théorème* 7. Le résidu d'un produit est égal au produit des résidus des facteurs.

Demonstration. Soient a, b, c les facteurs, p un diviseur $a=\dot{p}+r$, $b=\dot{p}+s$, $c=\dot{p}+t$, on a $abc\ldots\ldots=\dot{p}+rst\ldots\ldots$: si $rst\ldots\ldots$ est plus grand que p, on en prend le résidu.

Observation. Les preuves dites par 9 dont on se sert pour contrôler les opérations de l'arithmétique sont fondées sur les deux théorèmes précédents.

24. *Théorème* 8. Le produit de deux facteurs premiers avec un troisième est premier avec ce troisième nombre.

Démonstration. Soient a, b les deux facteurs premiers avec p, et admettons, s'il est possible, que q soit un facteur commun entre ab et p, de sorte qu'on a $ab=\dot{q}$, $p=\dot{q}$. Supposons d'abord $p<a$, on a donc $p=\dot{a}+r$; le résidu r est plus petit que a. Cette équation donne celle-ci : $pb=\dot{a}b+br$; pb et $\dot{a}b$, par hypothèse, ont le facteur commun q ; ce même facteur divise donc br. De ce produit, on déduirait semblablement un produit br' divisible par q, et où $r'<r$, on parviendrait donc enfin à un produit $1\times b$, divisible par q ; p et b auraient donc le diviseur commun q, ce qui est impossible ; donc ab et p n'ont pas de diviseur commun.

2° Si $a>p$, on a $a=\dot{p}+r$, où r est plus petit que p et premier avec p ; $ab=\dot{b}p+br$; si ab n'est pas premier avec p, alors br ne serait pas non plus premier avec p ; mais r étant plus petit que p, br est nécessairement premier avec p ; donc, etc.

Ce théorème 8 est la proposition 26 du septième livre d'Euclide.

25. *Théorème* 9. Si tous les facteurs d'un produit sont premiers avec le nombre p, le produit sera premier aussi avec ce nombre p.

Ce théorème est un corollaire du précédent ; propositions 16, 17, 18, 19 du neuvième livre d'Euclide.

Corollaire. Si a est premier avec p, a^m est aussi premier avec p ; on en déduit qu'il est impossible que la racine d'un indice quelconque d'un nombre entier soit un *nombre fractionnaire*, et de là l'existence des quantités irrationnelles.

26. *Théorème* 10. Un nombre composé ne peut se résoudre que d'une seule manière, en facteurs premiers.

Démonstration. Soient a, b, c, d...... les nombres premiers, suivant l'ordre de grandeur, qui divisent le nombre composé N ; ainsi $N=a^{a}\,b^{b}\,c^{c}\,d^{d}\ldots\ldots$; soit un autre nombre premier a', différent de a, b, c, d...... ; étant premier avec a, b, c, d...... il sera premier avec N ; ainsi N n'admet pas d'autres nombres premiers. Soit donc $N=a^{a'}\,b^{b'}\,c^{c'}\ldots\ldots$, et $a'>a$; on aura $b^{b'}\,c^{c'}\ldots\ldots=a^{a'-a}b^{b'}\,c^{c'}\ldots\ldots$ Mais cette équation est impossible, car le second membre est divisible par a et le premier ne l'est pas ; donc, etc.

27. *Problème* 4. Combien un nombre composé a-t-il de diviseurs, et quelle est la somme de ces diviseurs ?

Solution. Soit comme dans le théorème précédent,

$$N=a^{a}\,b^{b}\,c^{c}\ldots\ldots$$

Effectuant le produit des polynômes

$$(1+a+a^2+\ldots\ldots a^{a})\,(1+b+b^2+\ldots\ldots b^{b})\,(1+\ldots\ldots c^{c})\ldots\ldots$$

tous les termes de ce produit sont inégaux ; chacun est diviseur de N, et réciproquement tout diviseur de N est nécessairement un de ces termes ; or le nombre de ces termes est évidemment $(1+a)\,(1+b)\,(1+c)\ldots\ldots$ tel est donc le nombre des diviseurs de N, l'unité comprise, et la somme de tous ces diviseurs est donc égale à

$$\frac{(a^{a+1}-1)\,(b^{b+1}-1)\,(c^{c+1}-1)\ldots}{(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\ldots}$$

Coroll. Soit $N=2^{a}\,(2^{a+1}-1)$, et supposons que $2^{a+1}-1$ soit un nombre premier ; ainsi $a=2$; $b=2^{a+1}-1$; $b=1$; la la somme de tous les diviseurs est donc, toute réduction faite, égale à 2N ; le nombre, qui jouit de cette propriété d'être égale à la somme de ses diviseurs, est dit un *nombre parfait* ; ces nombres sont ainsi dénommés à raison de leur rareté ; voici les 11 premiers nombres :

Valeurs de a.	Nombres parfaits.
0—	1
1—	6
2—	28
4—	496
6—	8128
12—	33 550 336
16—	85 898 691 328
18—	137 438 691 328
30—	2 305 843 008 139 952 128
40—	2 417 851 639 228 158 837 784 756
46—	9 903 520 314 282 971 830 448 816 128.

Si dans un nombre parfait, on ajoute ensemble tous les chiffres, on obtient un second nombre ; si on a fait de même pour ce second nombre, on obtient un troisième nombre qui est divisible par 10. Observation de Kraft. (M. de Pét^s, 1734—35). Sans démonstration.

Entre 1 et un sextillion, il n'y a que 10 nombres parfaits.

Cette solution se trouve dans Euclide. (Prop. 36, liv. 9.)

28. $a+1$ est un nombre premier ; car, s'il était le produit de deux facteurs mn, alors $2^{mn}-1$ serait divisible par $2^{m}-1$ et par $2^{n}-1$; et par conséquent $2^{a+1}-1$ n'étant plus un nombre premier, N ne sera plus un nombre parfait. Faisons $2^{a}=x$; alors $N=2x^2-x$; lorsque $x=1$, N devient égal à l'unité ; donc $N-1$ est divisible par $x-1$; et l'on a $N-1=(x-1)\,(2x+1)$; remplaçant x par sa valeur, on a l'identité $N=2^{a}(2^{a+1}-1)=(2^{a}-1)\,(2^{a+1}+1)+1$, a est essentiellement pair, et $2^{a}=(3-1)^{a}$; donc 2^{a} est de la forme $\dot{3}+1$; par conséquent $2^{a}-1$ est divisible par 3 ; il en est de même de $2^{a+1}+1$; donc N est de la forme $\dot{9}+1$. Soit N_1 la somme des chiffres de N ; N_2 la somme des chiffres de N_1 ; N_3 la somme des chiffres N_2 et ainsi de suite ; tous les nombres, en vertu de la propriété connue du diviseur 9 dans la numération décimale, sont de la forme $\dot{9}+1$. Ces nombres vont toujours en diminuant ; le dernier de ces nombres est donc l'unité, et l'avant-dernier est dix ou une puissance de dix.

Nous devons à l'obligeance de M. le professeur Wantzel la démonstration de cette observation de Krafft (27).

Le premier chiffre à droite de 2^{a} étant 4 ou 6, il en résulte que le premier chiffre à droite d'un nombre parfait est 6 ou 8.

(*A continuer.*)

AVIS OFFICIELS.

Ministère de l'Instruction Publique.

NOMINATIONS

COMMISSAIRES D'ÉCOLES.

Le Lieutenant-Gouverneur a bien voulu, par ordre en Conseil en date du 19 Octobre dernier, faire les nominations suivantes :

Paspebiac—Comté de Bonaventure.—M. André de Rosbille en remplacement de M. Louis Denis.